

VI. Előadás (2020. ápr. 2.)

(A) Példa az R_A és R_L relációkra

Tekintsük az 1. Ábrán látható DFA-t. Az R_A ekvivalencia osztályai az automata állapotainak felelnek meg (lásd az előző V. előadást). Ezek a, b, c, d, e és f , így ezt kapjuk.

$$\begin{aligned}(a) &:= (00)^* & (b) &:= (00)^*0 \\ (c) &:= (00)^*1 & (d) &:= (00)^*01 \\ (e) &:= 0^*100^* & (f) &:= 0^*10^*1(0+1)^*\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a -ból valamely végállapotba azokkal és csak azokkal a szavakkal juthatunk el, amelyek pontosan egy 1-est tartalmaznak. Így az automata nyelve $L = 0^*10^*$ -ez mindig az R_L ekvivalencia egyik osztálya. Definíció szerint, valamely $v, w \in \Sigma^*$ -ra

$$vR_Lw \Leftrightarrow \text{tetszőleges } z \in \Sigma^* \text{ esetén: } (vz \in L \Leftrightarrow wz \in L).$$

Vegyük észre hogy $vz \in L$ csak úgy teljesülhet ha v csak 0-t, vagy csak 0-t és egy drb. 1-est tartalmaz. Amennyiben v két vagy több 1-est tartalmaz, akkor minden $z \in \Sigma^*$ -ra $vz \notin L$. Ezért R_L ekvivalenciaosztályai:

$$\begin{aligned}O_1 &:= 0^* \text{ (Csak 0-t vagy } \varepsilon\text{-ont tartalmazó szavak),} \\ O_2 &= L := 0^*10^* \text{ (Pontosan egy drb. 1-est tartalmazó szavak),} \\ O_3 &:= 0^*10^*1(0+1)^* \text{ (Legalább két 1-est tartalmazó szavak).}\end{aligned}$$

Tehát az R_L osztályok így építhetők fel az R_A osztályokból:

$$O_1 = (a) \cup (b), O_2 = (c) \cup (d) \cup (e), O_3 = (f).$$

R_L osztályait az automatával ekvivalens minimális DFA felépítéséhez fogjuk majd felhasználni.

(B) Myhill-Nerode tétele

Tétel 1. (Myhill-Nerode): Legyen Σ egy véges ábécé és $L \subseteq \Sigma^*$. Akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

- (i) L egy véges det. automata nyelve;
- (ii) L egy véges indexű jobbinvariáns ekvivalencia valamely osztályainak az uniója;
- (iii) Az R_L ekvivalencia véges indexű.

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii). Tegyük fel hogy valamilyen $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ véges det. automata esetén $L = \mathcal{L}(A)$. Legyen $F = \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \subseteq Q$. Akkor:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \bar{\delta}(q_0, w) = q_1\} \cup \{w \in \Sigma^* \mid \bar{\delta}(q_0, w) = q_2\} \cup \dots \cup \{w \in \Sigma^* \mid \bar{\delta}(q_0, w) = q_k\} = R_A(q_1) \cup R_A(q_2) \cup \dots \cup R_A(q_k),$$

vagyis L előáll az R_A ekvivalencia $q_1, q_2, \dots, q_k$ állapotaihoz tartozó osztályainak az uniójaként. Mivel már előzőleg megmutattuk hogy R_A egy véges indexű jobbinvariáns ekvivalencia a Σ^* szóhalmazon, (ii) teljesül.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Tegyük fel hogy (ii) teljesül valamilyen E jobbinvariáns véges indexű ekvivalenciára. Akkor az V. előadás 2. Állítása szerint $E \leq R_L$. Ez azt jelenti hogy R_L osztályai E osztályainak az uniójaként állíthatók elő. Ezért R_L osztályainak a száma $\leq E$ osztályainak a száma = véges. Ez azt jelenti hogy R_L is véges indexű, tehát (iii) teljesül.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Tegyük fel hogy R_L -nek véges számú osztálya van - ezeket felhasználva szerkesztünk egy $\mathcal{A}^* = (Q^*, \Sigma, q_0^*, \delta^*, F^*)$ véges det. automatát a köv. képpen:

Egy $x \in \Sigma^*$ szó R_L -osztályát jelöljük $[x]_L$ -el. Q^* legyen R_L -osztályainak a halmaza, azaz

$$Q^* := \{[x]_L \mid x \in \Sigma^*\},$$

továbbá legyen $q_0^* := [\varepsilon]_L$ és $F^* := \{[x]_L \mid x \in L\}$. Értelmezzük a $\delta^*: Q^* \times \Sigma \rightarrow Q^*$ tranzíciós függvényt a köv. képpen:

$$\delta^*([x]_L, a) := [xa]_L, \text{ minden } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\text{-ra.} \quad (*)$$

Ez az értelmezés helyes és egyértelmű, mert ha $[x]_L = [y]_L$ valamely $x, y \in \Sigma^*$ szavakra, akkor $xR_L y$ és így $xaR_L ya$, mert R_L jobbinvariáns. De ez azt jelenti hogy $\delta^*([x]_L, a) = [xa]_L = [ya]_L = \delta^*([y]_L, a)$.

A δ^* függvény $\bar{\delta}^*$ kiterjesztésére n szerinti teljes indukcióval igazolható hogy $\bar{\delta}^*([x]_L, a_1 \dots a_n) = [xa_1 \dots a_n]_L$, minden $a_1, \dots, a_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ -ra. Így minden $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ szó esetén

$$\bar{\delta}^*([x]_L, w) = [xw]_L. \quad (**)$$

Szerkesztése szerint $\mathcal{A}^* = (Q^*, \Sigma, q_0^*, \delta^*, F^*)$ egy véges automata. Mivel $\delta^*: Q^* \times \Sigma \rightarrow Q^*$ egy függvény, ezért determinisztikus. Azt állítjuk hogy L az $\mathcal{A}^*$ automata nyelve. Valóban, tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szóra a (**) összefüggést felhasználva azt kapjuk hogy:

$$w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^*) \Leftrightarrow \bar{\delta}^*([\varepsilon]_L, w) \in F^* \Leftrightarrow [\varepsilon w]_L \in F^* \Leftrightarrow [w]_L \in F^* \Leftrightarrow w \in L.$$

Tehát $\mathcal{L}(\mathcal{A}^*) = L$, és így (i) teljesül. $\square$

Megjegyzés. A (iii) $\Rightarrow$ (i) implikáció bizonyítása során használt konstrukció a minimalizálási eljárás kiinduló pontja, ahogy azt az alábbi következmény is mutatja.

Következmény 1. Az $L \subseteq \Sigma^*$ reguláris nyelvet elfogadó véges det. automata mindig létezik, egy (izomorfizmustól eltekintve) egyértelmű és nem más mint a fenti tétel (iii) $\Rightarrow$ (i) implikációjának bizonyításakor megkonstruált $\mathcal{A}^*$ automata.

Bizonyítás. Tegyük fel hogy az L nyelvet az $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ véges det. automata elfogadja. Igazolni fogjuk hogy a tétel bizonyítása során megkonstruált $\mathcal{A}^*$ automata állapotainak száma kisebb vagy egyenlő mint az $\mathcal{M}$ automata állapotainak a száma, vagyis $|Q^*| \leq |Q|$.

Valóban, szerkesztés szerint $|Q^*| = R_L$ osztályainak a száma. Tekintsük most az $\mathcal{M}$ automata által definiált $R_{\mathcal{M}}$ ekvivalenciát: Tudjuk hogy ennek osztályai $\mathcal{M}$ állapotainak felelnek meg, így $|Q| = R_{\mathcal{M}}$ osztályainak a száma. Az V előadás 1. Állítása szerint $R_L \leq R_{\mathcal{M}}$, bármely az L -t előállító véges det. $\mathcal{M}$ automata esetén. Ezért $R_{\mathcal{M}}$ osztályai megkaphatók úgy mint R_L valamely osztályainak az úniói. De akkor:

$$|Q^*| = R_L \text{ osztályainak a száma} \leq R_{\mathcal{M}} \text{ osztályainak a száma} = |Q|.$$

Tehát $\mathcal{A}^*$ egy minimális állapotszámú L -t elfogadó véges det. automata. Mivel $\mathcal{A}^*$ konstrukciója minden L reguláris nyelv esetén elvégezhető, mindig létezik. Az R_L osztályok egyértelműségéből, valamint a konstrukció egyértelmű voltából következik hogy $\mathcal{A}^*$ is egyértelmű. $\square$

Példa 1. Az 1. Ábrán adott véges determinisztikus automatához tartozó $\mathcal{A}^*$ minimális automatát amit a fenti konstrukcióval kaptunk a 2. Ábra mutatja. Mint látható, egy 3 állapotú DFA-t kaptunk aminek egy végállapota van.

(C) A minimalizálási eljárás alapelvei

Mivel az R_L ekvivalencia megszerkesztése körülményes és annak osztályai (általában végtelen) szóhalmazok, R_L helyett annak a "lenyomatát" fogjuk megszerkesztetni egy adott véges automata állapotainak a (véges) Q halmazán.

Legyen $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ egy véges det. automata amit "minimalizálni" akarunk. Állapotainak Q halmazán egy $\equiv$ ekvivalenciát értelmezünk a köv. képen: $p, q \in Q$ -ra,

$$p \equiv q \Leftrightarrow \text{tetszőleges } w \in \Sigma^* \text{ esetén: } \bar{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \bar{\delta}(q, w) \in F. \quad (+)$$

A definíció alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $\equiv$ egy reflexív, szimmetrikus és tranzitív bináris reláció, tehát $\equiv$ egy ekvivalencia Q -n.

Legyen most x egy tetszőleges szó az $R_A(p)$ osztályból, vagyis egy olyan szó aminek a hatására $\mathcal{A}$ q_0 -ból a p állapotba jut és y egy tetsz. szó az $R_A(q)$ osztályból, azaz egy olyan szó, aminek a hatására $\mathcal{A}$ q_0 -ból q -ba jut. Akkor $\bar{\delta}(p, w) = \bar{\delta}(q_0, xw)$ és $\bar{\delta}(q, w) = \bar{\delta}(q_0, yw)$, ezért a (+) összefüggés egyenértékű azzal, hogy tetszőleges $w \in \Sigma$ -ra:

$$\bar{\delta}(q_0, xw) \in F \Leftrightarrow \bar{\delta}(q_0, yw) \in F.$$

Ezt szemlélteti a 3. Ábra. Ez azt jelenti hogy $xw \in L \Leftrightarrow yw \in L$, minden $w \in \Sigma$ -ra, azaz

$$xR_L y \text{ (minden } x \in R_A(p) \text{ és } y \in R_A(q)\text{-ra).}$$

De ekkor $[x]_L = [y]_L$. Más szóval a p és q állapotokhoz vezető szavak ugyanazon R_L osztályhoz tartoznak (lásd 4. Ábra). Így a p állapothoz tartozó $R_A(p)$ osztály és a q -hoz tartozó $R_A(q)$ osztály is ugyanannak az R_L szó osztálynak a részhalmaza. Ezért mondhatjuk, hogy a $\equiv$ ekvivalencia nem más mint az R_L ekvivalencia "lenyomata" $\mathcal{A}$ állapotainak a Q halmazán.

Például az 1. Ábrán látható automata esetén $a \equiv b$, $c \equiv d \equiv e$, $f \equiv f$ azaz R_L ekvivalencia O_1 osztályához az a, b állapotok, O_2 -höz az c, d, e állapotok és O_3 -hoz az f állapot tartozik. Vagyis R_L osztályainak a "lenyomatai": $\{a, b\}$, $\{c, d, e\}$, $\{f\}$ - ezek lesznek az L -t előállító minimális automata állapotai!

Tehát R_L osztályait a $\equiv$ ekvivalencia osztályaival fogjuk helyettesíteni. Célunk ezek meghatározása valamilyen algoritmus segítségével, majd ezekből felépítjük a minimális automatát.

(D) A gyakorlati eljárás

A gyakorlatban a $*$ megkülönböztetethezőségi relációt szoktuk meghatározni ami $\equiv$ tagadása. (Ez nyilván szimmetrikus és mivel $a * a$ sohasem teljesül, irreflexív is.) Az előbbieket alapján az r és s állapotok megkülönböztethetők (nem ekvivalensek), ha van olyan $x \in \Sigma^*$ szó amire $r \xrightarrow{x} q_f \in F$ és $s \xrightarrow{x} z \notin F$.

Az eljárás alapelve az, hogy a végállapotoktól haladunk „visszafelé”. Egy $q_f \in F$ végállapot és egy $z \notin F$ "nem végállapot" ugyanis sohasem lehet ekvivalens, hiszen ε hatására q_f -ből q_f -be, azaz végállapotba jutunk, míg z -ből ε -al nem végállapotba (hanem z -be). Vegyük észre, hogy ha $p, q \in Q$ esetén

$$\begin{aligned} p &\xrightarrow{a} r \xrightarrow{x} q_f \in F \text{ és} \\ q &\xrightarrow{a} s \xrightarrow{x} z \notin F, \end{aligned}$$

akkor p és q is megkülönböztethetők. Valóban, ekkor a $w = ax$ szó hatására p -ből a q_f végállapotba, míg q -ből nem végállapotba jutunk. Így általában is igaz az, hogy ha p -ből és q -ből ugyanazon szó hatására olyan r illetve s állapotba jutunk amik megkülönböztethetők, akkor p és q is megkülönböztethető.

Példa 2. Az eljárást az 5. Ábrán szereplő véges det. automatán szemléltetjük. Itt $Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. A megkülönböztetethezőségi reláció ábrázolására elkészítjük az alábbi (asszimmetrikus) táblázatot. Ha az x állapot sorának és az y állapot oszlopának metszésénél lévő kockába $*$ -ot teszünk, ez azt jelenti hogy az x és az y állapot megkülönböztethető. Például $a * c$ azaz a és c megkülönböztethetők, mert c végállapot a -pedig nem. Az oszlopok elemein újra és újra végigmegyünk mindaddig amíg új kockát amibe $*$ -ot tehetünk már nem találunk. Ha a két utolsó iteráció eredménye megegyezik az eljárás véget ér. Ekkor az üresen maradt mezők a nem megkülönböztethető, tehát az ekvivalens elem-párokat adják meg. Így a 6. Ábrán látható táblázat alapján azt kapjuk hogy $a \equiv e$, $b \equiv h$, $d \equiv f$. Tehát az $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ nyelvet előállító DFA állapotai $[a, e]$, $[b, h]$, $[c]$, $[d, f]$ és $[g]$ lesznek, ezek közül pedig $[c]$ lesz az egyetlen végállapot. A kapott automata a 7. Ábrán látható.