V. előadás (2020 márc. 12) (A)

1

(A) Behelyettesítés – folytatás

A múlt órán láttuk, hogy ha $S: \Sigma_1^* \to reg(\Delta)$ egy behelyettesítés, akkor egy $L \subseteq \Sigma_1^*$ nyelv S-re vonatkozó képét így definiáljuk:

$$S(L) := \bigcup_{w \in L} L_{S(w)}$$

Ezzel kapcsolatban használható az alábbi egyszerű

Állítás 1: Legyenek r, r_1, r_2 Σ_1-feletti reguláris kifejezések.

Akkor:

$$S(L_{r_1+r_2}) = S(L_{r_1}) \cup S(L_{r_2})$$
$$S(L_{r_1 \cdot r_2}) = S(L_{r_1}) \cdot S(L_{r_2})$$
$$S(L_{r^*}) = S(L_r)^*$$

Biz: Csak az első összefüggést bizonyítjuk

$$S(L_{r_1+r_2}) = S(L_{r_1} \cup L_{r_2}) = \bigcup_{w \in L_{r_1} \cup L_{r_2}} L_{S(w)} =$$
$$= \left(\bigcup_{w \in L_{r_1}} L_{S(w)}\right) \cup \left(\bigcup_{w \in L_{r_2}} L_{S(w)}\right) = S(L_{r_1}) \cup S(L_{r_2}).$$

A múlt órán az $S: \Sigma_1^* \to reg(\Delta)$ behelyettesítést kiterjesztettük egy $\bar{S}: reg(\Sigma_1) \to reg(\Delta)$ homomorfizmussá a köv. képpen:

$\bar{S}(\emptyset) = \emptyset$, $\bar{S}(\varepsilon) = \varepsilon$, $\bar{S}(a) = S(a)$ minden $a \in \Sigma_1$-ra és

$$\left.\begin{aligned} \bar{S}(r+t) &:= \bar{S}(r) + \bar{S}(t) \\ \bar{S}(r \cdot t) &:= \bar{S}(r) \cdot \bar{S}(t) \\ \bar{S}(r^*) &= (\bar{S}(r))^* \end{aligned}\right\} \text{ ami egy induktív definíció}$$

Mivel minden reg. kifejezés véges számú lépésben felépíthető az $\emptyset$, ε, a elemi reg. kifejezésekből a $+$, $\cdot$ és $*$ műveletek ismételgetésével, minden r reg. kifejezés $\bar{S}(r)$ képét értelmezni tudjuk!

Állítás 2: Legyen $s: \Sigma_1^* \to reg(\Delta)$ egy behelyettesítés és r egy reg. kifejezés Σ_1-felett. Akkor

$$s(L_r) = L_{\bar{s}(r)}$$

Biz. Ez az r reg. kifejezés hossza (karakterszáma) szerinti teljes indukcióval történik. Ezt $|r|$-el jelöljük.

- Ha $|r| = 1$ akkor $r = \emptyset$ vagy $r = \varepsilon$ vagy $r = a$, ahol $a \in \Sigma_1$.

Így $L_r = \emptyset$ vagy $L_r = \{\varepsilon\}$ vagy $L_r = \{a\}$, ahol
$s(L_r) = \emptyset$, $s(L_r) = \varepsilon$ és $s(L_r) = L_{\bar{s}(a)}$

Mivel $\bar{s}(\emptyset) = \emptyset$, $\bar{s}(\varepsilon) = \varepsilon$ és $\bar{s}(a) = s(a)$ ezért mindhárom esetben $s(L_r) = L_{s(r)}$ teljesül.

Tegyük fel most hogy az eredmény minden $1 \leq |r| \leq k$ hosszúságú r reg. kifejezésre igaz, és bizonyítsuk $k+1$ hosszúságúra. Legyen r egy $k+1$ hosszúságú reg. kifejezés. Akkor $r = r_1 + r_2$ vagy $r = r_1 \cdot r_2$ vagy $r = r_1^*$ alakú, ahol $|r_1|, |r_2| \leq k$. Az első esetben például

$$\underline{s(L_r)} = s(L_{r_1+r_2}) = s(L_{r_1}) \cup s(L_{r_2}) = L_{s(r_1)} \cup L_{s(r_2)} =$$
$$= L_{s(r_1)+s(r_2)} = L_{s(r_1+r_2)} = \underline{L_{s(r)}}$$

Ugyanígy bizonyíthatók az összefüggések az $r = r_1 \cdot r_2$ és $r = r_1^*$ esetekben.

Tétel. Legyen $s: \Sigma_1^* \to reg(\Delta)$ egy behelyettesítés és $L \subseteq \Sigma_1^*$ egy reg. nyelv. Akkor $s(L)$ is egy reg. nyelv.

Biz. Ha L egy reg. nyelv, akkor létezik olyan $r \in reg(\Sigma_1)$ reg. kifejezés amire $L = L_r$. De akkor $s(L) = s(L_r) = L_{s(r)}$. Mivel $s(r)$ egy Δ-feletti reg. kifejezés ezért $s(L) = L_{s(r)}$ is egy Δ-feletti reg. nyelv.

Vegyük most egy olyan $h: \Sigma_1^* \to \Delta^*$ homomorfizmust egy speciális $S: \Sigma_1^* \to \text{reg}(\Delta)$ behelyettesítés is adod

$S(\varepsilon) = \varepsilon$ és $S(a) = b_1 b_2 \ldots b_k \in \Delta^*$ az tagjait fel mint a Δ feletti $r = b_1 b_2 \ldots b_k$ reguláris kifejezés!

Így az előbbi eredményt kapjuk:

Következmény 1. Ha $L \subseteq \Sigma_1^*$ egy ~~reg. kifejezés~~ reg. nyelv és $h: \Sigma_1^* \to \Delta^*$ egy homomorfizmus, akkor $h(L)$ egy is Δ-feletti reguláris nyelv.

Köv 2: A reguláris nyelvek családja zárt a homomorfizmusra és a behelyettesítésre - bizonyítás nélkül elfogadjuk egy zárt az inverz homomorf képre is.

Példa: Adott az $S: (0+1)^* \to \text{reg}\{a,b\}$,

$S(0) = a$
$S(1) = b^*$ } behelyettesítés és tekintsük azt az L_r nyelvet

amit az $r = 0^* 1$ reg. kifejezés ad meg.

A tanultak alapján L-nél az $S(L)$ képét megkapjuk ha az $\bar{S}(0^*1)$ reg. kifejezést és vesszük az általa kiszámított meghatározott nyelvet.

Így $\bar{S}(0^*1) = \bar{S}(0)^* \bar{S}(1) = S(0)^* S(1) = a^* b^*$

$S(0^*1)$ tehát az $a^* b^*$-hoz tartozó $\{a^n b^m \mid n,m \geq 0\}$ nyelv.

Automaták és Formális Nyelvek
V/B előadás (2020. márc. 26)

(A) Jobbinvariáns ekvivalenciák

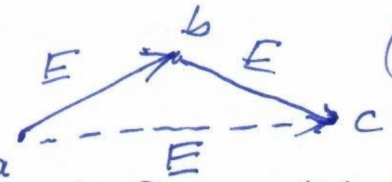
Ismétlés

Egy $E \subseteq A \times A$ bin. relációt ekvivalencia relációnak nevezzük ha:

a) reflexív aEa minden $a \in A$-ra

a) szimmetrikus: $aEb \iff bEa$ (minden $a, b \in E$-re)

c) tranzitív: $(aEb$ és $bEc) \Rightarrow aEc$ (lásd 1. ábra)



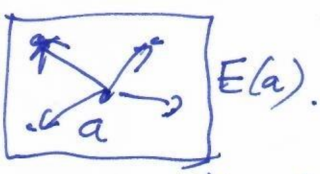
(1. ábra)

Példák: - A valós számok halmazán, $a, b \in \mathbb{R}$-re $aEb \overset{def}{\iff} |a| = |b|$.

- A háromszögek halmazán E jelentse hogy két háromszög hasonló.

Egy $a \in A$ elem esetén $E(a) = \{b \in A \mid aEb\}$ halmazt ekvivalencia osztálynak, az a elem ekvivalencia osztályának nevezzük

Mivel aEa, ezért $a \in E(a)$ (lásd 2. ábra)



Vegyük észre, hogy $aEb \iff b \in E(a)$.

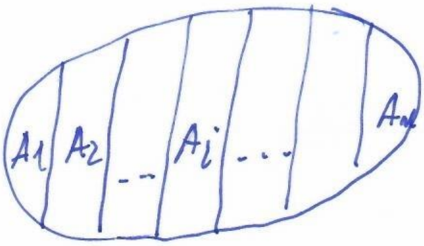
(2. ábra)

E-t véges indexű ekvivalenciának nevezzük, ha osztályainak a száma véges.

Partíció fogalma Egy $A \neq \emptyset$ halmaznak az $\{A_i \mid i \in I\}$ halmazcsalád egy partíciója, ha $A_i \subseteq A$, $A_i \neq \emptyset$ minden $i \in I$-re és ha teljesülnek a következő feltételek

1) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ (lefedik A-t)

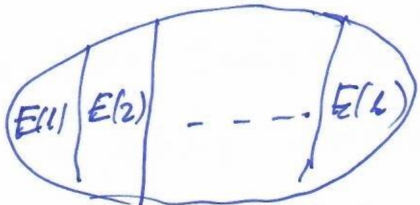
2) $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$ (a halmazok páronként diszjunktak) (lásd 3. ábra)



(3. ábra)

Például, ha $A :=$ a ME hallgatói, akkor az I, II, III, IV, V évfolyamok A-nak (a hallgatók halmazának) egy partícióját alkotják.

Tétel 1 Egy $A \neq \emptyset$ halmazon értelmezett E ekvivalencia különböző osztályai A-nak egy partícióját hozzák létre. (lásd 4. ábra)



(4. ábra)

Pl. Az N halmazon ($N = \{0, 1, 2, \ldots\}$) értelmezzük a $\rho \subseteq N \times N$ relációt a köv. képpen:
$a \rho b \iff$ a-nak és b-nek a 3-al való osztási maradéka ugyanaz.

- azonnal ellenőrizhető hogy ρ egy ekvivalencia reláció. Nyilvánvaló, hogy egy $n \in N$ számnak 3-al való osztási maradéka csak 0, 1 vagy 2 lehet, ezért ρ-nak csak 3 osztálya van (lásd az 5. ábrát):

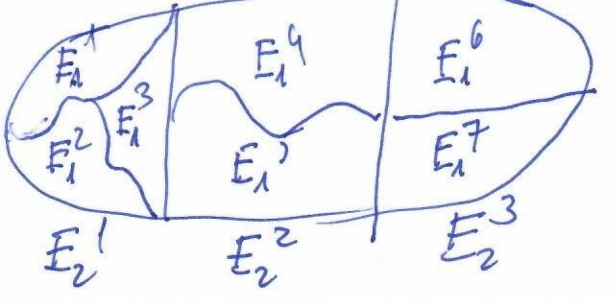
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
0, 3, 6, 9, 12, 15, ...	1, 4, 7, 10, 13, 16, ...	2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

(5. ábra)

Ezek a $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ osztályok N egy partícióját alkotják.

Def. Azt mondjuk hogy az $E_1, E_2 \subseteq A \times A$ relációk esetén E_1 kisebb vagy finomabb mint E_2, ha minden $x, y \in A$-ra:
$x E_1 y \Rightarrow x E_2 y$. Jelölés $E_1 \leq E_2$.

Tétel 2. Ha E_1, E_2 olyan ekvivalencia relációk amire $E_1 \subseteq E_2$, akkor E_2 minden ekvivalencia osztálya E_1 valamely osztályainak az uniója. (lásd 6. ábra)



(6. ábra)

Legyen most $(S, \cdot)$ egy félcsoport és $E \subseteq S \times S$ egy ekvivalencia reláció az S halmazon.
Az E ekvivalenciát jobbinvariánsnak nevezzük ha minden aEb és tetszőleges $x \in S$ esetén $a \cdot x \, E \, b \cdot x$ is teljesül.
E balinvariáns, ha $\forall a, b \in S$-re és tetszőleges $x \in S$-re aEb-ből $x \cdot a \, E \, x \cdot b$ teljesül.
Pl. az $(\mathbb{Z}, \cdot)$ félcsoportban az előbbi ϱ reláció mind jobbinvariáns mind balinvariáns ekvivalencia.
Valóban, $a \varrho b \Leftrightarrow 3 \mid a-b \Leftrightarrow a-b = 3 \cdot k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ezért
$a \cdot x - b \cdot x = (3k)x = 3 \cdot (kx)$, így $a \cdot x \, \varrho \, b \cdot x$.
$x \cdot a - x \cdot b = x \cdot 3k = 3k \cdot x$, így $x \cdot a \, \varrho \, x \cdot b$.
Az is világos hogy ϱ véges indexű.
Ha ϱ egyszerre jobb és balinvariáns: kongruenciának nevezzük.

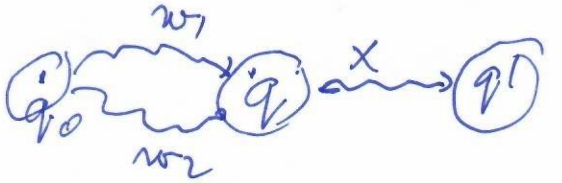
B) Automaták és nyelvek által származtatott jobbinvariáns ekvivalenciák

1) Legyen $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy véges det. automata. A $(\Sigma^*, \cdot)$ szabadmonoidon most egy R_A relációt definiálunk a következő képpen: $w_1, w_2 \in \Sigma^*$-ra $w_1 R_A w_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \overline{\delta}(q_0, w_1) = \overline{\delta}(q_0, w_2)$

Azt állítjuk hogy R_A egy jobbinvariáns ekvivalencia.
- Valóban a definícióból következik hogy R_A reflexív és szimmetrikus.

- R_A tranzitív is, mert
$w_1 R_A w_2$ és $w_2 R_A w_3$ esetén a $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma_i^*$ szavakra
$\bar\delta(q_0,w_1)=\bar\delta(q_0,w_2)$ és $\bar\delta(q_0,w_2)=\bar\delta(q_0,w_3)$ következik.
Így $\bar\delta(q_0,w_1)=\bar\delta(q_0,w_3)$ is teljesül, ami azt jelenti hogy
$w_1 R_A w_3$ – azaz R_A tranzitív.

Lássuk be most hogy R_A jobbinvariáns:
Tegyük fel hogy $w_1 R_A w_2$ és legyen $x \in \Sigma_i^*$ tetszőleges. Akkor
$\bar\delta(q_0,w_1)=\bar\delta(q_0,w_2)$. Így azt kapjuk hogy
$\bar\delta(q_0,w_1x)=\bar\delta(\bar\delta(q_0,w_1),x)=\bar\delta(\bar\delta(q_0,w_2),x)=\bar\delta(q_0,w_2x)$,
ez pedig azt jelenti hogy $w_1x \, R_A \, w_2x$ (lásd 7.ábra)



Tehát R_A valóban jobbinvariáns.

(7.ábra)

Vizsgáljuk meg most R_A osztályait. Tegyük fel hogy $\bar\delta(q_0,w)=q$.
Akkor $R_A[w]=\{v\in\Sigma_i^* \mid v R_A w\}=\{v\in\Sigma_i^* \mid \bar\delta(q_0,v)=\bar\delta(q_0,w)\}=$
$=\{v\in\Sigma_i^* \mid \bar\delta(q_0,v)=q\}$ – tehát azon szavak összessége
~~aminek~~ amelyek hatására az automata q_0-ból q-állapotba
jut. Tehát minden R_A osztály megfeleltethető egy q
állapotnak (méghozzá annak ahova az automata az osztályhoz
tartozó bármely szó hatására eljut.)
Mivel A véges automata, $|Q|$ véges $\Rightarrow$ R_A osztályainak a száma véges.
Tehát R_A véges indexű.

2) Legyen $L \subseteq \Sigma_i^*$ egy nyelv. Értelmezzük az $R_L \subseteq \Sigma_i^* \times \Sigma_i^*$ relációt
a köv. képpen: $w_1, w_2 \in \Sigma_i^*$-ra
$w_1 R_L w_2 \overset{def}{\iff}$ minden $v\in\Sigma_i^*$ esetén $w_1v\in L \iff w_2v\in L$.

Megmutatjuk hogy R_L egy jobbinvariáns ekvivalencia.

$R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ def szerint egy reflexív és szimmetrikus bin. reláció.

tranzitivitás: Legyen $w_1 R_L w_2$ és $w_2 R_L w_3$. Akkor tetszőleges $v \in \Sigma^*$-ra: $w_1 v \in L \Leftrightarrow w_2 v \in L \Leftrightarrow w_3 v \in L$. De ez azt jelenti hogy $w_1 R_L w_3$ – azaz R_L tranzitív.

Megmutatjuk hogy R_L jobbinvariáns is:

Tegyük fel hogy valamely $x, y \in \Sigma^*$-ra $x R_L y$ és legyen $w \in \Sigma^*$ tetszőleges.

Képezzük az xw és yw szavakat. Tudjuk hogy bármely $v \in \Sigma^*$ esetén $(xw)v = x(wv)$ és $(yw)v = y(wv)$.

Ezért: $(xw)v \in L \Leftrightarrow x(wv) \in L \Leftrightarrow y(wv) \in L \Leftrightarrow (yw)v \in L$.

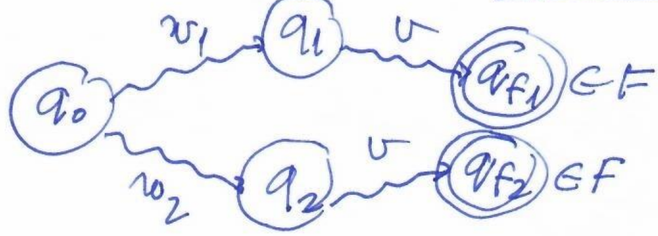
Ez az eredmény azt jelenti hogy $xw \, R_L \, yw$ – tehát R_L jobbinvariáns.

Legyen most $L = \mathcal{L}(A)$ – az A véges det. automata nyelve.

Vegyük észre hogy az R_L relációt most megadhatjuk úgy is hogy ~~$w_1, w_2 \in R_L$~~ $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ esetén

$w_1 R_L w_2$ ha minden $v \in \Sigma^*$-ra: $\delta(q_0, w_1 v) \in F \Leftrightarrow \delta(q_0, w_2 v) \in F$

(lásd 8. ábra):



(8. ábra).

Valóban

$w_1 R_L w_2 \Leftrightarrow$ tetsz. $v \in \Sigma^*$-ra $w_1 v \in L \Leftrightarrow w_2 v \in L$ ami azt jelenti hogy $w_1 v \in \mathcal{L}(A) \Leftrightarrow w_2 v \in \mathcal{L}(A)$ ami azt jelenti hogy $\delta(q_0, w_1 v) \in F \Leftrightarrow \delta(q_0, w_2 v) \in F$.

Állítás. Egy tetszőleges A véges det. automata esetén $R_A \subseteq R_L$

Biz. Tegyük fel hogy valamely $w_1, w_2 \in \Sigma^*$-ra $w_1 R_A w_2$.

Akkor $q_1 = \bar{\delta}(q_0, w_1) = \bar{\delta}(q_0, w_2) = q_2$

Így tetszőleges $v \in \Sigma_i^*$-ra:

$$\underline{\bar{\delta}(q_0, w_1 v)} = \bar{\delta}(q_1, v) = \bar{\delta}(q_2, v) = \bar{\delta}(\bar{\delta}(q_0, w_2), v) = \underline{\bar{\delta}(q_0, w_2 v)}.$$

Ezért $\bar{\delta}(q_0 w_1 v) \in F \iff \bar{\delta}(q_0, w_2 v) \in F$, ami azt jelenti, hogy $w_1 R_L w_2$. Tehát $R_A \subseteq R_L$.

Következmény: R_L véges indexű.

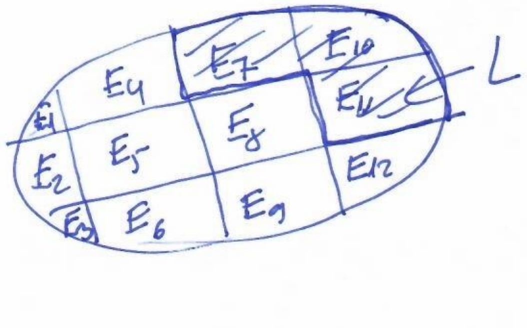
Valóban, $R_A \subseteq R_L$-ből az következik, hogy R_L minden ekvivalenciaosztálya R_A valahány osztályainak az uniója.

Így R_L osztályainak a száma $\leq R_A$ osztályainak a száma $= |Q|$

Ezért R_L-nek véges számú osztálya van - tehát véges indexű.

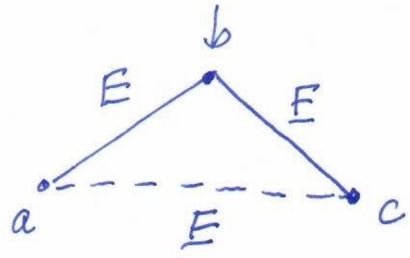
Ennél több is igaz:

Állítás 2: Legyen $L \subseteq \Sigma_i^*$ egy nyelv és E egy jobbinvariáns ekvivalencia $(\Sigma_i^*, \cdot)$-on. Ha L előállítható úgy mint E valahány osztályainak az uniója, akkor $E \subseteq R_L$ (lásd 9. ábra)

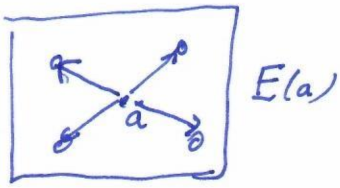


$L = E_7 \cup E_{10} \cup E_{11}$

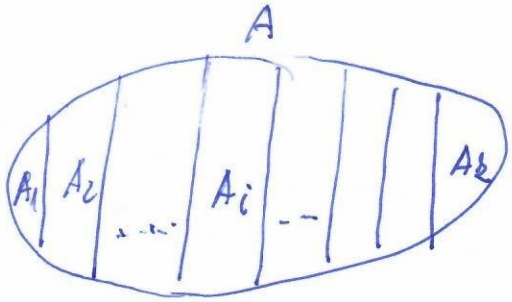
Ábrák



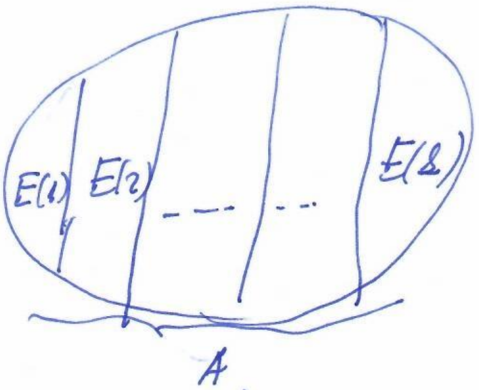
1. ábra



2. ábra



3. ábra

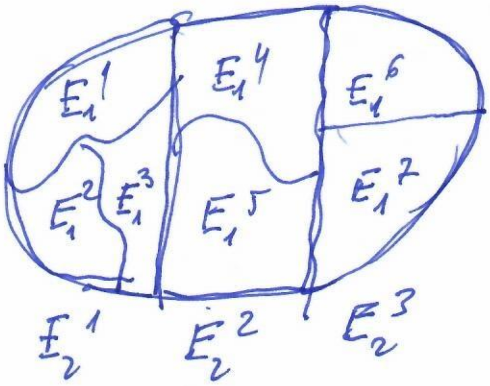


4. Ábra

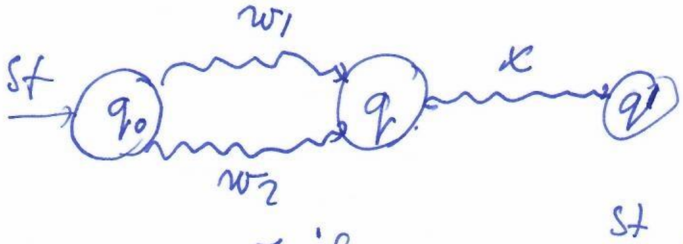
N

0	1	2
0,3,6,9,	1,4,7,	2,5,8
12,15...	10,13,16	11,14,17
...	19,...	20,...
	...	

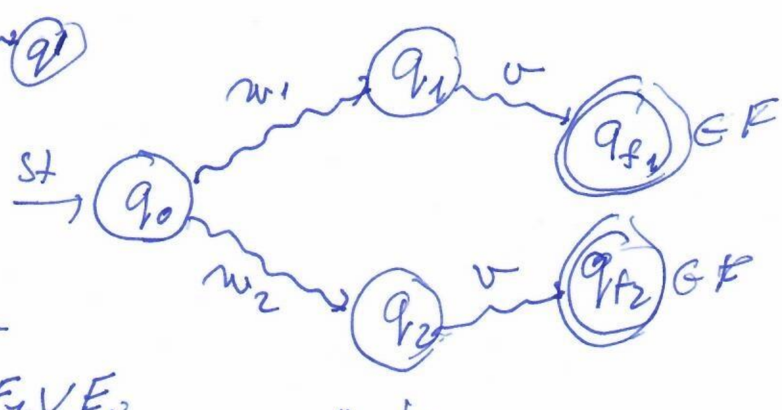
5. ábra



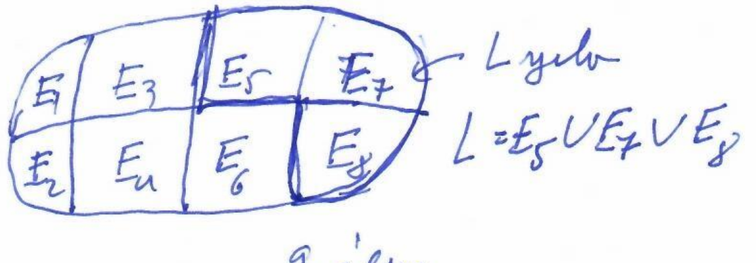
6. ábra



7 ábra



8. ábra



9. ábra