

IV Előadás (2021. Márc. 1)

Monoid homomorfizmus fogalma

Tekintsük az $(A, \circ, e)$ és a $(B, *, \tilde{e})$ monoidokat, Az $h: A \rightarrow B$ függvényt a két monoid között értelmezett *homomorfizmusnak* nevezzük, ha teljesülnek a köv. feltételek:

$$\begin{cases} h(x \circ y) = h(x) * h(y), \text{ minden } x, y \in A\text{-ra;} \\ h(e) = \tilde{e}. \end{cases}$$

Példák. 1) Tekintsük a $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, h(z) = |z|$ leképezést a $(\mathbb{C}, \cdot, 1)$ és az $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ szám-monoidok között.

Mivel $h(z_1 \cdot z_2) = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = h(z_1) \cdot h(z_2)$ minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ -re és $h(1) = |1| = 1$, ezért h egy homomorfizmus a két monoid között.

2) Tekintsük most a $(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$ szómonoidot, az $(\mathbb{N}, +, 0)$ szám-monoidot és a $h: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}, h(w) = |w|, w \in \Sigma^*$ függvényt, ahol $|w|$ a $w \in \Sigma^*$ szó hosszát jelenti. Ez a függvény is egy monoid homomorfizmus mert

$$\begin{aligned} h(w_1 \cdot w_2) &= |w_1 \cdot w_2| = |w_1| + |w_2| = h(w_1) + h(w_2) \text{ és} \\ h(\varepsilon) &= |\varepsilon| = 0. \end{aligned}$$

Megjegyzés 1. Teljes indukcióval igazolható hogy tetszőleges $h: A \rightarrow B$ monoid homomorfizmus esetén

$$\begin{aligned} h(x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n) &= h(x_1) * h(x_2) * \dots * h(x_n) \text{ és} \\ h(x^n) &= h(x)^n, \end{aligned}$$

ahol a hatványt a baloldalon a $\circ$, a jobboldalon a $*$ műveletre nézve értjük.

Megjegyzés 2. Ha Σ és Δ ábécék és $h: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ egy homomorfizmus a nekik megfelelő szómonoidok között, akkor elegendő h értékeit Σ betűire megadni.

Valóban, akkor minden ε -től különböző $w \in \Sigma^*$ szó felírható $w = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ alakban, így a Megjegyzés 1 értelmében a $h(w) = h(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = h(x_1) \cdot h(x_2) \cdot \dots \cdot h(x_n) \in \Delta^*$ szó a $h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n)$ értékekből egyértelmű módon megkapható.

Nyelv homomorf képe és inverz homomorf képe

Legyen most $h: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ egy homomorfizmus a $(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$ és a $(\Delta^*, \cdot, \varepsilon)$ monoidok között és $L_0 \subseteq \Sigma^*, L \subseteq \Delta^*$ egy-egy nyelv. Akkor a

$$h(L_0) := \{h(w) \mid w \in \Sigma^*\} \subseteq \Delta^*$$

szóhalmazt az L_0 nyelv *homomorf képének* nevezzük, míg a

$$h^{-1}(L) := \{w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L\}$$

szóhalmazt az L nyelv *inverz homomorf képének* nevezzük.

Példák. 1) Legyen $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Delta = \{a, b\}$ és adjuk meg a $h: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ homorfizmust Σ betűin a köv. képpen:

$$\begin{cases} h(0) = aa, \\ h(1) = bb. \end{cases}$$

Akkor a $w = 010$ szó esetén $h(w) = h(0)h(1)h(0) = aabbaa$. Tekintsük most az $L_0 = \{01^n \mid n \geq 1\}$ nyelvet. Akkor

$$h(L_0) = \{h(01^n) \mid n \geq 1\} = \{h(0)h(1)^n \mid n \geq 1\} = \{aa(bb)^n \mid n \geq 1\} = \{a^2b^{2n} \mid n \geq 1\}.$$

Tekintsük most az $L = \{a^{2n}b^{2n} \mid n \geq 1\} \subseteq \Delta^*$ nyelvet. Akkor

$$h^{-1}(L) = \{w \in (0+1)^* \mid h(w) = a^{2n}b^{2n}, n \geq 1\} =$$

$$\{w \in (0+1)^* \mid h(w) = h(0)^n h(1)^n, n \geq 1\} =$$

$$\{w \in (0+1)^* \mid h(w) = h(0^n 1^n), n \geq 1\}. \text{ Mivel } h \text{ egyértelmű (injektív) leképezés, ezért } h^{-1}(L) = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}.$$

A későbbiekben bizonyítani fogjuk:

Állítás 1. Legyen $h: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ egy monoid homorfizmus. Ha $L \subseteq \Sigma^*$ egy reguláris nyelv, akkor $h(L)$ is egy reguláris nyelv. Ha $L' \subseteq \Delta^*$ egy reguláris nyelv, akkor $h^{-1}(L')$ is egy reguláris nyelv.

Behelyettesítés fogalma

Tekintsük most a Σ ábécé feletti reguláris kifejezések $\text{reg}(\Sigma)$ halmazát. Mivel minden $r, s \in \text{reg}(\Sigma)$ esetén $r \cdot s \in \text{reg}(\Sigma)$ és ε is egy reguláris kifejezés, ezért $(\text{reg}(\Sigma), \cdot)$ egy monoid.

Definíció 1. Ha Σ és Δ ábécék, akkor egy $s: \Sigma^* \rightarrow \text{reg}(\Delta)$ homomorfizmust *behelyettesítésnek* nevezzük.

Tehát ha s behelyettesítés, akkor

$$1) s(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$2) h(w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n) = h(w_1) \cdot h(w_2) \cdot \dots \cdot h(w_n), \text{ minden } w_1, w_2, \dots, w_n \in \Sigma^* \text{-ra.}$$

A fentiek alapján az is elmondható, hogy a homomorfizmusok speciális behelyettesítéseknek tekinthetők, mégpedig olyan s behelyettesítéseknek amelyek esetén minden $a \in \Sigma^*$ -ra, $s(a) \in \Delta^*$. (betűsorozat, vagy üres szó).

Példa 2. -behelyettesítésre: $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Delta = \{a, b\}$, $s: \Sigma^* \rightarrow \text{reg}\{a, b\}$,

$$\begin{cases} s(0) = a; \\ s(1) = b^*. \end{cases} \text{ Akkor a } w = 010 \text{ szó esetén:}$$

$$s(w) = s(0)s(1)s(0) = ab^*a \text{ egy reguláris kifejezés } \Delta \text{ felett.}$$

Jelölje a továbbiakban L_r az r reguláris kifejezéshez tartozó nyelvet, pl.:

$$L_{0^*} := \{0^n \mid n \geq 0\}.$$

Ha $s: \Sigma^* \rightarrow \text{reg}(\Delta)$ egy behelyettesítés, akkor jelöljük $L_{s(w)}$ -vel az $s(w)$ reguláris kifejezéshez tartozó Δ feletti nyelvet. Most egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv $s: \Sigma^* \rightarrow \text{reg}(\Delta)$ behelyettesítésre vonatkozó képét így értelmezhetjük:

$$s(L) := \bigcup_{w \in L} L_{s(w)}$$

A jobboldal általakában végtelen tagból áll és az eredmény nyilván Δ^* egy részhalmaza, vagyis egy Δ feletti nyelv.