

Automaták és Formális nyelvek

II. előadás

1. Szómonoid

Definíció 1. Legyen S egy nem üres halmaz, $*$ pedig egy S -en értelmezett művelet. $(S, *)$ algebrai struktúrát félcsoporthnak nevezzük ha $*$ egy ún. asszociatív belső művelet az S halmazon, azaz ha teljesülnek az

- | | |
|---|-----------|
| 1) $x*y \in S$, minden $x, y \in S$ -re | } axiómák |
| 2) $(x*y)*z = x*(y*z)$ minden $x, y, z \in S$ -re | |

Megj. Szorzatok írásakor elhagyhatók a zárójelek, pl $x*y*x*z*y$, illetve tetszés szerint "zárójelezhetünk".

Definíció 2. (i) Az $e \in S$ elemet az S félcsoporth semleges elemének nevezzük, ha minden $x \in S$ -re: $x*e = e*x = x$.

(ii) A semleges elemet tartalmazó félcsoporthokat monoidoknak nevezzük.

Megj. Tudjuk, hogy egy $(S, *)$ félcsoporthnak legfeljebb 1 semleges eleme lehet; az $(S, *)$ monoid pontosan egy semleges eleme van.

Pl.: $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ félcsoporthok.

$T(A) = \{f: A \rightarrow A \mid f \text{ függvény}\}$ félcsoporth a függvények "o"-val jelölt összetevésére, mint műveletre nézve.

$(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ monoidok semleges elemük 1, $(T(A), \circ)$ monoid, semleges eleme $1_A: A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$ identikus függvény. $(\mathbb{N}, +)$ esetén $+$ -nak 0 lenne a semleges eleme, de $0 \notin \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ - így nem monoid. Ha $x*y = y*x$ minden $x, y \in S$ -re akkor $(S, *)$ -ot kommutatív félcsoporthnak vagy monoidnak nevezzük: az első 3 példa kommutatív félcsoporth $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ kommutatív monoidok, de $(T(A), \circ)$ nem kommutatív monoid mert a függvényösszetevés általában nem kommutatív.

Jelölések bevezetése és egy példa nem kommutatív monoidra

Legyen $\Sigma \in \{a, b, c, d, \dots\}$ egy ábécé, Σ -elemeiből "szavaknak" nevezett jelsorozatokat képezhetünk, ahogy azt előző előadáson is láthattuk pl.: aabcd, aadee, bbb, a, e, ... stb. E szavak összességét Σ^+ -al jelöljük.

Bevezetjük az üres szó, ε fogalmát, amit olyan szónak tekintünk amiben a betűk száma 0. Legyen $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$.

Σ^* -on mint műveletet értelmezzük a szavak egymásután írásával való összekapcsolását (konkatenációját) pl, ha $\omega_1 = abcd \in \Sigma^*$ és $\omega_2 = bcaaed$, akkor $\omega_1 \cdot \omega_2 = abcd bcaaed$ Azonnal belátható, hogy az így kapott "·" művelet asszociatív, de nem kommutatív, mi több $(\Sigma^*, \cdot)$ egy nem kommutatív monoid, melynek semleges eleme ε .

2. Jelölések és számítási szabályok

Legyen $(S, \cdot)$ egy multiplikatívan jelölt monoid aminek semleges eleme $e \in S$
Bevezetjük az

$$x^0 = e, x^1 = x, \quad \underbrace{x^n = x \star x \star \dots \star x}_{n\text{-szer}} \quad \text{jelöléseket ahol } n \geq 1.$$

Akkor teljesülnek az alábbi szabályok:

$$x^n \star x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^p = x^{n \cdot p}$$

Bevezetjük meg egy $a \in \Sigma$ betű esetében az $a^* = \{\varepsilon, a, a^2, \dots, a^n, \dots\}$ jelölést.

Pl. $\omega = aaabb = a^3b^2$ alakban írható.

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ részhalmazt nyelvnek nevezzük.

3. Műveletek nyelvekkel

Legyen $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$ egy véges ábécé. Egy L nyelv nem más mint Σ^* egy részhalmaza: $L \subseteq \Sigma^*$ (általában ∞ halmaz de lehet $\emptyset$ is) Két nyelv esetén beszélhetünk uniójukról: $L_1 \cup L_2$ - ez a szóhalmazok uniója

- szorzatukról: $L_1 \cdot L_2 = \{vw \mid v \in L_1, w \in L_2\}$ Pl: $\{car, di\} \cdot \{d, e, ve\} = \{card, did, care, die, care, dive\}$

$$L_1 = \{10, 1\}, L_2 = \{011, 11\} \quad L_1 \cdot L_2 = \{10011, 1011, 1011, 111\}$$

- Egy L nyelv nem negatív hatványairól $\underbrace{L^n := L \cdot L \cdot \dots \cdot L}_{n\text{-szer}}, L^0 = \{\varepsilon\}$

$$\text{Pl: } L = \{01\}, \quad \underbrace{L^5 = \{0101010101\}}_{5\text{-ször}}$$

$$\text{Értelmezhetjük még } L^+ := L \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots \cup L^n \cup \dots$$

$$L^* := \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots \cup L^n \cup \dots = \{\varepsilon\} \cup L^+$$

$$\text{Pl: } \{0, 1\}^* = \{\varepsilon, 0, 11, 011, 110, 1111, 000, 0011, 01111, \dots\}$$

4. A δ tranzíciós függvény kiterjesztése a Σ^* számonoidra

Legyen $A = (Q, \Sigma, \omega, q_0, F)$ egy véges determinisztikus automata.

Figyeljük meg a viselkedését, hogy nemcsak egy q_i állapot és egy $a \in \Sigma$ jel határozza meg egyértelműen a következő állapotot, hanem egy q_i állapot és egy $\delta = a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma^*$ szó is.

Hogy az automata működését egyszerűbben leírassuk, terjesszük ki a $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ függvényt egy $\bar{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ függvényre a következő rekurzív előírással:

$$\bar{\delta}(q, \varepsilon) = q$$

$$\bar{\delta}(q, a) = \delta(q, a) \text{ minden } a \in \Sigma \text{ betűre és minden } q \in Q \text{ állapotra.}$$

Ha $\omega \in \Sigma^*$ egy szó és $a \in \Sigma$ egy betű akkor

$$\bar{\delta}(q, \omega a) = \delta(\bar{\delta}(q, \omega), a).$$

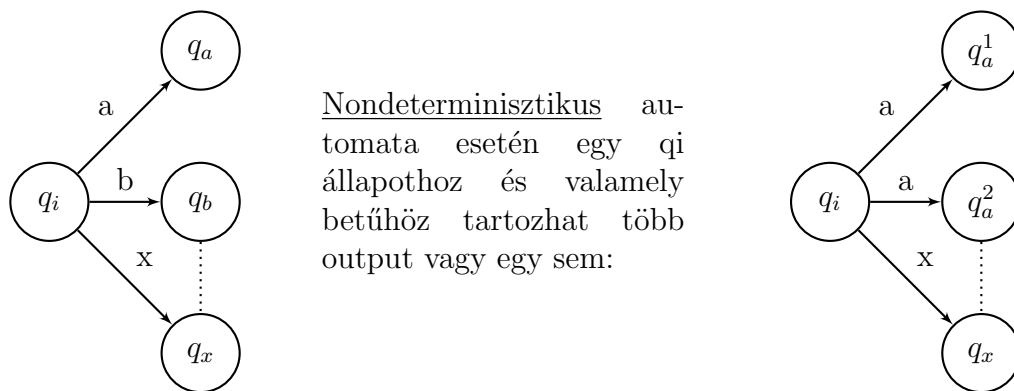
Így tulajdonképpen $\omega = a_1, a_2, \dots, a_n$ esetén

$$\delta: q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} q_3 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_n} q_n \text{ akkor } \bar{\delta}: q_1 \rightarrow q_n$$

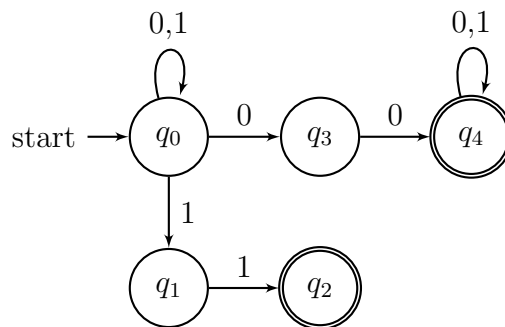
$$\text{Ezért } \delta(q, \omega a) \in F \iff \bar{\delta}(q_0, \omega) \in F.$$

5. Nondeterminisztikus véges automata (NFA)

A determinisztikus véges automatáknál azt láttuk, hogy egy $q_i \in Q$ állapotban minden (Σ) -beli betűhöz pontosan egy output tartozhat, azaz

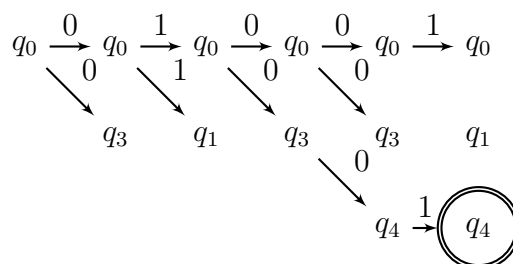


Például tekintsük az alábbi véges automatát



Itt pl. q_0 -ból egy 0-s és két 1-es output is kiindul, míg q_1 -ből vagy q_3 -ből csak az egyik jel indul ki, a másik nem (Pl. q_3 -ban nincs 1-es output).

Működése: Ezt a $\omega = 01001$ szó esetén az alábbi tranzíciós diagrammal szemléltetjük:



A diagramot A egy ún. "tranzíciós fájának" is nevezzük.

Az NFA matematikai modellje

Egy $NA=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ "ötös", akárcsak a DFA esetén, ahol azonban

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow P(Q), (q_i, a) \xrightarrow{\delta} \{q_1, q_2, \dots, q_x\}$$

Látható, hogy a δ tranzíciós függvényben van a különbség, amely minden (q_i, a) párnak nem egy új állapotot, hanem új állapotok egy halmazát felelteti meg. Ez lehet üres is vagy többelemű, pl.: $\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}$, $\delta(q_1, 0) = \emptyset$

Itt is megadhatjuk a δ tranzíciós függvényt egy táblázattal, azonban ennek értékei nem állapotok, hanem állapothalmazok lesznek:

δ_1	0	1	Akkor mondjuk hogy az NFA elfogadja a $\omega = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$ szót, ha $\delta: \{q_0\} \xrightarrow{a_1} \{y_1, \dots, y_n\} \xrightarrow{a_2} \{z_1, \dots, z_p\} \rightarrow \dots \xrightarrow{a_n} \{t_1, \dots, t_s\}$ tranzíciósorozat olyan $\{t_1, \dots, t_s\}$ halmazhoz vezet ami tartalmaz legalább egy F-beli elemet (végállapotot).
q_0	$[q_0, q_3]$	$[q_0, q_1]$	
q_1	$\emptyset$	$[q_2]$	
q_2	$[q_2]$	$[q_2]$	
q_3	$[q_4]$	$\emptyset$	
q_4	$[q_4]$	$[q_4]$	

Az automata nyelve alatt is az általa elfogadott szavak összességét értjük.

6. A DFA és az NFA ekvivalenciája

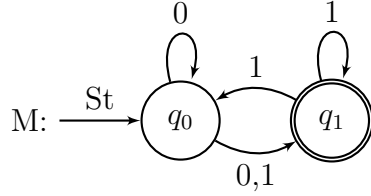
Két automatát A_1 -et és A_2 -t ekvivalensnek nevezünk, ha ugyanazt a nyelvet fogadják el, azaz ha $\mathcal{L}(A_1) = \mathcal{L}(A_2)$.

Legyen $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy nondeterminisztikus véges automata és jelöljük az általa elfogadott nyelvet $\mathcal{L}(M)$ -el. M-ből kiindulva szerkesztünk egy A véges determinisztikus automatát, amely ugyanazt a nyelvet fogadja el. $A = (P(Q), \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$, ahol A állapotai Q részhalmazai, $F' := Q$ minden részhalmazainak az összessége, amelyet tartalmaznak legalább egy F-beli elemet és

$$\begin{aligned} \delta': P(Q) \times \Sigma &\rightarrow P(Q), \text{ úgy hogy} \\ \delta'(\{q_1, q_2, \dots, q_k\}) &= \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) \cup \dots \cup \delta(q_k, a), \\ \text{azaz } \delta'(\{q_1, q_2, \dots, q_k\}, a) &= \bigcup_{i=1}^k \delta(q_i, a) \end{aligned}$$

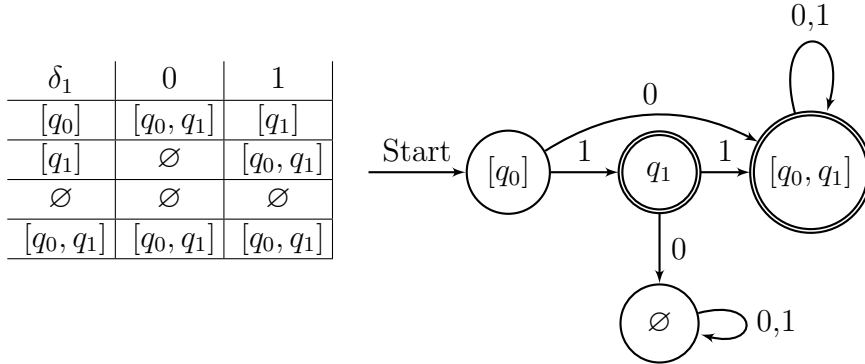
Ez azt jelenti, hogy a $B, C \in P(Q)$ részhalmazokra $B \xrightarrow{a} C$ pontosan akkor teljesül, ha C a B halmazok a δ függvény által kapott képe az a jel esetén: $C = \{\delta(b) \mid b \in B\} = \delta(B)$.

Vizsgáljuk meg az A automata szerkesztését az alábbi példa esetén:



Ekkor $M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$ és $\delta(q_0, 0)=[q_0, q_1]$, $\delta(q_0, 1)=[q_1]$, $\delta(q_1, 0)=\emptyset$, $\delta(q_1, 1)=[q_0, q_1]$.

Az új, tehát az A automata állapotai $P(Q)$ elemei, azaz Q részhalmazai: $\emptyset, [q_0], [q_1], [q_0, q_1]$. Az új δ' tranzíciós függvényt a következő táblázattal adhatjuk meg:



Tétel: Az A determinisztikus automata és az M nondeterminisztikus automata által elfogadott nyelv egy és ugyanaz $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(M)$.

Biz.: Tegyük fel, hogy A automata elfogadja a $\omega = x_1 x_2 \dots x_n \in \Sigma^*$ szót (azaz $\omega \in \mathcal{L}(A)$) akkor létezik olyan $\{q_0\} \xrightarrow{x_1} B_1 \xrightarrow{x_2} B_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{x_n} B_F$ tranzíciós sorozat, hogy $B_1, B_2, \dots, B_F \subseteq Q$ és B_F olyan részhalmaz ami tartalmaz legalább egy F-beli elemet - jelöljük ezt q_f -el.

Azonban akkor $\delta(\{q_0\}, x_1) = B_1$, $\delta(B_1, x_2) = B_2, \dots, \delta(B_{F-1}, x_n) = B_F$, így az M nondeterminisztikus automata "működési elve" alapján B_F tartalmaz egy $q_f \in F$ végállapotot és ehhez kell létezzen egy olyan

$q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} q_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{x_n} \textcircled{q_f}$ tranzíciós sorozat

M tranzíciós fájában, hogy $q_1 \in B_1, q_2 \in B_2, \dots, q_f \in B_F$

Azonban egy ilyen tranzíciós útvonal megléte azt jelenti, hogy M elfogadja ω szót, vagyis $\omega \in \mathcal{L}(M)$.

Fordítva, legyen $\omega = x_1 x_2 \dots x_n \in \mathcal{L}(M)$; akkor az NFA tranzíciós fájában létezik egy olyan $q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} q_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{x_n} q_f$ útvonal, hogy $q_f \in F$. (ami végállapotban végződik)

Tekintsük most a

$$\{q_0\} \xrightarrow{x_1} \delta(q_0, x_1) \xrightarrow{x_2} \delta(\delta(q_0, x_1), x_2) \rightarrow \dots \overbrace{\delta(\delta(\dots(\delta(q_0, x_1), x_2) \dots x_n))}^W$$

akkor, $q_1 \in \delta(q_0, x_1)$, $q_2 \in \delta(\delta(q_0, x_1), x_2)$, $\dots, q_f$ pedig a halmazsorozat utolsó tagjának az eleme, azaz $q_f \in W$. De ez azt jelenti, hogy W az A automatának egy végállapota, a kapott tranzíció sorozat halmazai pedig A állapotai. Így az A automata is elfogadja a ω szót, azaz $\omega \in \mathcal{L}(A)$. Tehát $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(A)$

Végül vesszük, hogy az A automata valóban determinisztikus: hiszen egy állapotának, azaz Q egy részhalmazának bármely $a \in \sum$ jel hatására a Q pontosan egy részhalmazát - azaz A pontosan egy állapotát felelteti meg.

A tételben megmutattuk tehát, hogy az M nondeterminisztikus automata egy A determinisztikus automatával ekvivalens. Így minden nondeterminisztikus automata nyelvét egy determinisztikus automata is előállítja. A fordított állítás nyilvánvaló, hiszen minden determinisztikus véges automata egy sajátos nondeterminisztikus automata is egyben (ahol értékei mindig egyelemű halmazok), így a determinisztikus automaták nyelvei nondeterminisztikus automatáknak is nyelvei.

Az előbbiek értelmében a nondeterminisztikus automaták összessége és a determinisztikus automaták összessége ugyanazt a nyelvcsaládot állítja elő, ezért röviden azt mondhatjuk:

Következmény: A DFA-k és az NFA-k ekvivalensek.