

# Numerikus módszerek, optimalizálási eljárások

Dr. Házy Attila

2020. november 9.

# Tartalomjegyzék

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Nemlineáris egyenletek</b>                                 | <b>2</b>  |
| 1.1. Intervallumfelező módszer . . . . .                         | 3         |
| 1.2. A fixpont iterációs eljárás . . . . .                       | 5         |
| 1.3. Fixpont iteráció . . . . .                                  | 8         |
| 1.4. Húrmódszer . . . . .                                        | 9         |
| 1.5. Szelőmódszer . . . . .                                      | 10        |
| 1.6. A Newton-módszer . . . . .                                  | 11        |
| 1.7. Az érintő parabola-módszer . . . . .                        | 15        |
| <b>2. Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása</b>               | <b>16</b> |
| 2.1. Fixpont iterációs eljárás . . . . .                         | 16        |
| 2.2. A Newton-módszer . . . . .                                  | 17        |
| <b>3. Optimalizálás</b>                                          | <b>20</b> |
| 3.1. Konvexitás, kvázikonvexitás . . . . .                       | 20        |
| 3.2. Függvények szélsőértékei . . . . .                          | 24        |
| 3.3. Matematikai programozási (MP) feladat . . . . .             | 28        |
| 3.4. Lineáris programozási (LP) feladat . . . . .                | 29        |
| <b>4. Általános nemlineáris optimalizálási feladat</b>           | <b>30</b> |
| 4.1. Nemlineáris optimalizálási feladatok osztályozása . . . . . | 32        |
| 4.2. Egyenlőségi feltételek . . . . .                            | 33        |
| 4.3. Egyenlőtlenségi feltételek . . . . .                        | 38        |
| 4.4. A konvex optimalizálási feladat . . . . .                   | 42        |
| <b>5. Minimumkereső eljárások</b>                                | <b>45</b> |
| 5.1. Egyváltozós függvények kereső eljárásai . . . . .           | 45        |
| 5.1.1. Általános minimum kereső algoritmus . . . . .             | 46        |
| 5.1.2. Dichotomous keresés . . . . .                             | 47        |
| 5.1.3. Aranymetszéses keresés . . . . .                          | 48        |
| 5.1.4. Fibonacci keresés . . . . .                               | 50        |

|         |                                                                 |    |
|---------|-----------------------------------------------------------------|----|
| 5.1.5.  | Newton módszer . . . . .                                        | 54 |
| 5.2.    | Többsváltozós függvények kereső eljárásai . . . . .             | 56 |
| 5.2.1.  | A Newton-módszer . . . . .                                      | 56 |
| 5.2.2.  | Módosított Newton-módszer . . . . .                             | 59 |
| 5.2.3.  | A Gill-Murray algoritmus . . . . .                              | 59 |
| 5.2.4.  | A Levenberg-Marquardt módszer . . . . .                         | 60 |
| 5.2.5.  | Trust region módszerek . . . . .                                | 61 |
| 5.2.6.  | Kvázi-Newton módszerek . . . . .                                | 64 |
| 5.2.7.  | Broyden módszer . . . . .                                       | 65 |
| 5.2.8.  | BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) eljárás . . . . .       | 66 |
| 5.2.9.  | A vonalmenti minimalizálás algoritmus . . . . .                 | 66 |
| 5.2.10. | Armijo-Goldstein feltételek . . . . .                           | 67 |
| 5.3.    | Iránykeresési módszerek . . . . .                               | 67 |
| 5.3.1.  | Gradiens módszer (Cauchy módszer, 1847) . . . . .               | 68 |
| 5.3.2.  | Konjugált gradiens módszer (Fletcher, Reeves) . . . . .         | 69 |
| 5.3.3.  | Newton-módszer vonalmenti minimalizálással . . . . .            | 72 |
| 5.3.4.  | Módosított Newton-módszer vonalmenti minimalizálással . . . . . | 72 |
| 5.3.5.  | DFP (Davidon-Fletcher-Powell) eljárás . . . . .                 | 72 |
| 5.3.6.  | Hooke-Jeeves módszer . . . . .                                  | 75 |
| 5.4.    | A büntetőfüggvény módszerek . . . . .                           | 76 |

## 6. Feladatok 83

# 1. fejezet

## Nemlineáris egyenletek

Nemlineáris egyenletek

Az

$$f(x) = 0 \quad (f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}),$$

alakú egyváltozós egyenletek, illetve az

$$F(x) = 0 \quad (F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 2),$$

alakú többváltozós egyenletrendszer közelítő megoldási módszereit vizsgáljuk. Az egyenlet (egyenletrendszer) pontos megoldását következetesen  $x^*$ -gal jelöljük;  $x^* \in \mathbb{R}$  (illetve  $x^* \in \mathbb{R}^n$ ).

Direkt módszerek, tehát amelyek véges sok lépés után legalább elméletileg adnák  $x^*$ -ot, itt még egyváltozós esetben sem igen konstruálhatók.

A gyakorlatban mindig elegendő tudni egy elméleti eredmény többé-kevésbé pontos közelítését, így az iterációs eljárások a legtöbb esetben szóba jöhetnek.

Egy-egy módszer csak speciális esetben alkalmazható. Különösen így van ez a nemlineáris egyenleteknél, egyenletrendszereknél. Nincs univerzális eljárás, ami minden egyenletnél megfelelő pontosságú közelítést garantálna és különösen nincs olyan, ami mindezt elég gyorsan is tenné.

A továbbiakban minden esetben feltételezzük, hogy az  $f$  függvény folytonos. A konvergenciát garantáló feltételek között azonban többnyire még szigorúbb, differenciálhatósági megkötések is szerepelnek.

Az  $f(x) = 0$  ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) alakú valós egyenletek megoldási módszerei egy, az  $x^*$  megoldáshoz konvergáló  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$  sorozatot képeznek.

## 1.1. Intervallumfelező módszer

Tegyük fel, hogy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos az  $[a, b]$  intervallumon és a végpontokban ellentétes a függvény előjele, azaz fennáll, hogy

$$(1.1) \quad f(a)f(b) < 0.$$

Ismert tétel, hogy zárt intervallumban folytonos függvénynek van az intervallumon legnagyobb és legkisebb értéke, továbbá a függvény e két szám közötti valamennyi értéket felvesz az intervallumban. Ebből azonnal következik, hogy az  $f(x) = 0$  egyenletnek van legalább egy  $x^* \in (a, b)$  gyöke.

Az intervallumfelező eljárás (amit szoktunk röviden csak felező eljárásnak is nevezni) lényege a nevében benne van. Az intervallum középpontja két részre, két félintervallumra osztja az eredeti intervallumot. Megnézzük, hogy közülük melyikben teljesül (1.1) és ott folytatjuk. Kicsit pontosabban megfogalmazva: legyen  $c = (a + b) / 2$  és vizsgáljuk az  $f(c)$  értékét. Ha annak előjele az  $a$ -beli előjellel ellentétes, azaz  $f(a) \cdot f(c) < 0$ , akkor az  $[a, c]$  intervallumban van gyök. Egyébként a  $[c, b]$  intervallum tartalmaz gyököt. Az új intervallumot újra megfelezzük és így tovább.

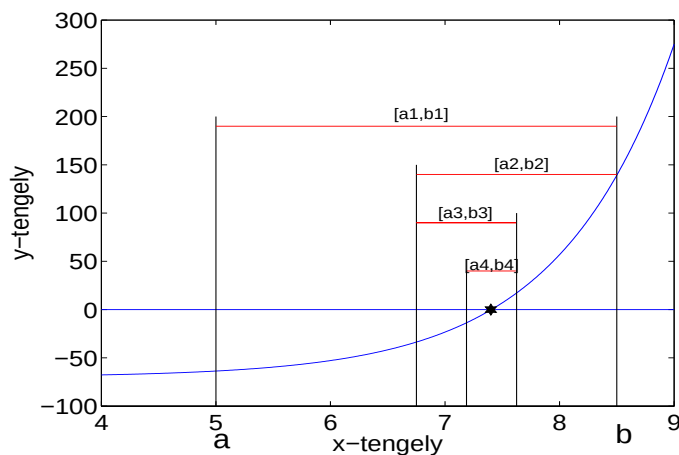
Az egymásba skatulyázott

$$[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots [a_k, b_k] \supset \dots,$$

zárt intervallumok ráhúzódnak az egyenlet egy  $x^*$  gyökére. Más formában is megadva:  $[a_1, b_1] = [a, b]$ ,  $c_i = (a_i + b_i) / 2$ ,

$$[a_{i+1}, b_{i+1}] = \begin{cases} [a_i, c_i], & \text{ha } f(a_i) \cdot f(c_i) < 0 \\ (c_i, b_i], & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol  $i = 1, 2, \dots$



Az is nyilvánvaló, hogy az  $i$ -edik intervallum hossza:  $(b_i - a_i) = (b_{i-1} - a_{i-1})/2 = (b - a)/2^{i-1}$  szigorúan monoton csökkenő mértani sorozat és az  $x^*$  gyököt az  $[a_i, b_i]$  intervallum tetszőleges  $y$  pontjával közelíthetjük. Az  $y$  közelítés hibája legfeljebb a két végponttól mért nagyobbik távolság lehet, azaz fennáll, hogy

$$|x^* - y| \leq \max\{y - a_i, b_i - y\}.$$

A  $\max\{y - a_i, b_i - y\}$  korlát akkor a legkisebb, ha  $y = \frac{a_i + b_i}{2}$ . Ezért az  $x^*$  gyök  $i$ -edik közelítéseként általában az  $x_i = (a_i + b_i)/2$  felezőpontot használjuk. Az intervallumok hosszára tett megállapításból így egzakt hibabecslés is adódik:

$$(1.2) \quad |x^* - x_i| \leq \frac{b_i - a_i}{2} = \frac{b - a}{2^i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Az algoritmust tehát akkor állítjuk le, ha a közelítés hibája kisebb, mint egy előre megadott  $\varepsilon > 0$  hibakorlát. Ezért az intervallumfelező eljárás gyakorlati formája a következő.

**Az intervallumfelező eljárás algoritmus:**

```

INPUT  $[a, b], \varepsilon (\varepsilon > 0)$ .
1  Legyen  $f a = f(a)$ 
2  WHILE  $b - a > 2\varepsilon$ 
3       $x = (a + b)/2$ 
4      IF  $f a * f(x) < 0$ 
5          THEN  $b = x$ 
6          ELSE  $a = x$ 
7   $x = (a + b)/2$ 
```

**1.1. Tétel.** Ha  $f \in C[a, b]$  és  $f(a)f(b) < 0$ , akkor az az intervallumfelező eljárás során kapott  $\{x_i\}$  sorozat konvergál az  $f$  valamely  $[a, b]$ -beli gyökéhez és érvényes az (1.2) hibabecslés.

Ha az  $[a, b]$  intervallum több gyököt is tartalmaz, az  $\{x_i\}$  sorozat közülük egyikhez konvergál.

Az intervallumfelező módszer legnagyobb előnye, hogy nagyon enyhe (mondhatni, hogy csak a gyakorlatban szinte kötelezően elvárt) feltételek mellett biztosítja a megoldáshoz való konvergenciát. Előnye még az egyszerűsége is. Ugyanakkor hátránya a lassú konvergencia. A hibát a (1.2) szerint egy konvergens mértani sorozattal tudjuk becsülni. Az  $x_i$  hibakorlátja  $x_{i-1}$  hibájának a fele, így a konvergenciája lineáris vagy másképpen elsőrendű.

**1.1. Példa.** Oldjuk meg intervallumfelező eljárással az  $f(x) = 4 - 4x^2 - e^x = 0$  egyenletet az  $[a, b] = [0, 1]$  intervallumon  $\delta x_i = \varepsilon = 10^{-6}$  hibakorlattal.

**Megoldás.** Az  $f$  függvény nyilvánvalóan folytonos, továbbá  $f(a) = fa = f(0) = 3$  és  $f(b) = f(1) = -e$  ellentétes előjelű, ezért alkalmazható a felező módszer. A  $b - a = 1$  hosszú intervallumból indulva (1.2) alapján az  $1/2^i \leq 10^{-6}$  egyenlőtlenségből  $i \geq -\log \varepsilon / \log 2 \approx 19.93$ , azaz  $i = 20$  lépés szükséges. A lépéseket táblázatba foglaltuk, bekeretezve a végeredményt:

| $i$      | $[a, b]$      | $x$                                                                  | $\delta x$            | $f(x) \approx$ |                     |
|----------|---------------|----------------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------|---------------------|
| 1        | $[0, 1]$      | 0.5                                                                  | 0.5                   | 1.35           | $\rightarrow a = x$ |
| 2        | $[0.5, 1]$    | 0.75                                                                 | 0.25                  | -0.4           | $\rightarrow b = x$ |
| 3        | $[0.5, 0.75]$ | 0.625                                                                | 0.125                 | 0.57           | $\rightarrow a = x$ |
| $\vdots$ |               | $\vdots$                                                             | $\vdots$              |                |                     |
| 20       |               | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0.703439</span> | $0.95 \times 10^{-6}$ |                |                     |

## 1.2. A fixpont iterációs eljárás

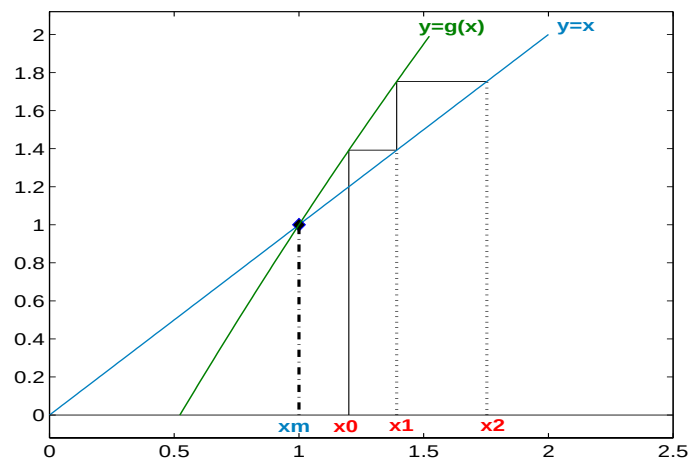
A módszert az  $f(x) = x - g(x) = 0$  alakú vagy ilyen alakra hozott egyenletek esetén alkalmazzuk. Az  $f(x) = 0$  egyenlet ekvivalens az

$$(1.3) \quad x = g(x)$$

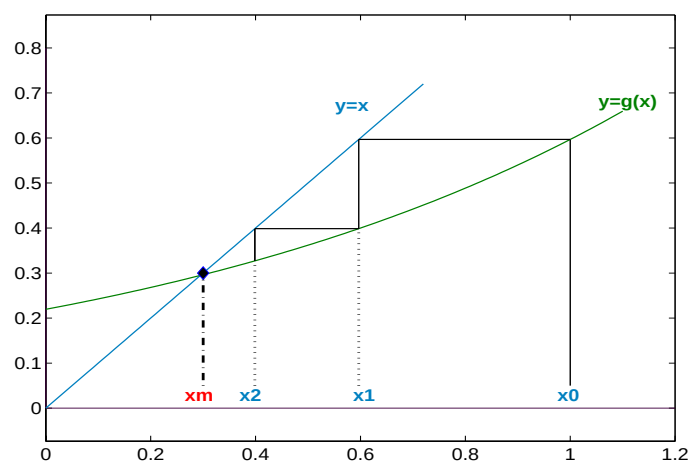
egyenlettel. A módszer elnevezésének az az alapja, hogy a megoldás egyben az  $x \rightarrow g(x)$  leképezés fixpontja: a leképezés során helyben maradó pont. Választunk tehát egy  $x_0$  kezdeti értéket, majd képezzük az

$$(1.4) \quad x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \dots, \quad x_{k+1} = g(x_k), \dots$$

sorozatot. Azt reméljük, hogy a sorozat az egyenlet  $x^*$  megoldásához (a leképezés fixpontjához) konvergál. További lényeges kérdés, hogy az iterációt az  $i$ -edik lépésben megállítva, legfeljebb mekkora távolságra vagyunk a megoldástól. A következő két ábrán geometriai szemléltetését adjuk az eljárásnak, ami önmagában is igazolja, hogy a fixpont akár egyértelmű létezése sem ad garanciát a konvergenciára.



A fixpont iterációs eljárás vonzó gyök:

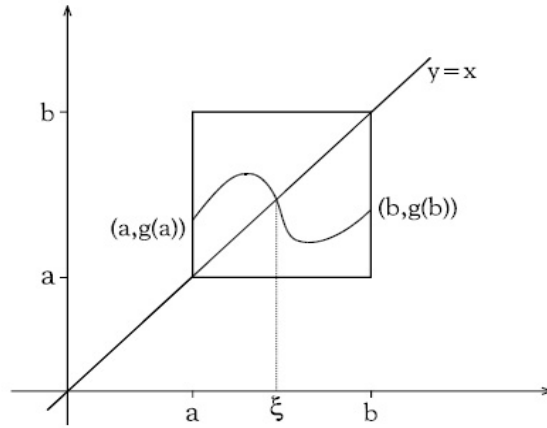


**1.2. Tétel.** Ha  $g \in C[a, b]$  és  $a \leq g(x) \leq b$  minden  $x \in [a, b]$  esetén, akkor a  $g(x)$  függvénynek az  $[a, b]$  intervallumon van fixpontja.

*Bizonyítás.* Feltehetjük, hogy  $g(a) > a$  és  $g(b) < b$ . (Egyenlőség esetén maga az  $a$ , illetve  $b$  fixpont lenne.) Legyen  $h(x) = g(x) - x$ . Ekkor  $h(x)$  folytonos  $[a, b]$ -n,  $h(a) > 0$  és  $h(b) < 0$ . Ezért a  $h(x)$  függvénynek van  $\xi \in (a, b)$  gyöke, azaz  $h(\xi) = g(\xi) - \xi = 0$ .  $\square$

A fixpont iterációs eljárás vonzó gyök:





**1.1. Definíció.** A  $g \in C[a, b]$  függvény kontrakció az  $[a, b]$  intervallumon, ha létezik  $0 \leq q < 1$  úgy, hogy

$$|g(x) - g(y)| \leq q|x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

**1.2. Példa.** A  $g(x) = x^2$  függvény kontrakció a  $[0, \frac{1}{4}]$  intervallumon, de a  $[0, 1]$  intervallumon már nem az.

$$|x^2 - y^2| = \underbrace{|x + y|}_{\leq 1/2} |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y|, \quad x, y \in \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

legyen például  $x, y \in [\frac{3}{4}, 1]$ , de  $x \neq y$  Két ily módon választott szám ellenpéldát ad, ugyanis

$$|x^2 - y^2| = \underbrace{|x + y|}_{\geq 3/2} |x - y| \geq \frac{3}{2} |x - y| > |x - y| \quad (x \neq y)$$

**1.3. Tétel.** Banach-féle fixponttétel

Ha  $g \in C[a, b]$ ,  $a \leq g(x) \leq b$  ( $x \in [a, b]$ ) és  $g(x)$  kontrakció  $[a, b]$ -n, akkor pontosan egy fixpont létezik  $[a, b]$ -ben.

**1.4. Tétel.** Legyen  $g \in C[a, b]$  Ha teljesülnek a következők:

(i)  $a \leq g(x) \leq b$  minden  $x \in [a, b]$  esetén,

(ii) az  $x \rightarrow g(x)$  kontrakció  $[a, b]$ -n  $q$  kontrakciós tényezővel,

akkor az (1.3) egyenletnek pontosan egy megoldása van  $[a, b]$ -n és az (1.4) sorozat minden  $x_0 \in [a, b]$  esetén az egyenlet egyetlen  $x^*$  megoldásához konvergál. Érvényes továbbá az alábbi hibabecslés:

$$(1.5) \quad |x^* - x_k| \leq \frac{q}{1 - q} |x_k - x_{k-1}| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

## 1.3. Fixpont iteráció

**1.5. Tétel.** Ha a  $g$  függvényre teljesülnek a következők:

(i)  $g \in C^1[a, b]$  (azaz folytonosan differenciálható  $[a, b]$ -n),

(ii)  $\max_{x \in [a, b]} |g'(x)| = q < 1$ ,

akkor az  $x \rightarrow g(x)$  kontrakció  $[a, b]$ -n  $q$  kontrakciós tényezővel.

*Bizonyítás.* Ha  $x, y \in [a, b]$ , akkor a differenciálszámítás Lagrange-féle középértéktétele alapján létezik  $\xi \in [a, b]$ , hogy

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)(x - y)| = |g'(\xi)| |x - y| \leq q |x - y|.$$

□

**A fixpont iterációs eljárás algoritmusa:**

INPUT  $x_0, \varepsilon (\varepsilon > 0)$ .

1  $k = 1, \quad x_1 = g(x_0)$

2 **WHILE** kilépési feltétel=hamis

3  $x_{k+1} = g(x_k)$

4  $k = k + 1$

Az algoritmus költsége a felező eljáráshoz hasonló. Lépésenként itt is egy függvénykiértékelést kell végezni és ez határozza meg a költséget. Tárolni nem kell a sorozat minden elemét, elegendő mindig csak az utolsó kettőt. A kilépési feltételhez rendszerint ezekre szükség van, ezért is számítjuk ki még a ciklus előtt az  $x_1$ -et.

Kilépési feltételként a következőket szokás használni:

(A)  $\frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$  (egzakt hibabecslés)

(B)  $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$

(C)  $|x_k - g(x_k)| \leq \varepsilon$

Ha nem alkalmazhatjuk az egzakt kilépési feltételt, akkor nagyon körültekintően kell eljárni, mert a (B) és (C) egyidejű teljesülése sem garantálja, hogy valóban a gyök  $\varepsilon$  környezetében járunk, sőt, még a konvergenciát sem.

**1.3. Példa.** Oldjuk meg az  $f(x) = 4 - 4x^2 - e^x = 0$  egyenletet a  $[0, 1]$  intervallumon,  $\delta x_i = \varepsilon = 10^{-6}$  hibakorláttal, fixpont iterációs módszert alkalmazva. A számítások előtt igazoljuk a konvergenciát is.

**Megoldás:** Itt kísérletezhetünk az  $x^2$  egyik oldalra rendezésével és utána négyzetgyökvonással, hogy az alkalmas  $x = g(x)$  alakhoz jussunk. Kapjuk tehát az

$$x = g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - e^x}$$

egyenletet. (A négyzetgyökvonást pozitív előjellel végezzük mert pozitív gyökököt keresünk.)

A kapott  $g$  függvény folytonos, de az is azonnal látszik, hogy szigorúan monoton csökken a  $[0, 1]$ -en. (Ezt a derivált negatív volta mutatja.) Tehát a minimumát az intervallum végpontjában, a maximumát pedig a kezdőpontjában veszi fel. Igaz tehát a következő egyenlőtlenséglánc:

$$a = 0 \leq g(1) = 0.56606 \leq g(x) \leq g(0) = 0.86603 \leq 1 = b.$$

Ezzel a konvergencia tétel első feltételét beláttuk. (Vele együtt azt is, hogy az egyenletnek van gyöke a keresett helyen.) A kijelölt intervallumon a deriváltfüggvény, illetve az abszolút értéke:

$$|g'(x)| = \left| \frac{-e^x}{4\sqrt{4 - e^x}} \right| = \frac{e^x}{4\sqrt{4 - e^x}}.$$

A  $[0, 1]$  intervallumon ez folytonos. Ugyanakkor  $|g'(x)|$  szigorúan monoton növekvő, ezért maximumát az intervallum végpontjában veszi fel:

$$|g'(x)| \leq |g'(1)| = 0.60026 = q < 1.$$

Tehát fennáll a konvergenciatételünk (ii) feltétele is. Alkalmazhatjuk az (A) egzakt kilépési feltételt és mivel a hibabecsléshez szükséges  $\alpha = q/(1 - q) = 1.502$  a példára nézve állandó, ezt előre kiszámoltuk. Legyen az iteráció kezdő adata  $x_0 = 1 \in [a, b]$  A számítások részleteit itt is táblázatban foglaltuk össze, bekeretezve a végeredményt:

| $k$      | $x$                                                                  | $\delta x = \alpha  x_{k+1} - x_k $ |
|----------|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 0        | 1                                                                    |                                     |
| 1        | 0.566065                                                             | 0.65                                |
| 2        | 0.748111                                                             | 0.27                                |
| $\vdots$ | $\vdots$                                                             | $\vdots$                            |
| 14       | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0.703439</span> | $0.43 \times 10^{-6}$               |

## 1.4. Húrmódszer

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Ekkor  $(a, b)$ -ben van gyöke  $f$ -nek. Legyen  $x_0 = a, x_1 = b$ . Az  $x_k$  és  $x_s$  közelítések ismeretében (ahol  $f(x_k) \cdot$

$f(x_s) < 0$ ) az  $f$  függvényt közelítsük az  $(x_k, f(x_k))$  és  $(x_s, f(x_s))$  pontokon átmenő egyenessel. Az egyenes  $x$  tengellyel vett metszéspontja legyen  $x_{k+1}$ . A következő közelítésben szereplő  $s$  index legyen:

$$s = \begin{cases} k, & \text{ha } f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0 \\ s, & \text{ha } f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0 \end{cases}$$

Képlettel: legyen adott  $x_0, x_1$  úgy, hogy  $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ . Ekkor

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ahol  $s$  a legnagyobb index, melyre  $f(x_s) \cdot f(x_k) < 0$ .

### 1.6. Tétel. Ha

- (i)  $f \in C^2[a, b]$ ,
- (ii)  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,
- (iii)  $f'$  és  $f''$  állandó előjelű az  $[a, b]$  intervallumon,
- (iv)  $0 < m_1 \leq |f'|$ ,
- (v)  $|f''| \leq M_2 < \infty$

akkor a húrmódszer konvergens és a hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_k - x^*| \cdot |x_s - x^*| \quad (k \in \mathbb{N}).$$

## 1.5. Szelőmódszer

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, és tegyük fel, hogy  $(a, b)$ -ben van gyöke  $f$ -nek. Legyen  $x_0 = a, x_1 = b$ . Az  $x_{k-1}$  és  $x_k$  közelítések ismeretében az  $f$  függvényt közelítsük az  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$  és  $(x_k, f(x_k))$  pontokon átmenő egyenessel. Az egyenes  $x$  tengellyel vett metszéspontja legyen  $x_{k+1}$ . Képlettel: legyen adott  $x_0, x_1$  úgy, hogy  $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ . Ekkor

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

### 1.7. Tétel. Ha

- (i)  $f \in C^2[a, b]$ ,

(ii)  $f$ -nek létezik  $x^* \in (a, b)$  gyöke,

(iii)  $f'$  állandó előjelű az  $[a, b]$  intervallumon,

(iv)  $0 < m_1 \leq |f'|$ ,

(v)  $|f''| \leq M_2 < \infty$ ,

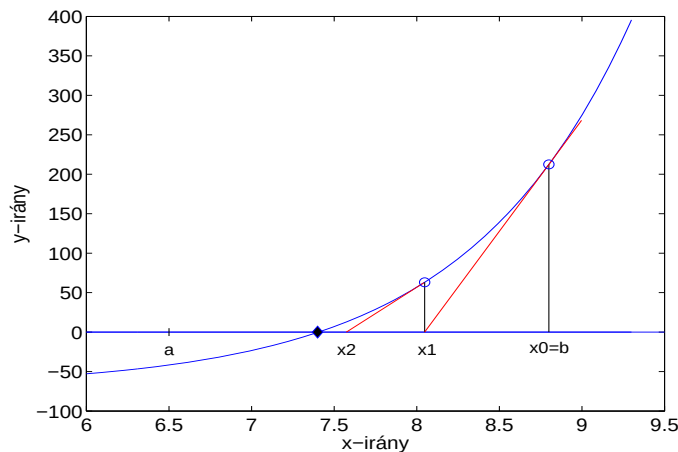
(vi) legyen  $x_0 \in [a, b]$  olyan, hogy  $|x_0 - x^*| < r = \min \left\{ \frac{2m_1}{M_2}, |a - x^*|, |b - x^*| \right\}$

akkor a megfelelő környezetből indított szelőmódszer konvergens és a konvergencia rendje  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . A hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_k - x^*| \cdot |x_{k-1} - x^*| \quad (k \in \mathbb{N}).$$

## 1.6. A Newton-módszer

A módszert szokás érintőmódszernek is nevezni. Tegyük fel, hogy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható. A módszer lényege, hogy az  $x_k$  pontban a függvényhez érintőt húzunk és ennek az érintőnek a zérushelye adja meg a keresett gyök  $(k+1)$ -edik közelítését, azaz  $x_{k+1}$ -et.



Az ábrán az előre felvett kezdeti  $x_0$  (ami gyakran a szóbanforgó intervallum valamelyik alkalmas végpontja) közelítést és további kettőt tüntettünk fel. Az érintő iránytangense a  $k$ -edik pontban  $f'(x_k)$  és egyenlete

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k).$$

Az  $y = 0$  helyen metszi az  $x$ -tengelyt; ezt behelyettesítve:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

feltéve, hogy  $f'(x_k) \neq 0$ .

Ehhez képlethez eljuthatunk egy kissé más érveléssel is. Nevezetesen  $f(x)$ -et linearizáljuk az  $x_k$  pontban, azaz közelítjük az elsőfokú Taylor-polinomjával:

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Ezután az  $f(x) = 0$  egyenletet helyettesítjük az

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

egyenlettel, amelynek gyöke közelíti az  $f(x) = 0$  egyenlet gyökét.

A Newton-módszer tehát a következő. Adott egy  $x_0 \in \mathbb{R}$  kezdeti közelítés és képezzük az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

sorozatot. A Newton-módszer konvergenciájára az alábbi tételt ismertetjük:

**1.8. Tétel.** *Ha az  $f$  függvényre teljesülnek a következők:*

- (i)  $f \in C^2[a, b]$  (kétszer folytonosan differenciálható  $[a, b]$ -n),
  - (ii)  $f'(x), f''(x) \neq 0$ , ha  $x \in [a, b]$  (állandó előjelűek),
  - (iii)  $f$ -nek van zérushelye  $(a, b)$ -n,
  - (iv)  $x_0 \in [a, b]$ , valamint teljesül, hogy  $f'(x_0)$  és  $f''(x_0)$  azonos előjelű,
- akkor az  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  sorozat konvergál az egyetlen  $[a, b]$ -beli  $x^*$  megoldáshoz. Érvényes továbbá az alábbi hibabecslés:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{M}{2m} (x_k - x_{k-1})^2,$$

ahol  $0 < m \leq |f'(x)|$  és  $M \geq |f''(x)|$ , azaz a deriváltak abszolút értékeinek alsó, illetve felső korlátjai  $[a, b]$ -n.

Ha az  $f$  függvényre teljesülnek a következők:

- (i)  $f \in C^2[a, b]$ ,
- (ii)  $f'(x), f''(x) \neq 0$ , ha  $x \in [a, b]$  (állandó előjelűek),
- (iii)  $f$ -nek van zérushelye  $(a, b)$ -n,

(iv)  $x_0 \in [a, b]$ , valamint teljesül, hogy  $f'(x_0)$  és  $f''(x_0)$  azonos előjelű

akkor az  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  sorozat konvergál az egyetlen  $[a, b]$ -beli  $x^*$  megoldáshoz. Érvényes továbbá az alábbi hibabecslés:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{M}{2m} (x_k - x_{k-1})^2,$$

ahol  $0 < m \leq |f'(x)|$  és  $M \geq |f''(x)|$ , azaz a deriváltak abszolút értékeinek alsó, illetve felső korlátjai  $[a, b]$ -n.

*Bizonyítás.* A zérushely egyedüli volta az  $f$  szigorú monotonitásából következik ( $f' \neq 0$ ). Az is világos, hogy ekkor az intervallum két végpontjában ellentétes az  $f$  előjele, következésképpen az egyik végpont mindig teljesíti a (iv) feltételt. Négy eset különböztethető meg, az  $f'(x)$ , és  $f''(x)$  előjeleitől függően. Mind a négyre hasonló a bizonyítás, ezért csak az ábrán is látható  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$  esetet mutatjuk meg. Ekkor az (iv) feltétel miatt  $f(x_0)$  is pozitív, az  $f'(x_0)$  pozitívítása és korlátossága miatt (zárt intervallumon folytonos függvény ott korlátos is) pedig  $x_1 < x_0$ .

Felírva a másodfokú, maradéktagos Taylor-polinomot

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\mu)}{2}(x_1 - x_0)^2 \quad (\mu \in [x_1, x_0]),$$

látható, hogy  $f$  az érintő fölött halad, így  $f(x_1) > 0$  is fennáll.

A második lépésben az  $x_1$  játsza az  $x_0$  szerepét, tehát  $x_2 < x_1$ , és így tovább. Az  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  sorozat monoton csökkenő tehát, de korlátos is, mert minden érintő az  $f$  alatt marad az intervallumban. Következésképp az  $x^*$  egy alsó korlát. Monoton korlátos sorozat konvergens is, legyen a határérték  $t$ . Vegyük az  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  sorozat mindkét oldalán a  $k \rightarrow \infty$  határátmenetet, a folytonosság miatt mindkét oldal határértéke ugyanaz a  $t$ , ami csak az  $f(t) = 0$  mellett lehetséges, azaz  $t = x^*$ . A megoldáshoz való konvergenciát ezzel beláttuk.

A hibabecsléshez írjuk fel az elsőfokú maradéktagos Taylor-polinomot az  $x^*$  pontban, a másodfokút pedig az  $x_k$ -ben:

$$f(x_{k+1}) = f(x^*) + f'(\xi)(x_{k+1} - x^*),$$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x_{k+1} - x_k)^2,$$

ahol  $\xi, \zeta \in [a, b]$ . A két egyenlet baloldala egyenlő, így a jobboldalukon álló kifejezések is.

A elsőben  $f(x^*) = 0$ , a másodikban  $f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$ , így

$$f'(\xi)(x_{k+1} - x^*) = \frac{f''(\zeta)}{2}(x_{k+1} - x_k)^2.$$

Vegyük mindkét oldal abszolút értékét,  $k$  helyett írjunk  $k - 1$ -et. Rendezzük át az egyenletet és vegyük figyelembe, hogy  $m$  az  $|f'(\xi)|$  alsó,  $M$  pedig az  $|f''(\zeta)|$  felső korlátja. Ezzel megkapjuk a hibabecslést.  $\square$

Ez a hibabecslés mutatja, hogy a konvergencia sebesség másodrendű (négyzetes). Az is egyszerűen belátható, hogy a  $k + 1$ -edik közelítés relatív hibája a  $k$ -adikénak a négyzete.

**A Newton-módszer algoritmus:**

INPUT  $x_0, \varepsilon (\varepsilon > 0)$ .

1  $k = 1, \quad x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

2 **WHILE** kilépési feltétel=hamis A kilépési feltételek hasonlóak le-

3  $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$

4  $k = k + 1$

hetnek, mint a fixpont iterációnál. Ha igazolni tudtuk a konvergenciát és becsülni az  $m, M$  értékeket, akkor az (A) egzakt hibabecslést végezhetünk, egyébként a (B) vagy/és a (C)-t (ez utóbbinál  $|f(x_k)| < \varepsilon$ ).

**1.4. Példa.** Oldjuk meg az  $f(x) = 4 - 4x^2 - e^x = 0$  egyenletet a  $[0, 1]$  intervallumon,  $\delta x_i = \varepsilon = 10^{-6}$  hibakorláttal, Newton-módszerrel. A számítások előtt igazoljuk a konvergenciát is.

**Megoldás:** Könnyen kiszámolható, hogy

$$f'(x) = -8x - e^x < 0 \quad \text{és} \quad f''(x) = -8 - e^x < 0.$$

Ezekből a deriváltakból azonnal látszik azok állandó előjele is az adott intervallumon; ezzel a konvergenciatétel első két feltételét igazoltuk.

Az  $f(0) = 3$  és  $f(1) = -e$  értékek ellentétes előjele egyben az (iii) feltétel teljesülését jelenti. Az  $x_0 = 1$  választással pedig az utolsó feltétel is fennáll. Van tehát egyedüli  $x^*$  megoldás a  $[0, 1]$ -n és az a Newton-módszerrel megközelíthető. Az egzakt hibabecsléshez szükséges konstansok is könnyen adódnak: mindkét derivált abszolút értéke szigorúan monoton nő, így az első a minimumát az  $a$  helyen, a második pedig a maximumát a  $b$  helyen veszi fel. Tehát  $m = |f'(0)| = 1$  és  $M = |f''(1)| = 10.72$ . Itt is előre kiszámolhatjuk a példára nézve állandó  $\beta = M/(2m) = 5.36$  értéket.

Az iterációk eredményeit itt is táblázatba foglaltuk.



| $i$ | $x$                                                         | $\delta x = \beta (x - x_{elozo})^2$ |
|-----|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 0   | 1                                                           |                                      |
| 1   | 0.74638828573                                               | 0.35                                 |
| 2   | 0.70459003270                                               | $0.94 \times 10^{-2}$                |
| 3   | 0.70344043705                                               | $0.71 \times 10^{-5}$                |
| 4   | <span style="border: 1px solid black;">0.70343957116</span> | $0.41 \times 10^{-11}$               |

## 1.7. Az érintő parabola-módszer

Ennél a módszernél az érintő egyenesek helyett érintő parabolákat használunk.

Legyen adott egy  $[a, b]$  intervallum, amelyben az  $f(x) = 0$  egyenletnek van gyöke. Tegyük fel, hogy  $f$  differenciálható  $[a, b]$ -n és  $f(b) > 0$ . (Ha nem teljesül, akkor a  $-f(x) = 0$  egyenletet oldjuk meg). A  $(b, f(b))$  pontba végtelen sok olyan érintőparabolát illeszthetünk, amely metszi az  $x$  tengelyt.

Ugyanis a

$$p(x) = f(b) + f'(b)(x - b) - M(x - b)^2, \quad M > 0$$

függvények bármelyikének a képe parabola, és  $f(b) = p(b)$ ,  $f'(b) = p'(b)$ . Az  $M > 0$  miatt az  $x$  tengelyt két pontban metszi mindegyik parabola.

Mivel az  $[a, b]$ -ben keresünk gyököt, ezért a baloldali metszéspontot vesszük figyelembe. A  $p(x) = 0$  egyenletből:

$$x = x_1 = b + \frac{f'(b)}{2M} - \frac{1}{2M} \sqrt{(f'(b))^2 + 4Mf(b)}.$$

Innen a módszer formulája ( $b$  helyére  $x_k$ -t,  $x_1$  helyére  $x_{k+1}$ -et írva):

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f'(x_k)}{2M} - \frac{1}{2M} \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4Mf(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A következő tétel megadja, hogy milyen  $M$  értékeket érdemes használni.

**1.9. Tétel.** Az  $f(x) = 0$  egyenlet esetén legyen  $f \in C^2[a, b]$ , legyen  $f(b) > 0$  és tegyük fel, hogy

$$M \geq \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Ekkor az  $x_0 = b$  választással a módszer konvergál a  $b$  ponthoz legközelebbi  $[a, b]$ -beli gyökhöz (ha az  $[a, b]$  intervallumban van gyök), ellenkező esetben véges sok lépés után  $x_k < a$ .

## 2. fejezet

# Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása

Az  $x = G(x)$  ( $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) és az  $F(x) = 0$  ( $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) alakú egyenletrendszerek közelítő megoldási módszerei közül említünk kettőt. Mindkettő a már egydimenzióban megismert valamelyik módszer kiterjesztése többdimenzióra.

### 2.1. Fixpont iterációs eljárás

Az  $x = G(x)$  egyenletrendszer fixpont iterációját tulajdonképpen már elmondtuk (a lineáris egyenletrendszereknél is és az egydimenziós eljárásoknál is). Ha a  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  zárt tartományra teljesül a

$$G(x) \in D, \quad x \in D$$

és valamilyen indukált normában a

$$\|G(x) - G(y)\| \leq q \|x - y\|, \quad x, y \in D \quad (0 \leq q < 1)$$

kontrakciós feltétel, akkor tetszőleges  $x^{(0)} \in D$  esetén az alábbi algoritmus lineáris sebességgel konvergál az  $x = G(x)$  egyenlet egyetlen megoldásához.

**A fixpont iteráció algoritmusa:**

- 1 Input  $x^{(0)}, \varepsilon > 0$ .
- 2  $k = 1, \quad x^{(1)} = G(x^{(0)})$
- 3 **WHILE** kilépési feltétel=hamis **DO**
- 4      $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$
- 5      $k = k + 1$

Megjegyezzük, hogy a kilépési feltételek is azonosak az egydimenziós esettel, annyi módosítással, hogy abszolút érték helyett normát veszünk és felső indexet használunk.

## 2.2. A Newton-módszer

Itt is valamely  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  kezdeti vektorból kiindulva állítunk elő egy sorozatot, amely reményeink szerint (bizonyos feltételek megléte esetén garantáltan) az egyenletrendszer megoldásához konvergál. Az  $F(x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) egyenletrendszer skalár alakja:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Az egyes skalár egyenleteket linearizáljuk az  $x^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T \in \mathbb{R}^n$  pontban, majd az így kapott lineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatja az  $x^{(k+1)}$  közelítést. Az  $i$ -edik skalár függvény elsőfokú Taylor-polinomja az  $x^{(k)}$  pontban:

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &\approx f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) (x_j - x_j^{(k)}). \end{aligned}$$

Tömörebb formában ugyanez

$$\begin{aligned} f_1(x) &\approx f_1(x^{(k)}) + \nabla f_1(x^{(k)})^T (x - x^{(k)}) \\ &\vdots \\ f_n(x) &\approx f_n(x^{(k)}) + \nabla f_n(x^{(k)})^T (x - x^{(k)}), \end{aligned}$$

ahol  $\nabla f_i(x^{(k)})$  az  $i$ -edik skalár függvény gradiense az  $x^{(k)}$  pontban, azaz az  $F$  Jacobi-mátrixának  $i$ -edik sorvektora az  $x^{(k)}$  pontban. Az  $F(x) = 0$  egyenletrendszer megoldása helyett keressük a linearizált egyenletrendszer

$$\begin{aligned} f_1(x^{(k)}) + \nabla f_1(x^{(k)})^T (x - x^{(k)}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x^{(k)}) + \nabla f_n(x^{(k)})^T (x - x^{(k)}) &= 0, \end{aligned}$$

megoldását. Vegyük észre, hogy az  $y = f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(x^{(k)})^T (x - x^{(k)})$  egyenlet az  $y = f_i(x)$  függvény érintő (hiper)síkja az  $x^{(k)}$  pontban. Az  $x^{(k+1)}$  közelítés az érintősíkoknak az  $y = 0$  síkon lévő közös pontja.

Az  $F$  függvény

$$J(x) = \left[ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{bmatrix}$$

Jacobi-mátrixával tömörebben is megfogalmazható a linearizált egyenletrendszer:

$$(2.1) \quad F(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0.$$

Ennek megoldása:

$$(2.2) \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - [J(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Az  $\{x^{(k)}\}$  sorozat fenti előállítását nevezzük Newton-módszernek. Amennyiben a skalár számmal való osztást úgy tekintjük, hogy az az inverzével (reciprokával) balról történő szorzás, akkor tökéletes analógiát látunk az (2.2) és az egydimenziós Newton-módszer között. Ugyanígy az algoritmusok között is, annyi eltéréssel, hogy a gyakorlatban soha nem invertáljuk a  $J(x^{(k)})$  Jacobi-mátrixot. Helyette az (2.1) lineáris egyenletrendszert oldjuk meg valamely alkalmas módszerrel, a  $\Delta^{(k)} = x - x^{(k)}$  új változó bevezetésével.

**A Newton-módszer algoritmusának egyenletrendszerekre:**

- 1 Adott  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ .
- 2 **FOR**  $i = 0, 1, 2, \dots$
- 3 Oldjuk meg a  $J(x^{(k)})\Delta^{(k)} = -F(x^{(k)})$  egyenletrendszert.
- 4  $x^{(k)} = x^{(k)} + \Delta^{(k)}$

Az algoritmust itt taxatív ciklussal írtuk le; természetesen gondoskodni kell a kilépési feltételről. Az alkalmazható kilépési feltétel itt is a korábban megadott (B) vagy/és (C) lehet, értelemszerűen valamilyen normában alkalmazva. (Természetesen az iterációs szám korlátozásáról se feledkezzünk meg.) Egzakt (A) hibabecslésre igen ritkán van módunk. Ismerünk ugyan konvergenciátételeket, amelyek becslést is adnak a hibára, ám azok feltételeit a legkritikább esetben sikerül belátni, illetve az azokban szereplő konstansokat megbecsülni (a költségekről nem is beszélve). Mindenesetre ezen tételek igazolják, hogy az eljárás konvergenciája alkalmas feltételek esetén lokális és másodrendű.

Megjegyezzük, hogy a lokális konvergencián azt értjük, hogy csak bizonyos tartományból, rendszerint az  $x^*$  megoldás szűk környezetéből választott  $x^{(0)}$  kezdeti vektor esetén konvergens. Ebben az értelemben az egy- vagy többdimenziós fixpontiteráció és az egydimenziós Newton-módszer is lokálisan konvergens.

**2.1. Példa.** Oldjuk meg az  $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T = 0$ ,  $x = [x_1, x_2]^T$  egyenletrendszert Newton-módszerrel, ha

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 + x_2^2 - 5 \\ f_2(x) &= x_1^3 - x_2\sqrt{x_1} - 3. \end{aligned}$$

**Megoldás:** A Jacobi-mátrix:

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 - \frac{x_2}{(2\sqrt{x_1})} & -\sqrt{x_1} \end{bmatrix}.$$

Legyen a kezdővektor  $x^{(0)} = [3, -5]^T$ . A

$$J(x^{(0)})\Delta^{(0)} = -F(x^{(0)})$$

lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 1 & -10.000000 \\ 28.443376 & -1.732051 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 23.000000 \\ 32.660254 \end{bmatrix}.$$

Az egyszerűség kedvéért itt elhagytuk a  $\Delta$  vektor felső indexeit. A megoldás:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.014374 \\ 2.198563 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = x^{(0)} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.985626 \\ -2.801437 \end{bmatrix}.$$

A kilépési feltételhez szükséges normák:

$$\|\Delta\|_\infty = 2.198563, \quad \|F(x^{(1)})\|_\infty = 8.776312.$$

A továbbiakban pedig

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.384174 \\ -2.046071 \end{bmatrix},$$

$$\|\Delta\|_\infty = 0.755366, \quad \|F(x^{(2)})\|_\infty = 2.059214.$$

⋮

$$\begin{bmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000000 \\ -2.000000 \end{bmatrix},$$

$$\|\Delta\|_\infty = 0.16 \times 10^{-4}, \quad \|F(x^{(2)})\|_\infty \approx 10^{-9}.$$

Megjegyezzük, hogy a gyök szoros közelében az eljárás ugyanúgy begyorsul, mint egydimenzióban; míg az  $x^{(5)}$  öt tizedesjegyre volt pontos, az  $x^{(6)}$  már valójában 10 jegyre, a 7-lépésben pedig már elértük a lehetséges 15 tizedesjegyi maximális pontosságot és a kilépési normák is  $10^{-9}$ , illetve  $10^{-15}$  nagyságrendűek.

## 3. fejezet

# Optimalizálás

Optimalizálási feladat számos helyen előfordul. A legrégebbi ilyen típusú feladatok a következők:

- *Izoperimetrikus probléma.* Adott hosszúságú síkbeli zárt görbék közül határozzuk meg azokat, amelyek által bezárt terület maximális.
- *Dido első problémája.* Adott hosszúságú, egy zárt félsíkban haladó görbék közül határozzuk meg azokat, amelyek végpontjai a félsík határoló egyenesén vannak, és amelyek ezzel az egyenessel maximális területet zárnak be.
- *Dido második problémája.* Adott hosszúságú, egy zárt félsíkban haladó és a félsík határoló egyenesének előírt pontjában kezdődő és végződő görbék közül határozzuk meg azokat, amelyek ezzel az egyenessel maximális területet zárnak be.
- *Euklidesz feladata.* Adott háromszögbe írjunk maximális területű paralelogrammát.

Manapság például azt kell meghatároznunk, hogy hogyan lehet az egyik városból egy másik városba a legrövidebb úton (leghamarabb) eljutni. A lineáris programozás feladata gazdasági jelentőséggel is bír.

Ebben a fejezetben néhány, a későbbiekben felhasználásra kerülő, jelölést és fogalmat gyűjtünk össze.

### 3.1. Konvexitás, kvázikonvexitás

Az  $A \subset \mathbb{R}^n$  halmazt *konvex*nek nevezzük, ha tetszőleges két pontjával együtt az azokat összekötő szakaszt is tartalmazza azaz, minden  $x, y \in A$  és  $\lambda \in [0, 1]$  esetén  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ .

A  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  vektor az  $x, y$  pontok lineáris kombinációja. Tetszőleges  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  pontok *konvex kombinációját* a következőképpen definiálhatjuk:

**3.1. Definíció.** Legyenek  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  olyan pozitív számok, melyre

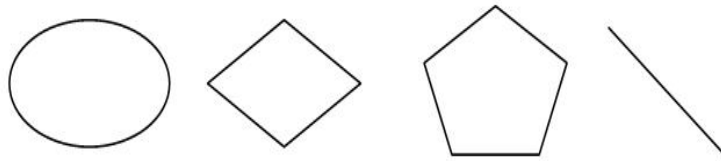
$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

Ekkor az

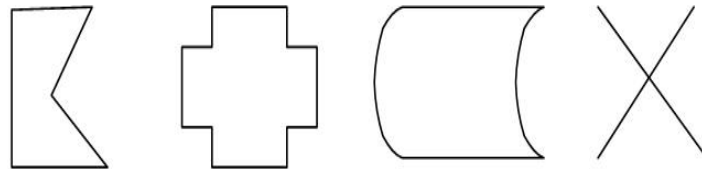
$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$$

vektor az adott pontok *konvex kombinációja*.

**3.1. Példa.** Példák Konvex és konkáv halmazokra:



Konvex halmazok



Konkáv halmazok

**3.2. Definíció.** Az  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény konvex, ha minden  $x, y \in D$  és  $0 \leq \lambda \leq 1$  esetén

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Az  $f$  függvény szigorúan konvex, ha minden  $x, y \in D$  és  $0 < \lambda < 1$  esetén

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Az  $f$  függvény (szigorúan) konkáv, ha  $-f$  (szigorúan) konvex.

Ez a definíció ekvivalens módon megfogalmazható a következőképpen is:

**3.3. Definíció.** Az  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény konvex, ha

$$f(x + \lambda h) \leq f(x) + \lambda \Delta f(x) \quad (x, x + h \in D, 0 \leq \lambda \leq 1),$$

ahol

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Az  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény szigorúan konvex, ha

$$f(x + \lambda h) < f(x) + \lambda \Delta f(x) \quad (x, x + h \in D, 0 < \lambda < 1).$$

Szükségünk lesz ezen klasszikus függvénytípusok következő általánosítására is:

**3.4. Definíció.** Az  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény kvázikonvex, ha minden  $x, y \in D$  és  $0 \leq \lambda \leq 1$  esetén

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Az  $f$  függvény szigorúan kvázikonvex, ha minden  $x, y \in D$  és  $0 < \lambda < 1$  esetén

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}.$$

Az  $f$  függvény (szigorúan) kvázikonkáv, ha  $-f$  (szigorúan) kvázikonvex.

Ez a definíció valós esetben megfogalmazható alsó és felső nívóhalmazok segítségével is.

**3.5. Definíció.** Legyen  $I$  egy intervallum és  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Az  $f$  függvényt kvázikonvexnek mondjuk, ha az

$$L(f; \alpha) = \{x \in I : f(x) \leq \alpha\}$$

alsó nívóhalmazok minden  $\alpha$  mellett konvexek. Hasonlóan: az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt kvázikonkávnak nevezzük, ha az

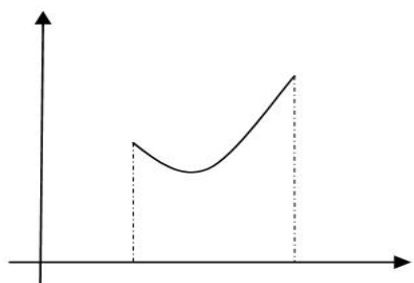
$$L(f; \alpha) = \{x \in I : f(x) \geq \alpha\}$$

felső nívóhalmazok minden  $\alpha$  mellett konvexek.

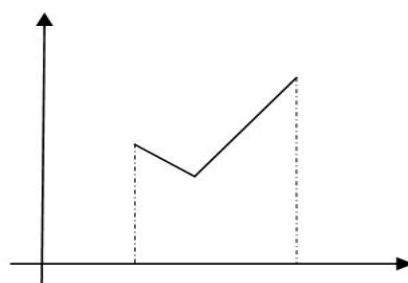
A konvex függvények az értelmezési tartomány belsejében folytonosak, a kvázikonvexitásból viszont nem következik a folytonosság. Erre példa lehet tetszőleges szakadós monoton függvény, például a  $\text{sgn}(x)$ .



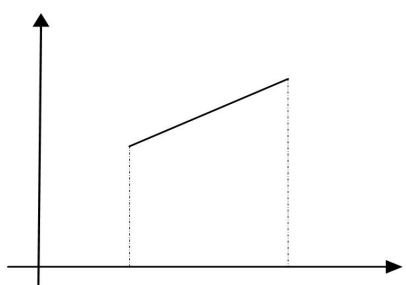
**3.2. Példa.** A következő ábrákon konvex, szigorúan konvex, kvázikonvex és szigorúan kvázikonvex függvények láthatóak.



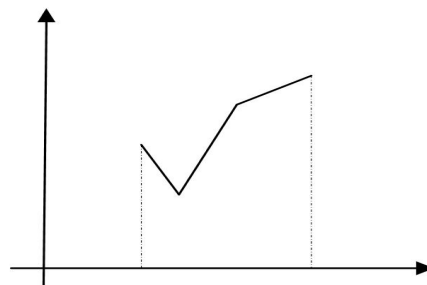
(a)



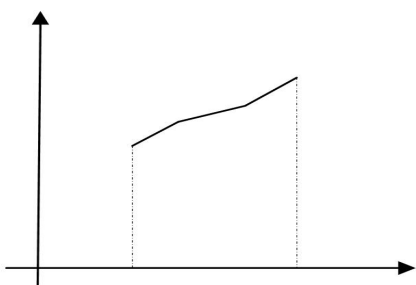
(b)



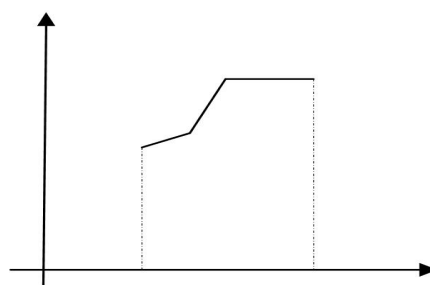
(c)



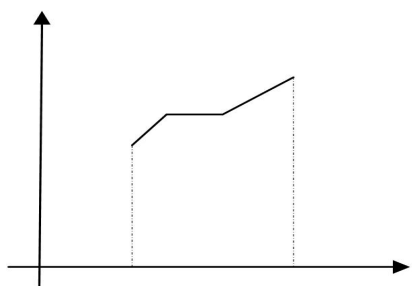
(d)



(e)



(f)



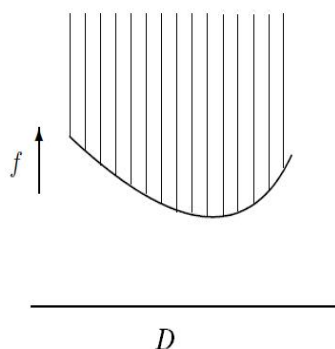
(g)

Az (a) ábrán egy szigorúan konvex, a (b) és (c) ábrákon látható függvények konvexek, a (d) és (e) szigorúan kvázikonvex függvényeket mutat, végül az (f) és (g) függvények kvázikonvexek.

**3.6. Definíció.** Egy  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Az  $f$  függvény epigráfja

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) : f(x) \leq y\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

halmaz.



Epigráf  $\mathbb{R}^2$ -ben

Egy konvex  $D$  halmazon értelmezett  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  függvény akkor és csak akkor konvex, ha  $f$  epigráfja konvex halmaz.

Egy  $A \subset \mathbb{R}^n$  halmaz *affin burkán* az őt tartalmazó legszűkebb lineáris sokaságot értjük, jele  $\text{aff } A$ .

Legyen  $A \subset \mathbb{R}^n$ , az  $x \in A$  pont benne van  $A$  *relatív belsejében* ha létezik olyan  $\varepsilon$  pozitív valós szám, hogy  $B_\varepsilon(x) \cap \text{aff } A \subset A$ .  $A$  relatív belsejében lévő pontok halmazát  $\text{ri } A$ -val jelöljük.

## 3.2. Függvények szélsőértékei

Első lépésként definiáljuk a környezet fogalmát.

**3.7. Definíció.** Az

$$(3.1) \quad S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\} \subset \mathbb{R}^n$$

halmazt az  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  pont körüli  $r$  sugarú nyílt gömbi környezetnek nevezzük.

Ebben a fejezetben összefoglaljuk az egy- és többváltozós függvények szélsőértékeivel kapcsolatos alapvető definíciókat és eredményeket.

**3.8. Definíció.** Legyen adott egy  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vektor-skalár függvény ( $n \geq 1$ ). Az  $x^* \in \mathcal{D}_f$  pont az  $f$  függvény globális minimumhelye, ha

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f)$$

és globális maximumhelye, ha

$$f(x^*) \geq f(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

**3.9. Definíció.** Legyen adott egy  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vektor-skalár függvény ( $n \geq 1$ ). Az  $x^* \in \mathcal{D}_f$  pont az  $f$  függvény lokális minimumhelye, ha létezik  $\delta > 0$  szám, hogy

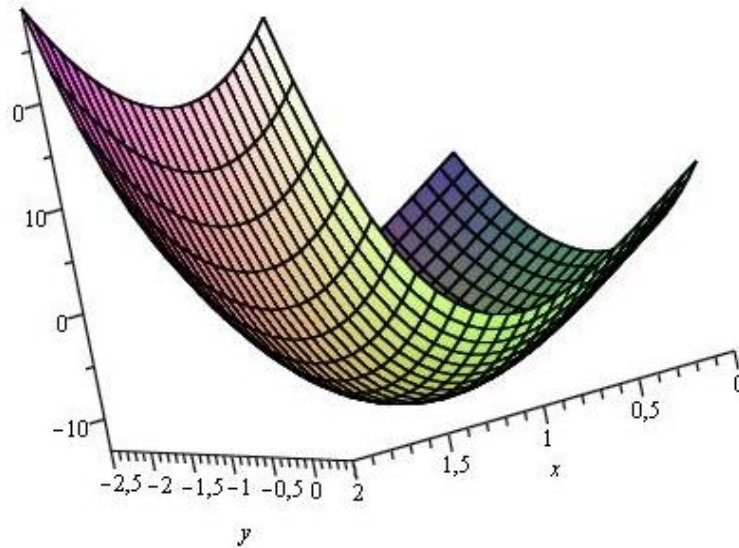
$$f(x^*) \leq f(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f \cap S(x^*, \delta))$$

és lokális maximumhelye, ha

$$f(x^*) \geq f(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f \cap S(x^*, \delta)).$$

A minimum-, vagy maximumhelyre egyaránt az *extremális pont* elnevezéssel utalunk.

**3.3. Példa.** Az  $f(x) = 3x^4 + 4y^2 - 12x + 8y$  függvénynek egyetlen minimumhelye van:  $x = 1, y = -1$ , amit az alábbi ábra is mutat:



**3.10. Definíció.** Egy  $x^* \in \mathcal{D}_f$  minimumhelyet szigorúnak nevezzük, ha egy  $\delta > 0$  számra fennáll, hogy

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap S(x^*, \delta), x \neq x^*.$$

Egy  $x^* \in \mathcal{D}_f$  maximumhelyet szigorúnak nevezünk, ha egy  $\delta > 0$  számra fennáll, hogy

$$f(x^*) > f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap S(x^*, \delta), x \neq x^*.$$

Ha egy minimumhely nem szigorú (erős), akkor gyenge minimumhelynek is hívjuk. Az előző példa minimumhelye szigorú minimum. Az  $f(x) = (x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2)(x_1 - 3x_2)^2$  függvénynek az  $x_1 = 3x_2$  egyenes bármely pontja gyenge minimumhelye.

Ismertek a következő eredmények:

**3.1. Tétel.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy függvény. Ha  $f \in C^1$  és  $x^*$  extrémális pont, akkor  $f'(x^*) = 0$ .

**3.2. Tétel.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy függvény. Ha  $f \in C^2$  és  $x^*$  minimumhely (maximumhely), akkor  $f'(x^*) = 0$  és  $f''(x^*) \geq 0$  ( $f''(x^*) \leq 0$ ).

**3.3. Tétel.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy függvény. Ha  $f \in C^2$ ,  $f'(x^*) = 0$  és teljesül, hogy  $f''(x^*) > 0$  ( $f''(x^*) < 0$ ), akkor  $x^*$  az  $f$  függvény minimumhelye (maximumhelye).

**3.4. Tétel.** Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  egy vektor-skalár függvény. Ha  $f \in C^1$  és  $x^*$  extrémális pont, akkor

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

A  $\nabla f(x^*) = 0$  feltételt stacionárius egyenletnek (egyenletrendszernek) nevezzük.

**3.5. Tétel.** Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  egy vektor-skalár függvény. Ha  $f \in C^2$  és  $x^*$  minimumhely (maximumhely), akkor

$$\nabla f(x^*) = 0$$

és a

$$H(x^*) = \left[ \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^n$$

Hesse-mátrix pozitív (negatív) szemidefinit.

**3.6. Tétel.** Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  egy vektor-skalár függvény. Ha  $f \in C^2$ ,  $\nabla f(x^*) = 0$  és a  $H(x^*)$  Hesse-mátrix pozitív (negatív) definit, akkor az  $x^*$  pont minimumhely (maximumhely).

A  $\nabla f(x) = 0$  ( $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) egyenlet megoldásait, amelyeket az optimalizálásban stacionárius pontoknak nevezünk, az  $f$  függvény kritikus pontjainak is szokás hívni. Mi csak olyan kritikus pontokkal foglalkozunk, amelyek nem degeneráltak, azaz  $\det(H(x)) \neq 0$ .

Megmutatható, hogy csak olyan nemdegenerált kritikus (stacionárius) pontok léteznek, amelyekben a  $H(x)$  Hesse-mátrixnak  $l$  pozitív és  $n-l$  negatív sajátértéke van ( $0 \leq l \leq n$ ). Ha  $l = 0$ , akkor  $H(x)$  negatív definit (maximumhely), ha  $l = n$ , akkor  $H(x)$  pozitív definit (minimumhely), a  $0 < l < n$  esetben nyeregpontról beszélünk. Nyeregponthoz nincs szélsőérték.

Degenerált kritikus pontokban elvileg lehet szélsőérték ám ennek vizsgálata általában nem egyszerű.

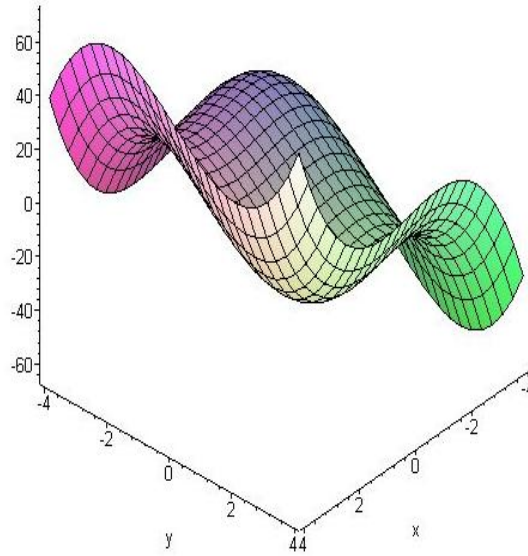
**3.4. Példa.** Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 12x_2 + 3$  függvény szélsőértékeit és nyeregpontjait! Az

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 3x_2^2 - 12 \end{bmatrix} = 0$$

stacionárius egyenletből könnyen kapjuk, hogy az  $x_1 = \pm 1$  és  $x_2 = \pm 2$  értékekkel képezett 4 darab  $(x_1, x_2)$  pontpár adja a függvény kritikus pontjait. Minthogy

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{bmatrix}$$

behelyettesítéssel könnyen megkaphatjuk, hogy az  $(x_1, x_2) = (1, 2)$  pontban lokális minimuma van, az  $(x_1, x_2) = (-1, -2)$  pontban lokális maximuma van, míg az  $(x_1, x_2) = (1, -2)$  és a  $(x_1, x_2) = (-1, 2)$  pontokban inflexiós (nyereg) pontja van.



### 3.3. Matematikai programozási (MP) feladat

A matematikai programozási feladatot a következőképpen definiáljuk.

Meghatározandó az  $x = (x_1, \dots, x_n)$  vektor, amely minimalizálja az

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

függvényt az alábbi feltételek mellett

$$\begin{aligned} g_i(x_1, \dots, x_n) &\leq 0, & i &= 1, \dots, k \\ h_i(x_1, \dots, x_n) &= 0, & i &= 1, \dots, m \\ x &\in X \end{aligned}$$

ahol az  $x \in \mathbb{R}^n$  a döntési változó vektor, az

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, \dots, m)$$

$n$  változós valós függvények, amelyeket rendre célfüggvénynek, egyenlőtlenséges ill. egyenlőséges feltételi függvényeknek nevezünk. Az  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  halmaz pedig nyílt halmaz. Számos problémában  $k = m = 0$  és  $X \equiv \mathbb{R}^n$ , az ilyen feladatot feltétel nélküli optimalizálási feladatnak nevezzük. Egyéb problémákat pedig feltételes optimalizálási feladatnak nevezünk.

### 3.4. Lineáris programozási (LP) feladat

A legegyszerűbb feltételes optimalizálási feladatban a célfüggvény és a feltételi függvények a döntési változónak lineáris függvényei, ezt az optimalizálási problémát lineáris programozási feladatnak nevezzük. A lineáris programozási feladat standard formája a következő:

Skalár formában:

Minimalizálandó a

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

a következő feltételek mellett

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, & i &= 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, & j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Mátrix-vektor formában:

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \min! \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

ahol  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  ismert konstans mátrix ill. vektorok,  $x \in \mathbb{R}^n$  pedig a döntési változó vektor. A  $c^T x$  a  $c$  és az  $x$  vektorok skaláris szorzatát jelöli. Néha, ahol nem zavaró, ott az egyszerűség kedvéért a  $cx$  jelölést használjuk, vagy a  $\langle c, x \rangle$  jelölés is elfogadott.

## 4. fejezet

# Általános nemlineáris optimalizálási feladat

Az általános nemlineáris optimalizálási feladat (Nonlinear Optimization NLO) a következőképpen írható fel:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \quad (\max) \\ h_i(x) &= 0 \quad (i = 1, \dots, m), \\ g_j(x) &\leq 0 \quad (j = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

ahol  $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  és  $h_i, g_j : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, r$ ).  
A

$$h_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

korlátozást egyenlőségi feltételeknek, a

$$g_j(x) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, r)$$

korlátozást pedig egyenlőtlenségi feltételeknek nevezzük. Ha nincs semmilyen korlátozó feltétel, akkor feltétel nélküli optimalizálásról beszélünk.

A feltételeket kielégítő pontokat megengedett megoldásoknak nevezzük, halmazukat  $\mathcal{F}$ -fel jelöljük, vagyis

$$\mathcal{F} = \{x \in D : h_i(x) = 0, g_j(x) \leq 0, (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r)\}.$$

A fenti feladatot tömörebb formában is felírhatjuk. Legyen

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{bmatrix} \quad (h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m),$$



$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_r(x) \end{bmatrix} \quad (g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r)$$

és vezessük be a következő jelölést.

**4.1. Definíció.** Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Az  $x \leq y$  egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha  $x_i \leq y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

A fenti jelöléseket felhasználva a feladatot a következő alakban írhatjuk:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \quad (\max) \\ h(x) &= 0 \\ g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

**4.2. Definíció.** A (4.1) feladat megengedett megoldásainak halmaza:

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0, g(x) \leq 0\}.$$

Az  $x$  vektort megengedett megoldásnak nevezzük, ha  $x \in S$ .

**4.1. Megjegyzés.** Valójában

$$S = \{x \mid x \in D(f), h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$$

volna a helyes definíció, de feltesszük, hogy a  $h(x) = 0$  és  $g(x) \leq 0$  feltételek együttes fennállása esetén  $x \in \mathcal{D}(f)$ .

Előfordulnak csak egyenlőségi, vagy csak egyenlőtlenségi korlátokat tartalmazó szélsőértékfeladatok is. Ezek általános alakja

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \quad (\max) \\ h(x) &= 0, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \quad (\max) \\ g(x) &\leq 0. \end{aligned}$$

A feladatok megengedett megoldás halmazai értelemszerűen az

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0\},$$

illetve a

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}$$

halmazok.

Az optimalizálási feladatot felírhatjuk a következő formában is:

$$f(x) \rightarrow \min \quad (\max) \quad (x \in S).$$

Feltétel nélküli optimalizálás esetén  $S = \mathcal{D}(f)$ . Feltételes optimalizálásról valójában akkor beszélünk, ha  $S \subset \mathcal{D}(f)$  és  $S \neq \mathcal{D}(f)$ .

**4.3. Definíció.** Az  $x^* \in S$  vektor optimális megoldás, ha fennáll, hogy

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in S \quad (f(x^*) \geq f(x), \quad \forall x \in S).$$

Az  $x$  vektort megengedett megoldásnak nevezzük, ha  $x \in S$ .

Tömören jelölve egy  $x^* \in S$  megoldást optimálisnak nevezünk, ha

$$f(x^*) = \min_{x \in S} f(x) \quad \left( f(x^*) = \max_{x \in S} f(x) \right).$$

**4.4. Definíció.** Az  $x^* \in S$  vektor lokálisan optimális megoldás, ha létezik olyan  $\delta > 0$  szám, hogy

$$f(x^*) = \min_{x \in S \cap S(x^*, \delta)} f(x) \quad \left( f(x^*) = \max_{x \in S \cap S(x^*, \delta)} f(x) \right).$$

**4.5. Definíció.** Egy  $x^* \in S$  minimumhelyet szigorúnak nevezünk, ha egy  $\delta > 0$  számra fennáll, hogy

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in S \cap S(x^*, \delta), \quad x \neq x^*.$$

Egy  $x^* \in S$  maximumhelyet szigorúnak nevezünk, ha egy  $\delta > 0$  számra fennáll, hogy

$$f(x^*) > f(x), \quad \forall x \in S \cap S(x^*, \delta), \quad x \neq x^*.$$

Számos esetben csak egy lokális optimumot tudunk (akárcsak közelítőleg is) meghatározni. Az optimum létezésére következtethetünk Weierstrass-tételéből, ha  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  korlátos és zárt halmaz és az  $f(x)$  célfüggvény az  $S$  halmazon folytonos. A gyakorlatban ezt a tényt csak ritkán használhatjuk ki.

Végül megjegyezzük, hogy elég csak az  $f(x) \rightarrow \min_{x \in S}$  minimum feladatot vizsgálni, mert fennáll a  $\min f(x) = -\max(-f(x))$  egyenlőség.

## 4.1. Nemlineáris optimalizálási feladatok osztályozása

A fenti definíciókat használva megadhatjuk a NLO feladatok néhány osztályát. Ezeknek az osztályoknak a leírásakor felhasználjuk azt a triviális tényt, hogy az  $\mathbb{R}^n$ -beli nemnegatív vektorokból álló  $\mathbb{R}_+^n$  halmaz konvex. Egy  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt kvadratikusnak nevezünk, ha

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x + c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c,$$

ahol  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus mátrix,  $b \in \mathbb{R}^n$  és  $c \in \mathbb{R}$ . Ha  $Q = 0$ , akkor  $f$ -et affin vagy lineáris függvénynek mondjuk.

Általában a NLO feladatok következő osztályait különböztetjük meg:

- *Lineáris optimalizálás (LO)*:  $f, g_1, \dots, g_r$  és  $h_1, \dots, h_m$  affin (lineáris) függvények és a  $D$  halmaz vagy  $\mathbb{R}^n$ -nel vagy  $\mathbb{R}_+^n$ -szal egyezik meg.
- *Feltétel nélküli optimalizálás*: Az  $r = 0$  és  $m = 0$  (azaz az indexhalmazok üresek), valamint  $D = \mathbb{R}^n$ .
- *Konvex optimalizálás (CO)*:  $f, g_1, \dots, g_r$  konvex függvények,  $h_1, \dots, h_m$  affin (lineáris) függvények és  $D$  konvex halmaz.
- *Folytonos konvex optimalizálás*: Konvex optimalizálási feladat az előbbi értelemben, de emellett az összes függvény kétszer folytonosan differenciálható. Megjegyezzük, hogy ezen kívül még további folytonossági követelményeket is fel fogunk tenni a későbbiekben.
- *Kvadratikus optimalizálás (QO)*: Az  $f$  célfüggvény kvadratikus, a feltételben szereplő összes  $g_1, \dots, g_r$  és  $h_1, \dots, h_m$  függvény affin (lineáris) és a  $D$  halmaz vagy  $\mathbb{R}^n$ -nel, vagy  $\mathbb{R}_+^n$ -szal egyezik meg.
- *Kvadratikus korlátozott kvadratikus optimalizálás*: Ugyanaz, mint a QO, de a  $g_1, \dots, g_r$  függvények kvadratikusak.
- *Konvex kvadratikus optimalizálás (KKO)*: Ugyanaz, mint a QO, de az  $f$  célfüggvény konvex.
- *Konvex kvadratikus korlátozott kvadratikus optimalizálás*: Azonos a kvadratikus korlátozott kvadratikus optimalizálási feladattal, viszont az  $f$  célfüggvény és a kvadratikus  $g_1, \dots, g_r$  függvények konvexek.

## 4.2. Egyenlőségi feltételek

Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m < n$ ) és vizsgáljuk az

$$(4.3) \quad \begin{aligned} f(x) &\rightarrow \text{extr} \\ h(x) &= 0 \end{aligned}$$

feltételes szélsőértékfeladatot!

**4.6. Definíció.** Legyen  $x^* \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x^*) = 0\}$  és tegyük fel, hogy  $h \in C^1(S(x^*, \varepsilon))$  valamilyen  $\varepsilon > 0$  értékre. Az  $x^*$  pont reguláris, ha a

$$\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$$

gradiens vektorok lineárisan függetlenek.

**4.7. Definíció.** Az (4.3) optimalizálási feladat Lagrange-függvénye

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x),$$

ahol  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T \in \mathbb{R}^m$ .

A  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  együtthatókat Lagrange-szorzóknak (multiplikátoroknak) is nevezik. A  $L(x, \lambda)$  függvény  $x$  vektor szerinti gradiensét  $\nabla_x L(x, \lambda)$ , az  $x$  vektor szerinti Hesse-mátrixát pedig  $HL(x, \lambda)$  fogja jelölni.

**4.1. Tétel.** Legyen  $x^*$  lokális minimum (maximum) pont és tegyük fel, hogy az  $x^*$  pont reguláris. Ekkor egyértelműen létezik egy  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  úgy, hogy

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0.$$

Ha  $f, h \in C^2(S(x^*, \varepsilon))$  és  $x^*$  minimumhely, akkor fennáll

$$z^T HL(x^*, \lambda^*) z \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \text{ és } \nabla h(x^*)^T z = 0.$$

Ha  $f, h \in C^2(S(x^*, \varepsilon))$  és  $x^*$  maximumhely, akkor fennáll

$$z^T HL(x^*, \lambda^*) z \leq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \text{ és } \nabla h(x^*)^T z = 0.$$

Az  $(x^*, \lambda^*)$  pont az  $L(x, \lambda)$  Lagrange-függvény nyeregponja. Minimum esetén a  $HL(x^*, \lambda^*)$  Hesse-mátrix feltételesen pozitív szemidefinit, a maximum esetén pedig feltételesen negatív szemidefinit.

**4.2. Tétel.** Tegyük fel, hogy  $x^* \in S$  reguláris pont,  $f, h \in C^2(S(x^*, \varepsilon))$ , ( $\varepsilon > 0$ ) és létezik  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  úgy, hogy

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0.$$

Ha  $HL(x^*, \lambda^*)$  feltételesen pozitív definit, azaz

$$z^T HL(x^*, \lambda^*) z > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \quad z \neq 0, \quad \nabla h(x^*)^T z = 0,$$

akkor  $x^*$  szigorú lokális minimumhely. Ha a  $HL(x^*, \lambda^*)$  Hesse-mátrix feltételesen negatív definit, azaz

$$z^T HL(x^*, \lambda^*) z < 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \quad z \neq 0, \quad \nabla h(x^*)^T z = 0,$$

akkor  $x^*$  szigorú lokális maximumhely.

A feltételes pozitív definités ellenőrzése meglehetősen nehéz feladat. Ismertetjük a két legismertebb eredményt.

**4.3. Tétel.** *Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus. Az  $A$  mátrix akkor és csak akkor feltételesen pozitív definit (negatív definit), ha a*

$$p(\gamma) = \det \left( \begin{bmatrix} A - \gamma I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

*polinomegyenlet gyökei mind pozitívak (negatívak).*

A következő tétel Chabrilac és Crouzeix eredménye:

**4.4. Tétel.** *Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus. Az  $A$  mátrix feltételesen pozitív definit, akkor és csak akkor, ha az*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

*szegélyezett mátrixnak  $m$  negatív, 0 zérus és  $n$  pozitív valós sajátértéke van. Az  $A$  mátrix akkor és csak akkor feltételesen negatív definit, ha a fenti szegélyezett mátrixnak  $n$  negatív, 0 zérus és  $m$  pozitív valós sajátértéke van.*

**4.8. Definíció.** *Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus mátrix. Az  $\text{in}(A) = (p_s, z_s, n_s)$  vektort az  $A$  mátrix inerciájának nevezzük, ha  $p_s$  az  $A$  mátrix pozitív,  $z_s$  az  $A$  zérus,  $n_s$  pedig az  $A$  mátrix negatív sajátértékeinek a számát jelenti.*

Az inercia meghatározása és a feltételes definités meghatározása véges lépésben is lehetséges. A Chabrilac-Crouzeix tételt ez alapján a következő alakban is kimondhatjuk (mivel tulajdonképpen a a szegélyezett mátrix inerciájára mond ki feltételt). Értelmszerűen  $n = p_s + z_s + n_s$ .

**4.5. Tétel.** *Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus. Az  $A$  mátrix feltételesen pozitív definit, akkor és csak akkor, ha az*

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

*szegélyezett mátrix inerciája  $\text{in}(C) = (m, 0, n)$ . Az  $A$  mátrix akkor és csak akkor feltételesen negatív definit, ha  $\text{in}(C) = (n, 0, m)$ .*

Az előző két tétel alapján a  $HL(x^*, \lambda^*)$  Hesse-mátrix feltételes definitségét

$$p(\gamma) = \det \left( \begin{bmatrix} HL(x^*, \lambda^*) - \gamma I & \nabla h(x^*) \\ \nabla h(x^*)^T & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

polinomegyenlet gyökeinek, vagy a

$$\begin{bmatrix} HL(x^*, \lambda^*) & \nabla h(x^*) \\ \nabla h(x^*)^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

szegélyezett mátrix inerciájának vizsgálatával dönthetjük el. Megjegyezzük, hogy a szegélyezett mátrix az  $L(x, \lambda)$  Lagrange-függvény  $(x, \lambda)$  változó szerinti Hesse-mátrixa az  $(x^*, \lambda^*)$  helyen, azaz

$$\begin{bmatrix} HL(x^*, \lambda^*) & \nabla h(x^*) \\ \nabla h(x^*)^T & 0 \end{bmatrix} = \nabla_{(x, \lambda), (x, \lambda)}^2 L(x^*, \lambda^*).$$

A (4.3) feltételes optimalizálási feladat megoldása a következőképpen történhet:

1. Megoldjuk a

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 0, \quad h(x) = 0$$

egyenletrendszer. Jelölje a megoldást:  $(x^*, \lambda^*)$

2. Ellenőrizzük a  $HL(x^*, \lambda^*)$  Hesse-mátrix feltételes definittségét a fenti két tétel valamelyikével.

**4.1. Példa.** Határozzuk meg az  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$  kör origóhoz legközelebbi és legtávolabbi pontját!

Ebben az esetben a következő feltételes szélsőértékfeladatot kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\rightarrow \text{extr} \\ h_1(x, y) &= (x-3)^2 + (y-4)^2 - 9 = 0. \end{aligned}$$

A feladatnak egy legkisebb és egy legnagyobb pontja van. A feladat Lagrange-függvénye:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda((x-3)^2 + (y-4)^2 - 9).$$

Az  $L$  függvény gradiense:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 2x + 2\lambda(x-3) \\ 2y + 2\lambda(y-4) \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 - 9 \end{bmatrix} = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$x = \frac{3\lambda}{1+\lambda}, \quad y = \frac{4\lambda}{1+\lambda},$$

amelyet a feltételi egyenletbe helyettesítve

$$h_1(x, y) = \left( \frac{3\lambda}{1+\lambda} - 3 \right)^2 + \left( \frac{4\lambda}{1+\lambda} - 4 \right)^2 - 9 = \frac{25}{(1+\lambda)^2} - 9 = 0$$

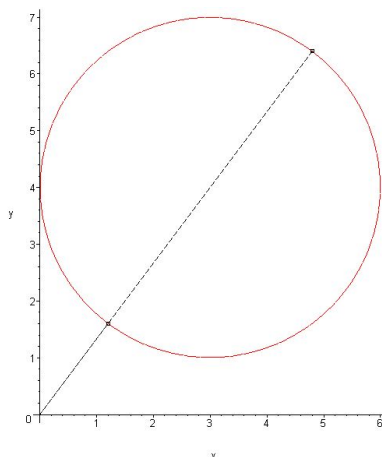
adódik. Innen a lehetséges megoldások:

$$\lambda_1 = 2/3, \quad \lambda_2 = -8/3.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\lambda = 2/3, x = 6/5, y = 8/5, \quad \lambda = -8/3, x = 24/5, y = 32/5.$$

Mindkét pont reguláris.



A pontok jellegét először a determináns tétel alapján ellenőrizzük. Ekkor

$$p(\gamma) = \det \left( \begin{bmatrix} 2 + 2\lambda - \gamma & 0 & 2x - 6 \\ 0 & 2 + \lambda - \gamma & 2y - 8 \\ 2x - 6 & 2y - 8 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

amelyet kifejtve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p(\gamma) &= (2x - 6)^2(2 + \lambda - \gamma) + (2y - 8)^2(2 + 2\lambda - \gamma) \\ &= ((2x - 6)^2 + (2y - 8)^2)(2 + 2\lambda - \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Innen az egyetlen gyök  $\gamma = 2 + 2\lambda$ . Ha  $\lambda = 2/3$ , akkor  $\gamma = 10/3$ , ami a determináns tétel szerint azt jelenti, hogy a  $(x = 6/5, y = 8/5)$  pont szigorú lokális minimumhely. A  $\lambda = -8/3$  pont esetén  $\gamma = -10/3$ , amiből az következik, hogy a  $(x = 24/5, y = 32/5)$  pont szigorú lokális maximumhely.

A Chabrilac-Crouzeix tétel alapján eljárva kapjuk, hogy a szegélyezett mátrix

$$C = \begin{bmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x-6 \\ 0 & 2+2\lambda & 2y-8 \\ 2x-6 & 2y-8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek sajátértékei a  $\lambda = 2/3, x = 6/5, y = 8/5$  esetben:

$$\left[ \frac{10}{3}, \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{349}, \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{349} \right] = [3.3333, 7.8938, -4.5605].$$

A negatív sajátértékek száma 1, a zérus sajátértékek száma 0, a pozitívoké pedig 2 (azaz  $\text{in}(C) = (2, 0, 1)$ ). Eszerint itt a feladatnak szigorú lokális minimuma van.

A szegélyezett mátrix sajátértékei a  $\lambda = -8/3, x = 24/5, y = 32/5$  esetben:

$$\left[ -\frac{10}{3}, -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{349}, -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{349} \right] = [-3.3333, 4.5605, -7.8938].$$

Ekkor tehát 2 negatív, 0 zérus és 1 pozitív sajátérték van (azaz  $\text{in}(C) = (1, 0, 2)$ ), ami azt jelenti, hogy az adott pont szigorú lokális maximumhely.

### 4.3. Egyenlőtlenségi feltételek

A következő általános esetet vizsgáljuk:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ h(x) &= 0, \\ g(x) &\leq 0, \end{aligned}$$

ahol  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  adott függvények és  $m + r < n$ .

**4.9. Definíció.** Ha  $g_j(x) = 0, x \in S$ , akkor  $j$ -edik egyenlőtlenségi feltételt aktívnek nevezzük. Az  $x \in S$  pontban aktív egyenlőtlenségi feltételek halmazát

$$\mathcal{A}(x) = \{j \mid g_j(x) = 0\}$$

jelöli. Egy  $g_j(x) \leq 0$  egyenlőtlenségi feltétel az  $x \in S$  pontban inaktív, ha  $g_j(x) < 0$ .

**4.10. Definíció.** Legyen  $x^* \in S$  és tegyük fel, hogy  $h, g \in C^1(S(x^*, \varepsilon))$  valamilyen  $\varepsilon > 0$  értékre. Az  $x^*$  pont reguláris, ha a

$$\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*), \nabla g_j(x^*) \quad (j \in \mathcal{A}(x^*))$$

gradiens vektorok lineárisan függetlenek.



Vezessük be az  $u = [u_1, \dots, u_r]^T \in \mathbb{R}^r$  változót az alábbiak szerint

$$g_1(x) + u_1^2 = 0, \dots, g_r(x) + z_r^2 = 0.$$

Legyen továbbá

$$\begin{aligned} F(x, z) &= f(x), \\ H_i(x, z) &= h_i(x) \quad (i = 1, \dots, m), \\ G_j(x, z) &= g_j(x) + z_j^2 \quad (j = 1, \dots, r), \end{aligned}$$

valamint  $H = [H_1, \dots, H_m]^T$  és  $G = [G_1, \dots, G_r]^T$ . Könnyű belátni, hogy ha  $x^*$  az eredeti feladat lokális minimumhelye, akkor az

$$\begin{bmatrix} x^* \\ \sqrt{-g_1(x^*)} \\ \vdots \\ \sqrt{-g_r(x^*)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+r}$$

pont az ekvivalens

$$\begin{aligned} F(x, z) &\rightarrow \min \\ H(x, z) &= 0, \\ G(x, z) &= 0, \end{aligned}$$

optimumfeladat lokális minimumhelye. Tehát alkalmazható rá a korábban megismert Lagrange-féle elmélet. Igazak a következő szükséges tételek. Az első tétel Carathéodory és John tétele:

**4.6. Tétel.** *Legyenek  $f, h_i$  és  $g_j$  ( $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$ ) folytonosan differenciálhatók egy  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  halmazon. Tegyük fel, hogy  $x^* \in G$  belső pont és egyúttal az (4.4) feladat lokális minimuma. Ekkor létezik  $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^m$  és  $\mu \in \mathbb{R}^r$  úgy, hogy*

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0,$$

$$\mu \geq 0, \quad \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x^*) = 0$$

és

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \neq 0.$$

A tétel

$$\mu \geq 0, \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x^*) = 0$$

szükséges feltételét szokás az alábbi ekvivalens formában is megadni:

$$\mu \geq 0, \mu_j g_j(x^*) = 0, \quad (j = 1, \dots, r).$$

A Carathéodory-John tétel híres következménye a következő Karush-Kuhn-Tucker tétel:

**4.7. Tétel.** *Legyenek  $f, h_i$  és  $g_j$  ( $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$ ) folytonosan differenciálhatók egy  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  halmazon. Tegyük fel, hogy  $x^* \in G$  belső pont és egyúttal az (4.4) feladat lokális minimuma. Ekkor létezik  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  és  $\mu \in \mathbb{R}^r$  úgy, hogy*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0,$$

$$\mu \geq 0, \quad \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x^*) = 0$$

és

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \neq 0.$$

A tétel alapján bevezethetjük a

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^r)$$

Lagrange-féle függvényt és az alábbi fogalmat.

**4.11. Definíció.** *Az  $x^* \in S$  pontot az (4.4) szélsőérték feladat KKTL-pontjának (Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange pontjának) nevezzük, ha léteznek  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  és  $\mu^* \in \mathbb{R}^r$  Lagrange-szorók úgy, hogy*

$$\mu^* \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \lambda^* \\ \mu^* \end{bmatrix} \neq 0,$$

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

és

$$(\mu^*)^T \cdot g(x^*) = 0.$$

Igaz a következő elégséges eredmény.

**4.8. Tétel.** Legyen  $x^* \in S$  az (4.4) szélsőérték feladat reguláris KKT-pontja és tegyük fel, hogy  $\mu_j^* > 0$  minden  $j \in \mathcal{A}(x^*)$  esetén. Tegyük fel továbbá, hogy  $f, h, g \in C^2(S(x^*, \varepsilon))$  valamilyen  $\varepsilon > 0$  értékre. Ha

$$y^T HL(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0$$

fennáll

$$\forall y \neq 0, \quad \nabla h(x^*)^T y = 0, \quad \nabla g_j(x^*)^T y = 0 \quad (\forall j \in \mathcal{A}(x^*))$$

esetén, akkor  $x^*$  szigorú lokális minimum pont.

A feltételes pozitív definittség ellenőrzésére vezessük az

$$A = HL(x^*, \lambda^*, \mu^*) \quad B = [\nabla h_i(x^*), \nabla g_j(x^*)] \quad (i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{A}(x^*))$$

és

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixokat. Jelöljük  $s$ -sel a  $B$  mátrix oszlopainak számát. Ha a  $C$  szegélyezett mátrixnak  $s$  negatív, 0 zérus és  $n$  pozitív sajátértéke van, akkor  $x^*$  szigorú lokális minimumhely. (Ez következik az előző részben bevezetett inerciára kimondott tételből),

A tétel alkalmazásához szükséges, hogy  $\mu_j^* > 0$  teljesüljön minden  $j \in \mathcal{A}(x^*)$  esetén.

**4.2. Példa.** Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min \\ g(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 + 3 \leq 0 \end{aligned}$$

feladatot! Az  $f$  és  $g$  gradiense

$$\nabla f(x_1, x_2) = [2x_1, 2x_2]^T,$$

$$\nabla g(x_1, x_2) = [1, 1]^T.$$

A Lagrange-függvény

$$L(x_1, x_2, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_1 + x_2 + 3).$$

A KKT-pontokra vonatkozó tétel szerint az alábbi egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \mu &= 0 \\ 2x_2 + \mu &= 0 \\ \mu(x_1 + x_2 + 3) &= 0 \end{aligned}$$

Innen  $\mu = 0$  esetén  $x_1 = 0$  és  $x_2 = 0$  adódik, amely nem KKT pont, mert  $g(0, 0) = 3 \not\leq 0$ .

$\mu \neq 0$  esetén  $x_1 = -\mu/2$  és  $x_2 = -\mu/2$  adódik, amit visszahelyettesítve a harmadik egyenletbe adódik, hogy  $\mu = 3$ . Innen  $x_1 = x_2 = -3/2$  megoldás adódik, amely KKT pont. Megállapíthatjuk, hogy az egyenlőtlenségi feltétel aktív,  $\mathcal{A} = \{1\}$  (így kaptuk a KKT pontot) és  $\mu > 0$ . A KKT pont nyilvánvalóan reguláris, valamint  $B = \nabla g(-3/2, -3/2) = [1, 1]^T$ . A szegélyezett mátrix

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek 2 pozitív és egy negatív sajátértéke van, így az inerciája:  $\text{in}(C) = (2, 0, 1)$ . Az elégségességi tétel alapján a KKT pontban szigorú lokális minimum van.

A  $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ , ill.  $\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0$  szükséges feltételeket elsőrendű optimalitási feltételeknek, a  $HL(x, \lambda)$ , ill.  $HL(x, \lambda, \mu)$  Hesse-mátrixok feltételes pozitív (szemi) definitységére vonatkozó feltételeket másodrendű feltételeknek nevezzük. Fontos speciális esetekben a másodrendű feltételek vizsgálata elhagyható. Ezeket a következő szakaszban vizsgáljuk.

## 4.4. A konvex optimalizálási feladat

**4.12. Definíció.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^n$  nemüres, konvex halmaz,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  egy  $D$ -n véges, konvex függvény,  $h_1, \dots, h_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konvex függvények, és  $g_1, \dots, g_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  affin függvények. Ekkor az

$$(4.5) \quad \begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ h_i(x) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \text{ és } x \in D \\ g_j(x) &\leq 0 \quad j = 1, \dots, r \text{ és } x \in D \end{aligned}$$

problémát konvex optimalizálási problémának nevezzük.

A Lagrange-féle függvény:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x).$$

A  $(\lambda_0, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_r)$  együtthatókat Lagrange szorzók-nak (vagy Lagrange multiplikátoroknak) nevezzük.

**4.9. Tétel** (Karush-Kuhn-Tucker szükséges feltétel). *Legyen  $x^*$  a (4.5) probléma megoldása. Ekkor léteznek olyan  $(\lambda_0, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_r)$  Lagrange szorzók, hogy*

1.  $\lambda_i, \mu_j \geq 0$  és  $\lambda_0 + \dots + \lambda_m + \mu_1 + \dots + \mu_r > 0$ ;
2.  $\mu_j g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, r$ ;
3.  $\min_{x \in D} L(x, \mu) = L(x^*, \mu)$ .

*Bizonyítás.* Legyen

$$\Lambda := \{ \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \text{létezik } x \in A, \text{ hogy} \\ f_i(x) \leq \lambda_i, \quad i = 0, \dots, m \text{ és } f(x_j(x)) = \lambda_j, \quad j = k+1, \dots, m \}.$$

Ekkor  $\Lambda \neq \emptyset$ , mert  $\lambda^* := (f_0(p), 0, \dots, 0) \in \Lambda$   $x = p$ -vel. Továbbá,  $\Lambda$  konvex, így  $\text{ri } \Lambda \neq \emptyset$  egy korábbi tétel miatt.

Bebizonyítjuk, hogy  $\lambda^* \notin \text{ri } \Lambda$ . Tegyük fel az ellenkezőjét. Ekkor létezik olyan pozitív  $\varepsilon$  valós szám, hogy  $\text{aff } \Lambda \cap B_\varepsilon(\lambda^*) \subset \Lambda$ . Mivel  $(f_0(p) + \varepsilon, 0, \dots, 0)$  eleme az előbbi metszetnek,  $(f_0(p) - \varepsilon, 0, \dots, 0)$  is eleme. Így létezik olyan  $x \in A$ , hogy  $f(x) \leq f_0(p) - \varepsilon$ , ami ellentmondás. Tehát  $\lambda^* \notin \text{ri } \Lambda$ . Az első szeparációs tétel szerint  $\lambda^*$  és  $\Lambda$  elválaszthatóak azaz, létezik  $\mu := (\mu_0, \dots, \mu_m) \neq (0, \dots, 0)$ , hogy

$$(4.6) \quad \sum_{i=0}^m \mu_i \lambda_i \geq \mu_0 f_0(p) \quad \text{minden } \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \Lambda \text{ esetén.}$$

Helyettesítsük  $\lambda$ -t a következő vektorokkal:

$$(f_0(p) + 1, 0, \dots, 0), (f_0(p), 1, 0, \dots, 0), \dots, (f_0(p), 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

ahol az utolsó vektorban a  $k$ . helyen áll 1. Ezzel kapjuk, hogy  $\mu_i \geq 0$ . Így az állítás első részét bebizonyítottuk.

Helyettesítsük most (4.6)-ben  $\lambda$  helyére a

$$(f_0(p), f_1(p), 0, \dots, 0), \dots, (f_0(p), 0, \dots, 0, f_k(p), 0, \dots, 0),$$

vektorokat. Az állítás első részét és azt a tényt felhasználva, hogy  $p$  lehetséges megoldás, kapjuk az állítás második részét.

Legyen  $x$  tetszőleges lehetséges megoldás. Ekkor  $(f_0(x), \dots, f_m(x)) \in \Lambda$ . Felhasználva ezt, az előző részt, (4.6), és az  $f_j(p) = 0, \quad j = k+1, \dots, m$  egyenleteket kapjuk a következőt:

$$L(x, \mu) = \sum_{i=0}^m \mu_i f_i(x) \leq \mu_0 f_0(p) = \sum_{i=0}^m \mu_i f_i(p) = L(x, \mu).$$

Ezzel a bizonyítás kész. □

**4.10. Tétel** (Karush-Kuhn-Tucker elegendő feltétel). *Tegyük fel, hogy a  $p$  pont lehetséges megoldása a (4.5) feladatnak és az előző tételbeli feltételek  $\mu_0 > 0$ -val teljesülnek, akkor  $p$  optimális megoldás is egyben.*

*Bizonyítás.* A tétel feltételei mellett tetszőleges  $x$  lehetséges megoldás esetén

$$\mu_0 f_0(x) \geq \mu_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x) \geq \mu_0 f_0(p) + \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(p) = \mu_0 f_0(p).$$

$\mu_0$ -al osztva kapjuk az állítást. □

## 5. fejezet

# Minimumkereső eljárások

Egy és többváltozós függvények minimumhelyének és minimumának meghatározására két fő lehetőség van:

1. Valamilyen gyökkereső eljárást (pl. Newton-módszert) alkalmazunk a  $\nabla f(x) = 0$  stacionárius egyenletre.
2. Direkt kereső eljárást alkalmazunk.

A fejezetben mindkét csoportba tartozó hatékony eljárásokat ismertetünk. A feltételes szélsőértékek meghatározásának általános módszereként a büntetőfüggvények módszerét ismertetjük.

### 5.1. Egyváltozós függvények kereső eljárásai

A direkt kereső eljárásoknál egy, az  $x^*$  minimumhelyet biztosan tartalmazó intervallumból indulunk ki. Ezt az úgynevezett befoglaló intervallumot (vagy más néven bizonytalansági intervallumot, mivel csak azt tudjuk, hogy a minimumpont itt keresendő, de a helyéről nincs információ) szűkítjük az eljárások során lépésről lépésre.

Ehhez nem teszünk mást, mint az intervallumot részekre osztjuk (általában két belső pont felvételével) és az osztópontokban a függvényértéket kiszámítjuk, a függvényértékek nagysága alapján fogjuk az új (szűkebb) bizonytalansági intervallumot meghatározni. Ahhoz, hogy az eljárás konvergens legyen a függvénynek bizonyos konvexitási, vagy más bizonyos tulajdonsággal kell rendelkeznie.

Megjegyezzük, hogy sok esetben anélkül is alkalmazzuk az alábbi eljárásokat, hogy meggyőződnenk a konvexitásról, ekkor azonban nincs garancia az eljárások konvergenciájára.

**5.1. Definíció.** Az  $f \in C[a, b]$  függvényt *unimodálisnak* nevezzük, ha tetsző-

legyen  $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$  esetén

$$x_2 \leq x^* \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$x_1 \geq x^* \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Az unimodális  $f$  függvény az  $x^*$  minimumhelytől balra szigorúan monoton csökkenő, tőle jobbra pedig szigorúan monoton növekvő. A szigorúan konvex és a szigorúan kvázikonvex függvények unimodálisak. Az unimodális függvények kereső eljárásai a következő észrevételen alapulnak.

**5.1. Tétel.** Legyen  $f \in C[a, b]$  unimodális függvény és  $a < c < d < b$ . Ekkor

(i) Ha  $f(c) < f(d)$ , akkor  $x^* \in [a, d]$ .

(ii) Ha  $f(c) > f(d)$ , akkor  $x^* \in [c, b]$ .

(iii) Ha  $f(c) = f(d)$ , akkor  $x^* \in [c, d]$ .

*Bizonyítás.*

(i) Tegyük fel, indirekt, hogy  $x^* > d$ . Ekkor az unimodalitás miatt  $x^*$ -től balra a függvény szigorúan monoton csökkenő, amelyből  $f(c) > f(d)$  adódik. Ez pedig ellentmond a  $f(c) < f(d)$  feltételnek. Így  $x^* \in [a, d]$ .

A többi rész igazolása hasonló. □

Megjegyezzük, hogy csak egy belső pontból származó információ alapján nem lehet a minimumhelyet tartalmazó intervallumot szűkíteni. A fenti tétel alapján a következő eljárást definiálhatjuk unimodális függvények minimumhelyének megkeresésére.

### 5.1.1. Általános minimum kereső algoritmus

```

1  Input  $[a_1, b_1]$ 
2  FOR  $k = 1, 2, \dots$ 
3      Legyen  $c_k, d_k \in (a_k, b_k)$  és  $c_k < d_k$ .
4      IF  $f(c_k) < f(d_k)$ 
5          THEN  $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = d_k$ 
6      IF  $f(c_k) > f(d_k)$ 
7          THEN  $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$ 
8      IF  $f(c_k) = f(d_k)$ 
9          THEN  $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = d_k$ 

```

A kapott

$$[a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots$$



intervallumsorozat közös pontként tartalmazza az  $x^*$  minimumhelyet. Ha  $b_k - a_k \rightarrow 0$ , akkor a minimumhely adott  $\varepsilon > 0$  pontosságú közelítését véges iterációs lépésben megkaphatjuk. A  $c_k$  vagy  $d_k$  pont ismételt felhasználásával az  $f$  függvény behelyettesítéseinek számát csökkenthetjük.

### 5.1.2. Dichotomous keresés

Legegyszerűbben úgy tudjuk biztosítani az új bizonytalansági intervallumok hosszának megegyezését, ha az intervallum középpontjától balra és jobbra azonos távolságra választjuk meg a pontokat. Jelölje a középponttól való távolságot, egy alkalmasan választott  $\delta > 0$  szám.

Ekkor:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k + b_k}{2} - \delta = a_k + \frac{L_k}{2} - \delta, \\ d_k &= \frac{a_k + b_k}{2} + \delta = a_k + \frac{L_k}{2} + \delta. \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Az új bizonytalansági intervallum számítása:

Ha  $f(c_k) > f(d_k)$ , akkor az új bizonytalansági intervallum  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$ .

Ha  $f(c_k) \leq f(d_k)$ , akkor az új bizonytalansági intervallum  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, d_k]$ .

Nyilvánvaló, hogy mindkét esetben  $L_{k+1} = \frac{L_k}{2} + \delta$ .

Az eljárást addig folytatjuk, amíg valamely  $k$ -ra  $L_k < 2\varepsilon$ , ahol  $\varepsilon > 0$  a pontossági előírás. Ekkor, ha a minimumpontot a megállásnál kapott  $[a_k, b_k]$  intervallum középpontjára választjuk, akkor  $\varepsilon$ -nál kisebb hibát követünk el a minimumpont közelítésében.

```

1  Input  $[a_1, b_1]$  és  $\delta, \varepsilon > 0$ 
2  WHILE  $b_k - a_k \geq 2\varepsilon$ 
3      Legyen  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \delta = a_k + \frac{L_k}{2} - \delta,$ 
            $d_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \delta = a_k + \frac{L_k}{2} + \delta.$ 
4      IF  $f(c_k) > f(d_k)$ 
5          THEN  $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$ 
6          ELSE  $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = d_k$ 
7       $k = k + 1$ 
```

**5.1. Példa.** Oldjuk meg az  $f(x) = x^2 - 7x + 12 \rightarrow \min!$  egyváltozós optimalizálási feladatot dichotomous módszerrel, ha a bizonytalansági intervallum  $[a, b] = [2, 4]$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\varepsilon = 0.4$ .

**Megoldás:**

1. lépés: Az első közelítésbeli bizonytalansági intervallum  $[a_1, b_1] = [2, 4]$ , melynek hossza  $L_1 = 2$ . A két közbülső pont és a hozzájuk tartozó függvényértékek:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + \frac{L_1}{2} - \delta = 2.7, & f(c_1) &= 0.39, \\ d_1 &= a_1 + \frac{L_1}{2} + \delta = 3.3, & f(d_1) &= -0.21 \end{aligned}$$

2. lépés: Mivel  $f(c_1) > f(d_1)$ , így az új bizonytalansági intervallum  $[a_2, b_2] = [2.7, 4]$ , melynek hossza  $L_2 = 1.3$ . A két közbülső pont és a hozzájuk tartozó függvényértékek:

$$\begin{aligned} c_2 &= 3.05, & f(c_2) &= -0.0475, \\ d_2 &= 3.65, & f(d_2) &= -0.2275 \end{aligned}$$

3. lépés: Mivel  $f(c_2) > f(d_2)$ , így az új bizonytalansági intervallum  $[a_3, b_3] = [2.7, 3.65]$ , melynek hossza  $L_3 = 0.95$ . A két közbülső pont és a hozzájuk tartozó függvényértékek:

$$\begin{aligned} c_3 &= 2.875, & f(c_3) &= 0.140625, \\ d_3 &= 3.475, & f(d_3) &= -0.24937500 \end{aligned}$$

4. lépés: Mivel  $f(c_3) > f(d_3)$ , így az új bizonytalansági intervallum  $[a_4, b_4] = [2.875, 3.65]$ , melynek hossza  $L_4 = 0.775$ . Itt megállunk, mivel  $L_4 < 2\varepsilon$ . A minimumpont közelítése  $x_{\min} \approx 3.2625$ . Általában kisebb  $\varepsilon$  értéket szokás megadni, de ezzel is elég közel kerültünk a pontos minimumhelyhez, az  $\bar{x} = 3.5$  értékhez.

**5.1.3. Aranymetszéses keresés**

Ez az eljárás egyike a leggyakrabban használtaknak. Előnye, hogy minden lépésben csak egy olyan új pont adódik, ahol ki kell kiszámolni a függvényértéket.

Legyen  $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$ . Ha az aranymetszéses keresés (Golden section) eljárás befejeződik, akkor az  $x^*$  lokális minimumhely a legfeljebb  $2\varepsilon$  hosszúságú  $[a_k, b_k]$  intervallumban van. Az intervallum bármelyik pontja választható az  $x^*$  közelítéséként. Célszerű azonban az  $\tilde{x} = \frac{a_k + b_k}{2}$  közelítést alkalmazni, mert ekkor biztosan teljesül az  $|\tilde{x} - x^*| < \varepsilon$  feltétel.

Az aranymetszés eljárása a következő:

```

1   $[a_1, b_1], \varepsilon > 0, k = 1$ 
2   $c_1 = a_1 + (1 - \tau)(b_1 - a_1), \quad F_c = f(c_1)$ 
3   $d_1 = b_1 - (1 - \tau)(b_1 - a_1), \quad F_d = f(d_1)$ 
4  WHILE  $b_k - a_k \geq 2\varepsilon$ 
5      IF  $F_c < F_d$ 
6          THEN  $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = d_k, d_{k+1} = c_k$ 
7               $c_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \tau)(b_{k+1} - a_{k+1})$ 
8               $F_d = F_c, \quad F_c = f(c_{k+1})$ 
9          ELSE  $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k, c_{k+1} = d_k$ 
10              $d_{k+1} = b_{k+1} + (1 - \tau)(b_{k+1} - a_{k+1})$ 
11              $F_c = F_d, \quad F_d = f(d_{k+1})$ 
12      $k = k + 1$ 

```

Az aranymetsző keresés sebessége lineáris. Ugyanis az  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$  intervallum hossza pontosan  $\tau$ -szorosa (0.628-szorosa) az  $[a_k, b_k]$  intervallum hosszának. Jelöljük el  $L_k$ -val az  $[a_k, b_k]$  hosszát, azaz  $L_k = b_k - a_k$ . Ekkor

$$L_{k+1} = \tau L_k = \tau^2 L_{k-1} = \dots = \tau^k L_1.$$

Ezért adott  $[a_1, b_1]$  intervallum és adott  $\varepsilon$  ismeretében előre meg lehet határozni, hogy hány lépést kell végrehajtanunk ahhoz, hogy  $L_{k+1}$  kisebb legyen  $\varepsilon$ -nál. Például, ha  $L_1 = 1$  és  $\varepsilon = 10^{-6}$ , akkor a  $\tau^k < 2 \cdot 10^{-6}$  egyenletet kell megoldanunk. Innen  $k > \frac{\log 2 \cdot 10^{-6}}{\log \tau} \approx 27.2694$ , azaz 28 intervallumot kell meghatározni.

**5.2. Példa.** Oldjuk meg az  $f(x) = x^2 - 7x + 12 \rightarrow \min!$  egyváltozós optimalizálási feladatot aranymetszés módszerrel, ha a bizonytalansági intervallum  $[a, b] = [2, 4]$ ,  $\varepsilon = 0.3$ .

**Megoldás:**

1. lépés: Az első közelítésbeli bizonytalansági intervallum  $[a_1, b_1] = [2, 4]$ , melynek hossza  $L_1 = 2$ . A két közbülső pont és a hozzájuk tartozó függvényértékek:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + 0.382 L_1 = 2.764, & f(c_1) &= 0.291696, \\ d_1 &= a_1 + 0.618 L_1 = 3.236, & f(d_1) &= -0.180304 \end{aligned}$$

2. lépés: Mivel  $f(c_1) > f(d_1)$ , így az új bizonytalansági intervallum  $[a_2, b_2] = [2.764, 4]$ , melynek hossza  $L_2 = 1.236$ . A két közbülső pont és a hozzájuk tartozó függvényértékek az alábbiak. Ne feledjük, hogy most a  $c_2$  pont az előző intervallumbeli  $d_1$  értékkel azonos.

$$\begin{aligned} c_2 &= d_1 = 3.236, & f(c_2) &= -0.180304, \\ d_2 &= a_2 + 0.382 L_2 = 3.527848, & f(d_2) &= -0.24922449 \end{aligned}$$

3. lépés: Mivel  $f(c_2) > f(d_2)$ , így az új bizonytalansági intervallum  $[a_3, b_3] = [3.236, 4]$ , melynek hossza  $L_3 = 0.764$ . A két közbülső pont és a hozzájuk tartozó függvényértékek az alábbiak. Ez esetben a  $c_3$  pont lesz az előző intervallumbeli  $d_2$  értékkel azonos.

$$\begin{aligned} c_3 = d_2 &= 3.527848, & f(c_3) &= -0.24922449, \\ d_3 = a_3 + 0.618 L_3 &= 3.70806, & f(d_3) &= -0.20671104 \end{aligned}$$

4. lépés: Mivel  $f(c_3) < f(d_3)$ , így az új bizonytalansági intervallum  $[a_4, b_4] = [3.236, 3.70806]$ , melynek hossza  $L_4 = 0.47206$ . Itt megállunk, mivel  $L_4 < 2\varepsilon$ . A minimumpont közelítése  $x_{\min} \approx 3.47203$ . Most még közelebb kerültünk a pontos minimumhelyhez (az  $\bar{x} = 3.5$  értékhez, mint a Dichotomous keresés esetén).

#### 5.1.4. Fibonacci keresés

A golden section módszernél láttuk, hogy a bizonytalansági intervallumok hossza minden lépésben azonos arányban csökken, azaz  $L_{k+1} = \alpha L_k$ . A Fibonacci módszernél a redukciós arány lépésről lépésre változik, de megmarad a golden section módszernek az a jó tulajdonsága, hogy az első intervallumban kettő, a többi intervallumban pedig csak egy függvény-kiértékelésre van szükség. Az eljárás alapját a Fibonacci számok képezik, amelyeket az alábbi rekurzív formula definiál:

$$\begin{aligned} F_0 &= F_1 = 1, \\ F_k &= F_{k-1} + F_{k-2} \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

A sorozat első néhány eleme: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

A módszer elején kiválasztunk egy  $n$  természetes számot, amelyet a lépésszám meghatározására fogunk használni a későbbiekben. A Fibonacci módszernél az  $n$  és a Fibonacci számok segítségével az alábbi formulákkal számítjuk ki az  $[a_k, b_k]$  intervallum belsejében a  $c_k, d_k$  pontokat:

$$\begin{aligned} c_k &= a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} L_k, \\ d_k &= a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} L_k. \end{aligned}$$

Az első intervallumbeli közbülső pontok számításánál a nevezőben mindig  $F_n$  áll, a számlálóban pedig attól kettővel ill. eggyel kisebb indexű Fibonacci szám áll. A további lépésekben a Fibonacci számok indexe mindig eggyel csökken.

### 5.1. Megjegyzés.

- Akár a baloldali, akár a jobboldali intervallum lesz az új bizonytalansági intervallum, mindkét esetben

$$L_{k+1} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} L_k.$$

és az intervallumok hosszára igaz a Fibonacci számok képzéséhez formailag hasonló összefüggés

$$L_k = L_{k+1} + L_{k+2}, \quad k = 1, 2, \dots, n-3.$$

- Akár a baloldali, akár a jobboldali intervallum lesz az új bizonytalansági intervallum, mindkét esetben az új bizonytalansági intervallumbeli egyik pont megegyezik az előző bizonytalansági intervallum egyik belső pontjával, azaz ha az új bizonytalansági intervallum  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$ , akkor

$$d_{k+1} = c_k,$$

ha pedig az új bizonytalansági intervallum  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, d_k]$ , akkor

$$c_{k+1} = d_k.$$

- A  $k = n-1$  esetben

$$c_{n-1} = d_{n-1}.$$

Ez az állítás azt fejezi ki, hogy egy bizonyos lépés után az algoritmus megáll, mivel a két belső pont megegyezik.

Összefoglalva, a Fibonacci módszernél az új bizonytalansági intervallum és abban lévő két pont számítása a következő:

Ha  $f(c_k) > f(d_k)$ , akkor az új bizonytalansági intervallum

$$\begin{aligned} [a_{k+1}, b_{k+1}] &= [c_k, b_k] \\ c_{k+1} &= d_k \\ d_{k+1} &= a_{k+1} + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} L_{k+1}, \end{aligned}$$

Ha  $f(c_k) \leq f(d_k)$ , akkor az új bizonytalansági intervallum

$$\begin{aligned} [a_{k+1}, b_{k+1}] &= [a_k, d_k] \\ c_{k+1} &= a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} L_{k+1} \\ d_{k+1} &= c_k. \end{aligned}$$

Az algoritmus:

```

1  Input  $[a_1, b_1]$  és  $n$ 
2   $L_1 = b_1 - a_1$ 
3   $c_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n} L_1$ 
4   $d_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} L_1$ 
5  FOR  $k=1$  TO  $n-1$  DO
6      IF  $f(c_k) > f(d_k)$ 
7          THEN  $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k, L_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1}$ 
8               $c_{k+1} = d_k, d_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} L_{k+1}$ 
9          ELSE  $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = d_k, L_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1}$ 
10              $c_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} L_{k+1}, d_{k+1} = c_k$ 

```

Az eljárást  $k = n - 1$  lépésig folytatjuk és a  $c_{n-1} = d_{n-1}$  közös értékre választjuk a minimumpontot. Ekkor a hiba, amit elkövethetünk legfeljebb  $L_{n-1}/2$ . Könnyen ellenőrizhető, hogy a közös érték nem más, mint a  $k = n - 1$  intervallum középpontja.

Az  $n$  értékét a következőképpen választjuk: Az első intervallum esetén kettő, a további intervallumokban csak egy függvény-kiértékelés szükséges. Ha az utolsó, azaz a  $k = n - 1$ -edik intervallumban is kiszámítjuk a függvény minimumát, akkor a függvény-kiértékelések száma  $n$ , tehát az előre nem definiált  $n$  a függvény-kiértékelések számát jelenti. Ha előírjuk, hogy a választott minimumpontnak legfeljebb  $\varepsilon > 0$  legyen a hibája, azaz

$$L_{n-1} < 2\varepsilon,$$

akkor az  $n$  értéke ennek a formulának a segítségével számítható. Itt a  $k + 1$ -edik intervallum hosszára az adódik, hogy

$$L_{k+1} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} L_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}} L_{k-1} = \dots = \frac{F_{n-k}}{F_n} L_1.$$

Ezt felhasználva,  $k = n - 2$  helyettesítéssel

$$L_{n-1} = \frac{F_2}{F_n} L_1 = \frac{2}{F_n} L_1.$$

A hibára vonatkozó képlet használható formában az alábbiak szerint írható

$$\frac{L_1}{F_n} < \varepsilon,$$

amelyből az adott kezdeti intervallumhossz ( $L_1$ ) és egy előre megadott pontossági tűrés ( $\varepsilon$ ) ismertében  $n$  értékét úgy kell megválasztani, hogy

$$F_n > \frac{L_1}{\varepsilon}.$$

**5.3. Példa.** Oldjuk meg az  $f(x) = x^2 - 7x + 12 \rightarrow \min!$  egyváltozós optimalizálási feladatot Fibonacci módszerrel, ha a bizonytalansági intervallum  $[a, b] = [2, 4]$ .

**Megoldás:**

Válasszuk meg az  $n$  értékét  $n = 4$ -re. Az algoritmushoz szükséges Fibonacci számok:  $F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5$ .

1. lépés: Az első közelítésbeli bizonytalansági intervallum  $[a_1, b_1] = [2, 4]$ , melynek hossza  $L_1 = 2$ . A két közbülső pont és a hozzájuk tartozó függvényértékek:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + \frac{F_2}{F_4} L_1 = 2 + \frac{2}{5} \cdot 2 = 2.8, & f(c_1) &= 0.24, \\ d_1 &= a_1 + \frac{F_3}{F_4} L_1 = 2 + \frac{3}{5} \cdot 2 = 3.2, & f(d_1) &= -0.16. \end{aligned}$$

2. lépés: Mivel  $f(c_1) > f(d_1)$ , így az új bizonytalansági intervallum  $[a_2, b_2] = [2.8, 4]$ , melynek hossza  $L_2 = 1.2$ . A két közbülső pont és a hozzájuk tartozó függvényértékek az alábbiak. A  $c_2$  pont az előző intervallumbeli  $d_1$  értékkel azonos.

$$\begin{aligned} c_2 &= d_1 = 3.2, & f(c_2) &= -0.16, \\ d_2 &= a_2 + \frac{F_1}{F_3} L_2 = 2.8 + \frac{2}{3} \cdot 1.2 = 3.6, & f(d_2) &= -0.24. \end{aligned}$$

3. lépés: Mivel  $f(c_2) > f(d_2)$ , így az új bizonytalansági intervallum  $[a_3, b_3] = [3.2, 4]$ , melynek hossza  $L_3 = 0.8$ . A két közbülső pont és a hozzájuk tartozó függvényértékek az alábbiak. Ez esetben a  $c_3$  pont lesz az előző intervallumbeli  $d_2$  értékkel azonos.

$$\begin{aligned} c_3 &= d_2 = 3.6, & f(c_3) &= -0.24, \\ d_3 &= a_3 + \frac{F_1}{F_2} L_3 = 3.2 + \frac{1}{2} \cdot 0.8 = 3.6, & f(d_3) &= -0.24 \end{aligned}$$

4. lépés: Mivel  $c_3 = d_3$ , így az algoritmust be kell fejezni. A minimumpont közelítése  $x_{\min} \approx 3.6$ , vagyis a közbülső pontok értéke.

Megfigyelhető, hogy a bizonytalansági intervallumok hosszának csökkenése minden lépésben a Fibonacci számok hányadosával arányos. Például az  $L_3 = \frac{F_2}{F_3} L_2$ .

Ha az  $n$  értékét önkényesen választjuk meg, akkor - mint ahogy tapasztaltuk - nem tudjuk befolyásolni a pontosságot. Amennyiben azt szeretnénk,

hogy a pontossági tűrés például  $\varepsilon = 0.05$  legyen, akkor az  $n$  értékét olyanra kell választani, hogy fennálljon az

$$F_n > \frac{L_1}{\varepsilon}.$$

összefüggés, ez pedig azt jelenti példánkban, hogy  $F_n > \frac{2}{0.05} = 40$ . A Fibonacci számokból adódik, hogy  $n = 9$ , mivel  $F_9 = 55$ .

### 5.1.5. Newton módszer

A klasszikus Newton módszer a  $g(x) = 0$  egyenlet gyökét keresi meg bizonyos feltételek (pl. folytonosan differenciálhatóság) mellett egy adott intervallumon. Ezt az eljárást alkalmazzunk most a stacionárius egyenlet megoldására. Tegyük fel, hogy az egyváltozós függvény, amelynek szélsőértékét keressük, kétszer differenciálható függvény. Induljunk ki egy  $x_1$  pontból és alkalmazzuk az  $f'(x) = 0$  egyenlet megoldására a Newton iterációs eljárást, amely a következő

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad k = 1, 2, \dots$$

Ezek után írjuk le az algoritmust a már megszokott pszeudókódban.

```

1  Input  $x_0$  és  $\varepsilon$ 
2   $k = 1$ 
3   $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ 
4  WHILE kilépési feltétel=hamis
5       $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ 
6       $k = k + 1$ 
```

Kilépési feltételként a következőket szokás használni:

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \frac{M}{2m} (x_k - x_{k-1})^2 \leq \varepsilon \quad (\text{egzakt hibabecslés}) \\ \text{(B)} \quad & |x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ha igazolni tudtuk a konvergenciát és becsülni az  $m$ ,  $M$  értékeket, akkor (A) egzakt hibabecslést végezhetünk, egyébként a (B)-t használjuk. Megjegyezzük azonban, hogy a (B) teljesülése esetén nem biztos, hogy a szélsőértékhez már elég közel vagyunk.

**5.4. Példa.** Keressük meg az  $f(x) = 4x - 4/3x^3 - e^x$  függvény szélsőértékét a  $[0, 1]$  intervallumon  $\varepsilon = 10^{-6}$  hibakorláttal Newton-módszerrel. Ekkor az  $f'(x) = 4 - 4x^2 - e^x = 0$  egyenletet kell megoldanunk Newton-módszerrel a  $[0, 1]$ . A számítások előtt igazoljuk a konvergenciát is.

**Megoldás.** A könnyen kiszámolható

$$f''(x) = -8x - e^x < 0 \quad \text{és} \quad f'''(x) = -8 - e^x < 0$$



deriváltakból azonnal látszik azok állandó előjele is az adott intervallumon; ezzel a konvergenciatétel első két feltételét igazoltuk. Az  $f'(0) = 3$  és  $f'(1) = -e$  értékek ellentétes előjele egyben az (iii) feltétel teljesülését jelenti. Az  $x_0 = 1$  választással pedig az utolsó feltétel is fennáll. Van tehát egyedüli  $x^*$  megoldás a  $[0, 1]$ -n és az a Newton-módszerrel megközelíthető. Az egzakt hibabecsléshez szükséges konstansok is könnyen adódnak: mindkét derivált abszolút értéke szigorúan monoton nő, így az első a minimumát az  $a$  helyen, a második pedig a maximumát a  $b$  helyen veszi fel. Tehát  $m = |f''(0)| = 1$  és  $M = |f'''(1)| = 10.72$ . Itt is előre kiszámolhatjuk a példára nézve állandó  $\beta = M/(2m) = 5.36$  értéket.

Az iterációk eredményeit itt is táblázatba foglaltuk.

| $i$ | $x$                                                                       | $hiba = \beta (x - x_{elozo})^2$ |
|-----|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| 0   | 1                                                                         |                                  |
| 1   | 0.74638828573                                                             | 0.35                             |
| 2   | 0.70459003270                                                             | $0.94 \times 10^{-2}$            |
| 3   | 0.70344043705                                                             | $0.71 \times 10^{-5}$            |
| 4   | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0.70343957116</span> | $0.41 \times 10^{-11}$           |

**5.5. Példa.** Oldjuk meg az  $f(x) = x^3 - 9x + 7 \rightarrow \min!$  egyváltozós optimalizálási feladatot Newton módszerrel, ha a kiinduló közelítő megoldás  $x_0 = 3$ ,  $\varepsilon = 0.005$  és a (B) kilépési feltételt használjuk.

**Megoldás:**

A függvény első és második deriváltjai:

$$f'(x) = 3x^2 - 9, \quad f''(x) = 6x$$

A közelítések:

$$x_1 = x_0 - \frac{3x_0^2 - 9}{6x_0} = 2$$

Az utolsó két közelítés távolsága:  $|x_1 - x_0| = 1 > \varepsilon$ .

$$x_2 = x_1 - \frac{3x_1^2 - 9}{6x_1} = 1.75$$

A hibabecslés:  $|x_2 - x_1| = 0.25 > \varepsilon$ .

$$x_3 = x_2 - \frac{3x_2^2 - 9}{6x_2} = 1.732050810$$

A hibabecslés:  $|x_3 - x_2| = 0.01794919 > \varepsilon$ .

$$x_4 = x_3 - \frac{3x_3^2 - 9}{6x_3} = 1.732050808$$

A hibabecslés:  $|x_3 - x_2| = 0.2 \cdot 10^{-8} < \varepsilon$ . A 4. közelítésben megkaptuk a  $x_{\min} = \sqrt{3}$  pontos értéket kilenc tizedes pontossággal.

## 5.2. Többváltozós függvények kereső eljárásai

### 5.2.1. A Newton-módszer

Legyenek  $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  többváltozós differenciálható valós függvények. Tekintsük az alábbi  $m$  egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ f_2(x) &= 0 \\ &\dots \\ f_m(x) &= 0 \end{aligned}$$

Közelítsük ezeket a függvényeket a többváltozós valós függvényekre megismert elsőfokú Taylor polinommal egy  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  helyen, azaz

$$\begin{aligned} f_1(x) &\approx f_1(x_k) + \nabla f_1(x_k)(x - x_k) \\ f_2(x) &\approx f_2(x_k) + \nabla f_2(x_k)(x - x_k) \\ &\dots \\ f_m(x) &\approx f_m(x_k) + \nabla f_m(x_k)(x - x_k) \end{aligned}$$

Legyen  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , az  $F$  vektor elemei legyenek az  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  függvények. Az  $F(x) = 0$  ( $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) egyenletrendszer esetén a Newton-módszer alakja

$$F(x) = F(x_k) + F'(x)(x - x_k),$$

ahol

$$F'(x) = \left[ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

a Jacobi mátrix. Innen kapjuk, hogy a közelítés sorozata (hasonlóan az egyváltozós esethez)

$$0 = F(x_k) + F'(x)(x_{k+1} - x_k),$$

ahonnan az

$$F'(x)(x_{k+1} - x_k) = -F(x_k)$$

egyenletrendszer adódik. Ha  $m = n$ , és  $F'(x)$  invertálható, akkor

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)]^{-1} F(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Mindkét formulát használják a Newton-módszernek, de az  $F'(x)$  Jacobi-mátrix invertálásának elkerülése miatt célszerű az eljárást az alábbi módon használni:

```

1  FOR  $k = 0, 1, \dots$ 
2       $F'(x_k) s_k = -F(x_k)$ 
3       $x_{k+1} = x_k + s_k$ 

```

Ha a Newton-módszert az  $F(x) = \nabla f(x) = 0$  stacionárius egyenletrendszerre alkalmazzuk, akkor a Jacobi mátrix alakja

$$F'(x) = Hf(x) = Hf(x) = \left[ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^n,$$

ami nem más mint az  $f$  függvény Hesse-mátrixa. A Newton-módszert itt is két alakban használjuk. Az első esetben nem kell invertálni. Ekkor a módszer alakja következő lesz:

```

1  FOR  $k = 0, 1, \dots$ 
2       $Hf(x_k) s_k = -\nabla f(x_k)$ 
3       $x_{k+1} = x_k + s_k$ 

```

Ezt az alakot a későbbiekben *Newton I. formulának* fogjuk nevezni.

Invertálást használva azt kapjuk, hogy az közelítő sorozat a következőképpen állítható elő:

```

1  FOR  $k = 0, 1, \dots$ 
2       $s_k = -(-H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$ 
3       $x_{k+1} = x_k + s_k$ 

```

Ezt az alakot *Newton II. formulának* fogjuk nevezni.

A  $Hf(x_k)$  együtthatómátrix szimmetrikus. Ha  $x_k \approx x_{\min}$  és  $Hf(x_{\min})$  pozitív definit, akkor  $Hf(x_k)$  is pozitív definit.

A Newton-módszer lépéenkénti számítási költsége 1 szimmetrikus lineáris egyenletrendszer megoldása, a  $\nabla f(x)$  a gradiens vektor és a  $Hf(x)$  Hesse-mátrix kiértékelése.

A Newton-módszer fenti alakját megkaphatjuk egy más, geometria jellegű okfejtéssel is! Közelítsük az  $f(x)$  függvényt az  $x_k$  pontban az

$$f(x_k + s) \approx q_k(\delta) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T s + \frac{1}{2} s^T Hf(x_k) s$$

kvadrátikus kifejezéssel. Ennek minimumhelyét a  $Hf(x_k) s = -\nabla f(x_k)$  egyenletrendszer megoldása adja, ahonnan az  $f(x)$  függvény minimumhelyének következő közelítése:

$$x_{k+1} = x_k - [Hf(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k).$$

**5.6. Példa.** *Határozzuk meg az*

$$f(x, y) = 4x^2 + 4xy + 2y^2 - 10x - 12y + 2$$

*függvény minimumát Newton módszerrel az  $x_1 = [0, 0]$  startvektorból kiindulva!*

**Megoldás:**

*A gradiensvektor és a Hesse mátrix a következő:*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 8x + 4y - 10 \\ 4x + 4y - 12 \end{bmatrix}, \quad Hf(x) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

*Az  $x_1$  pontban kiszámítva az értékeiket kapjuk, hogy*

$$\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} -10 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad Hf(x_1) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

*Első esetben használjuk a megoldás során a Newton I. formulát. Ekkor a megoldandó lineáris egyenletrendszer*

$$H(x_1)s_1 = -\nabla f(x_1)$$

*az  $s_1$  vektor két koordinátájára*

$$\begin{aligned} 8a + 4b &= 10 \\ 4a + 4b &= 12. \end{aligned}$$

*Innen a megoldás:  $a = -1/2 = -0.5$ ,  $b = 7/2 = 3.5$ , amelyből az  $x_2$  közelítés*

$$x_2 = x_1 + s_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}.$$

*Azt tapasztaltuk, hogy egy lépésben megkaptuk az optimumpontot. Könnyen ellenőrizhető, hogy az optimumpont  $x_{\min} = [-0.5, 3.5]$ . Az optimális célfüggvény érték  $f_{\min} = -33/2 = -11.5$ .*

*Most alkalmazzuk a Newton II. formulát. Ehhez ki kell számítanunk a Hesse mátrix inverzét, ami*

$$H^{-1}f(x) = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

*és így alkalmazva az*

$$s_k = -H(x_k)^{-1}\nabla f(x_k)$$

formulát azt kapjuk, hogy

$$s_k = - \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

Innen az előző formulához hasonlóan

$$x_2 = x_1 + s_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}.$$

A példában azt tapasztaltuk, hogy egyetlen lépésben megkaptuk az optimális megoldást. Ez mindig így van, ha a minimalizálandó függvény kvadratikusan. Emlékezzünk a Newton módszer második levezetésére, amikor az  $f$  függvényt annak másodfokú Taylor polinomjával helyettesítettük, ez pedig kvadratikusan függvényeknél mindig önmagával egyezik meg.

### 5.2.2. Módosított Newton-módszer

A Newton módszer alkalmazásánál előfordulhat, hogy a  $Hf(x_k)$  Hesse mátrix nem invertálható, vagy az  $s_k$  vektor nem csökkenő irány, vagy ha csökkenő is ( $\nabla f(x_k)s_k < 0$ ), azonban az  $x_{k+1}$  pontbeli függvényérték nem kisebb az  $x_k$  pontbeli függvényértéknél. Ezekon próbál segíteni a módosított Newton-módszer. (Emellett az is segít, ha a Newton módszert összekapcsoljuk egy vonalmenti optimalizálással. Ezt be is fogjuk mutatni a későbbiekben).

A módosított Newton-módszert az alábbi alakban szokás használni:

- 1 **FOR**  $k = 0, 1, \dots$
- 2      $[Hf(x_k) + E_k] s_k = -\nabla f(x_k)$
- 3      $x_{k+1} = x_k + s_k$

ahol  $E_k$  olyan diagonális mátrix, amelynek diagonális elemei nemnegatívak úgy, hogy  $\nabla^2 f(x_k) + E_k$  jól kondicionált pozitív definit lesz.

Az  $E_k$  diagonális mátrix megválasztására sokféle algoritmus ismert. Itt kettőt fogunk ismertetni. A legismertebb Gill és Murray eljárása. A másik az úgynevezett Levenberg-Marquardt módszer.

### 5.2.3. A Gill-Murray algoritmus

Legyen adott az  $A$  szimmetrikus mátrix, az  $\varepsilon \geq 0$  és  $\beta > 0$  paraméter. Az eljárás egy olyan  $R$  felső háromszögmátrixot és egy  $E = \text{diag}(\varepsilon_i) \geq 0$  diagonális mátrixot állít elő, amelyekre  $A + E = R^T R$  fennáll.

```

1  FOR  $i = 0, 1, \dots, n$ 
2       $\gamma_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{kj} r_{ki}, i \leq j \leq n$ 
3       $\mu_i = \max\{|\gamma_{ij}| : i < j \leq n\}$ 
4       $r_{ii} = \max\{\varepsilon, |\gamma_{ii}|^{1/2}, \frac{\mu_i}{\beta}\}$ 
5       $r_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{r_{ii}}, i < j \leq n$ 
6       $\varepsilon_i = r_{ii}^2 - \gamma_{ii}$ 

```

A  $\beta$  paraméter javasolt értéke

$$\beta^2 = \max \left\{ \frac{1}{n} \max\{|a_{ij}| : i \neq j\}, \max\{|a_{ii}| : 1 \leq i \leq n\} \right\}.$$

#### 5.2.4. A Levenberg-Marquardt módszer

A Hesse mátrixot most helyettesítsük egy  $B$  szimmetrikus pozitív definit mátrix-szal, amelyet a következőképpen definiálunk

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) + E\varepsilon_k,$$

ahol  $\varepsilon_k \geq 0$  paraméter, ezzel megnöveljük a Hesse mátrix főátlójában lévő elemek értékét. A Newton módszerben az  $s_k$  meghatározása a

$$Bs_k = (H(x_k) + E\varepsilon_k)s_k = -\nabla f(x_k)$$

egyenletrendszer megoldására fog módosulni. Az algoritmus során az  $\varepsilon_k$  paramétert módosítjuk, mégpedig egy arány függvényében. Ez az arány az  $\mathbf{x}_{k+1}$  és  $\mathbf{x}_k$  pontokbeli függvényértékek különbségének hányadosa, számlálójában a minimalizálandó függvény, nevezőben pedig annak kvadratikus közelítő függvénye szerepel. Legyen ez az arány  $R_k$ , képletben

$$R_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{q(x_k) - q(x_{k+1})}.$$

Levenberg és Marquardt az alábbi eljárást javasolta.

Induló lépés ( $k = 1$ ): Kiindulunk egy tetszőleges  $x_k \in \mathbb{R}^n$  vektorból és egy  $\varepsilon_k > 0$  paraméterből.

1. Kísérletet teszünk a  $Hf(x_k) + E\varepsilon_k$  mátrix Cholesky felbontására. Ha nem sikerül, akkor az  $\varepsilon_k$  paraméter értékét négyszeresére növeljük, azaz:  $\varepsilon_k := 4\varepsilon_k$ . Addig folytatjuk a kísérletet a Cholesky felbontására és az  $\varepsilon_k$  értékének módosítását, amíg nem sikerül a felbontás.
2. Ha sikerül a Cholesky felbontás, azaz a  $Hf(x_k) + E\varepsilon_k$  mátrix pozitív definit, akkor megoldjuk az  $(Hf(x_k) + E\varepsilon_k)s_k = -\nabla f(x_k)$  egyenlet-rendszert  $s_k$ -ra.
3. Meghatározzuk a következő közelítést:  $x_{k+1} = x_k + s_k$ .
4. Megállunk, ha  $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ , egyébként folytatjuk az eljárást a következő sorral.
5. Kiszámítunk az  $R_k$  arányt.  
 Ha  $0 < R_k < 0.25$ , akkor legyen  $\varepsilon_{k+1} = 4\varepsilon_k$ .  
 Ha  $R_k > 0.75$ , akkor legyen  $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_k$ .  
 Ha  $0.25 \leq R_k \leq 0.75$ , akkor legyen  $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ .  
 Ha  $R_k \leq 0$ , akkor legyen  $\varepsilon_{k+1} = 4\varepsilon_k$   
 és az  $x_{k+1}$  értékét visszaállítjuk  $x_k$ -ra, azaz  $x_{k+1} := x_k$ .
6. Folytatjuk az eljárást,  $k := k + 1$ .

### 5.2.5. Trust region módszerek

A trust-region módszereket Levenberg (1944), Marquardt (1963), valamint Goldfeld, Quandt és Trotter (1966) munkái nyomán fejlesztették ki. A trust-region módszerek azon alapulnak, hogy a  $q_k(s)$  kvadratikus modell csak az  $x_k$  közelében pontos. Legyen

$$\Omega_k = \{x : \|x - x_k\| \leq \Delta_k\}$$

az úgynevezett *trust region* (megbízhatósági tartomány). Az  $x_{k+1} = x_k + s_k$  közelítést  $\Omega_k$ -ban keressük: az  $s_k$  lépést az

$$\min \{q_k(s) \mid \|s\|_2 \leq \Delta_k\}$$

feltételes kvadratikus programozási feladat megoldásával adjuk meg, ahol a trust-region paraméter  $\Delta_k > 0$  valamilyen adott konstans. Ha  $\Delta_k$  elég nagy, akkor a megoldás azonos a feltétel nélküli kvadratikus esettel. Ha elég kicsi, akkor ez megszorítást jelent. A  $\Delta_k$  paraméter értékét az  $f(x)$  értékének becsült és tényleges csökkenését figyelembevéve változtatjuk

**A trust region módszer algoritmus**

```

1  INPUT  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta_0 > 0$ ,  $0 < \mu < \eta < 1$ ,  $0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2$ 
2  FOR  $i = 0, 1, \dots$ 
3      Határozzuk meg a  $\min \{q_k(s) : \|s\|_2 \leq \Delta_k\}$  feladat  $s_k$  közelítő megoldását!
4       $\rho_k := \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{f(x_k) - q_k(s_k)}$ 
5      IF  $\rho_k > \mu$ , THEN  $x_{k+1} := x_k + s_k$ , ELSE  $x_{k+1} := x_k$ .
6      Határozzuk meg  $\Delta_{k+1}$  értékét!

```

A  $\rho_k > \mu$  esetben az iterációs lépést *sikeresnek* nevezzük. A  $\rho_k \leq \mu$  esetben az iterációs lépést *sikertelennek* nevezzük. A  $\rho_k$  hányados jelentése:

$$\frac{\text{a függvény tényleges csökkenése}}{\text{a függvény jelzett csökkenése}}.$$

A  $\Delta_k$  paramétert megválasztó algoritmus a következő. **A  $\Delta_k$  update algoritmus:**

Legyen  $0 < \mu < \eta < 1$  és  $0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2$ .

- a) Ha  $\rho_k \leq \mu$ , akkor  $\Delta_{k+1} \in (0, \gamma_1 \Delta_k]$ .
- b) Ha  $\rho_k \in (\mu, \eta)$ , akkor  $\Delta_{k+1} \in [\gamma_1 \Delta_k, \Delta_k]$ .
- c) Ha  $\rho_k \geq \eta$ , akkor  $\Delta_{k+1} \in [\Delta_k, \gamma_2 \Delta_k]$ .

Az algoritmus a paraméterek megválasztására nem túl érzékeny. Néhány javasolt érték:  $\mu = 0.25$ ,  $\eta = 0.75$ ,  $\gamma_1 = 0.25$ ,  $\gamma_2 = 2$ .

A feltételes kvadratikusan optimalizálási probléma megoldására vonatkozik a következő

**5.1. Lemma** (Gay, 1981). *Az  $s = s(\lambda)$  vektor a  $\min \{q_k(s) : \|s\|_2 \leq \Delta_k\}$  feladat megoldása akkor és csak akkor, ha létezik  $\lambda \geq 0$  úgy, hogy*

$$(Hf(x_k) + \lambda I)s = -\nabla f(x_k), \quad \lambda (\|s\|_2^2 - \Delta_k^2) = 0$$

*fennáll.*

Eset szétválasztással adódik, hogy  $\lambda = 0$  és  $\|s\|_2 < \Delta_k$ , vagy  $\lambda > 0$  és  $\|s\|_2 = \Delta_k$ . Az utóbbi esetben a fenti feltételrendszer átmegy a

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f(x_k) + \lambda I)s(\lambda) &= -\nabla f(x_k) \\ \|s(\lambda)\|_2^2 &= \Delta_k^2 \end{aligned}$$

egyenletrendszerbe, amely  $\lambda$ -ra nézve nemlineáris. Ez relatíve könnyen megoldható iteratív úton.

Elég nagy  $k$  esetén  $\Delta_k$  már nem csökken, az  $\|s_k\| = \Delta_k$  feltétel inaktívvá válik,  $\lambda_k = 0$  lesz és  $s_k$  a Newton-lépéssel lesz azonos. A következőkben  $\lambda_k$ , ill.  $s_k$  meghatározásával foglalkozunk. Minthogy

$$s_k = s_k(\lambda_k) = -(Hf(x_k) + \lambda_k I)^{-1} \nabla f(x_k),$$



ezért az egyváltozós

$$\Delta_k = \|(\nabla^2 f(x_k) + \lambda_k I)^{-1} \nabla f(x_k)\|$$

egyenletet kell megoldanunk  $\lambda_k$ -ra. A Hesse-mátrix szimmetrikus, tehát van olyan  $Q$  ortogonális mátrix, hogy  $Hf(x_k) = Q\Gamma Q^T$ , ahol  $\Gamma = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Innen

$$\|s_k\|^2 = \|Q(\Gamma + \lambda_k I)^{-1} Q^T \nabla f(x_k)\|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{d_j^2}{(\alpha_j + \lambda_k)^2},$$

ahol  $d_j$  a  $Q^T \nabla f(x_k)$  vektor  $j$ -edik komponense. Mármost igaz, hogy

$$\frac{\sum_{j=1}^n d_j^2}{(\alpha_n + \lambda_k)^2} \leq \|s_k\|^2 \leq \frac{\sum_{j=1}^n d_j^2}{(\alpha_1 + \lambda_k)^2},$$

ahol  $\alpha_1$  a  $Hf(x_k)$  legkisebb,  $\alpha_n$  a legnagyobb sajátértéke. Tehát a  $\lambda_k$  megoldás az

$$\left[ \frac{\|d\|}{\Delta_k} - \alpha_n, \frac{\|d\|}{\Delta_k} - \alpha_1 \right]$$

intervallumban van. Az  $\alpha_1$  helyen  $\|s_k\|$ -nak szingularitása van. Ezért a Newton-módszer nem a legjobban viselkedik.

Hebden az  $\|s_k\| = \Delta_k$  egyenlet megoldása helyett javasolta az

$$\frac{1}{\Delta_k} - \frac{1}{\|s_k\|} = 0$$

egyenlet megoldását, amelynek már nincs szingularitása.

A gyakorlatban a  $\min \{q_k(s) \mid \|s\|_2 \leq \Delta_k\}$  feladat helyett a

$$\min \{q_k(s) \mid \|D_k s\|_2 \leq \Delta_k\}$$

alakot is használják, ahol  $D_k$  valamilyen skálázó mátrix. Ekkor az optimális megoldás  $s_k$  meghatározható az értelemszerűen módosított

$$(Hf(x_k) + \lambda D_k^T D_k) s = -\nabla f(x_k), \quad \lambda (\|D_k s\|_2^2 - \Delta_k^2) = 0$$

feltételből, ahol  $\lambda \geq 0$ .

### 5.2.6. Kvázi-Newton módszerek

A kvázi-Newton módszerek olyan közelítő Newton-módszerek, amelyek iterációnkénti számítási költsége (ideje) rendkívül kicsi és ezért a számítási összköltsége (ideje) is kisebb mint a Newton-módszereké. Alapgondolatuk a következő.

Vizsgáljuk  $F(x) = 0$  ( $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) nemlineáris egyenletrendszer! Legyen  $x_0 \approx x^*$ ,  $B_0 \approx F'(x^*)$ . A Newton-módszerben az  $F'(x_k)$  Jacobi-mátrixot kicseréljük egy alkalmas módon definiált  $B_k \approx F'(x_k)$  közelítő mátrixszal:

- 1 **FOR**  $k = 0, 1, \dots$
- 2      $B_k s_k = -F(x_k)$
- 3      $x_{k+1} = x_k + s_k$

A  $B_k$  mátrixot a  $B_{k-1}$  mátrixból nyerjük egy, vagy több diadikus mátrix hozzáadásával. A  $B_k$  alakja egyrangú módosítás (update) esetén

$$B_k = B_{k-1} + u_k v_k^T \quad (u_k, v_k \in \mathbb{R}^n),$$

kétrangú módosítás esetén pedig

$$B_k = B_{k-1} + u_k v_k^T + w_k z_k^T \quad (u_k, v_k, w_k, z_k \in \mathbb{R}^n).$$

A diadikus mátrixszal történő módosítás egy fontos előnyét mutatja a következő

**5.2. Tétel** (Sherman-Morrison-Woodbury). *Ha  $A$  nemszinguláris és fennáll, hogy  $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ , akkor*

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

Ha a  $B_{k-1}$  mátrix inverzét ismerjük, akkor  $B_k$  inverzét a fenti formulával  $O(n^2)$  flop művelettel tudjuk kiszámolni. Minthogy  $s_k = -B_k^{-1} F(x_k)$  és egy mátrix-vektor szorzás szintén  $O(n^2)$  flop, az új  $x_{k+1}$  közelítést összességében  $O(n^2)$  flop művelettel kaphatjuk meg.

A Gauss-eliminációval a  $Hf(x_k) s_k = -\nabla f(x_k)$  egyenletrendszer megoldásának műveletigénye  $O(n^3)$  flop. Ezért a kvázi-Newton módszerek használata lényeges számítási költség megtakarítást jelent. Hasonló eredményt lehet elérni a  $B_k$  mátrixok  $QR$ -felbontásával is.

A  $B_k$  mátrixoknak ki kell elégíteniük bizonyos feltételeket. Legyen

$$F(x) \approx L_k(x) = F(x_k) + B_k(x - x_k), \quad B_k \approx F'(x_k)$$

az  $F(x)$  függvény egy lineáris közelítése. Az  $x_{k+1}$  közelítést az  $L_k(x) = 0$  egyenletrendszer megoldása adja. A kvázi-Newton módszerek esetén kikötjük, hogy

$$\begin{aligned} L_{k+1}(x_k) &= F(x_k), \\ L_{k+1}(x_{k+1}) &= F(x_{k+1}). \end{aligned}$$

Vezessük be az  $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$  mennyiséget! Ekkor a fenti két feltételből kapjuk az úgynevezett

$$B_{k+1}s_k = y_k$$

szelő egyenletet. Az egyrangú kvázi-Newton update formulák általános alakja

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) z_k^T}{z_k^T s_k},$$

ahol  $z_k \in \mathbb{R}^n$  alkalmas módon megválasztott paraméter. Az optimális Broyden-módszer esetén  $z_k = s_k$ .

### 5.2.7. Broyden módszer

Az algoritmus:

- 1  $x_0 \approx x^*, B_0 \approx F'(x^*)$ .
- 2 **FOR**  $k = 0, 1, \dots$
- 3  $B_k s_k = -F(x_k)$
- 4  $x_{k+1} = x_k + s_k$
- 5  $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$
- 6  $B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k}$

A Newton-módszer konvergencia rendje 2. A kvázi-Newton módszerek konvergenciája a Jacobi mátrixot közelítő  $B_k$  mátrixok konstrukciója miatt csak szuperlináris. Ezért adott pontosságú közelítő megoldás eléréséhez a kvázi-Newton módszereknek általában több lépésre van szükségük. Azonban a lépések lényegesen kisebb számítási költsége miatt a kvázi-Newton módszerek számítási összköltsége, különösen nagyméretű feladatok esetén, sok esetben lényegesen kisebb mint a Newton-módszeré. Ezért a kvázi-Newton módszerek használata előnyös.

A minimalizálási feladatoknál közvetlenül alkalmazhatunk bármilyen kvázi-Newton módszert az  $F(x) = \nabla f(x)$  stacionárius egyenletre. Minthogy a stacionárius egyenletrendszer Jacobi mátrixa  $F'(x) = H(x) = Hf(x)$ , azaz  $f(x)$  Hesse-mátrixa, célszerű olyan kvázi-Newton módszereket alkalmazni, amelyekben a  $B_k$  mátrix szimmetrikus. Ezt biztosítják az egy- vagy kétrangú

diáddal dolgozó kvázi-Newton módszerek. A ma legjobbnak tartott eljárás a BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) módszer.

### 5.2.8. BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) eljárás

Az algoritmus:

```

1  FOR  $k = 0, 1, \dots$ 
2       $H_k s_k = -\nabla f(x_k)$ 
3       $x_{k+1} = x_k + s_k$ 
4       $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ 
5       $H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{H_k s_k s_k^T H_k}{s_k^T H_k s_k}$ 

```

Itt a  $B_k$  mátrixot a Hesse-mátrixra való utalásként  $H_k$ -szel is jelölhetnénk.

A  $B_k$  mátrixok kiszámítására többféle módszer létezik. A

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}$$

formulát kétrangú formulának szokás nevezni. Az úgynevezett egyrangú formula a következő:

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k)(y_k - B_k s_k)^T}{(y_k - B_k s_k)^T s_k}$$

### 5.2.9. A vonalmenti minimalizálás algoritmus

A direkt minimumkereső eljárások közül az egyik legbeváltabb módszertípus vonalmenti (iránymenti) minimalizálásokon alapul. általános alakja a következő.

**A vonalmenti minimalizálás algoritmus**

```

1  INPUT  $x_1$ 
2  FOR  $k = 1, 2, \dots$ 
3      Válasszunk  $s_k \in \mathbb{R}^n$  keresési irányt!
4      Határozzuk meg az  $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$  értéket, amelyre
           $f(x_k + \alpha_k s_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha s_k)$ .
5   $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$ 

```

Az eljárástól megköveteljük az

$$f(x_1) \geq f(x_2) \geq \dots \geq f(x_k) \geq f(x_{k+1}) \geq \dots$$

csökkenési feltételt. Ez teljesül, ha az  $s_k$  irányt úgy választjuk meg, hogy fennálljon

$$g'(0) = \nabla f(x_k)^T s_k < 0.$$

Ekkor  $g'(0) < 0$  miatt a  $g(\alpha)$  függvény csökkenő az  $\alpha = 0$  helyen. Következésképpen létezik  $\alpha_k > 0$ , hogy  $f(x_{k+1}) = f(x_k + \alpha_k s_k) \leq f(x_k)$ . A tapasztalatok szerint az  $f(x_k)$  függvényértékek csökkenése nem lehet túl gyors. Az alábbi három heurisztikus feltételt a gyakorlati eljárások kielégítik.

### 5.2.10. Armijo-Goldstein feltételek

$$(5.1) \quad f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \alpha_k \rho \nabla f(x_k)^T s_k,$$

$$(5.2) \quad f(x_k) + \alpha_k \sigma \nabla f(x_k)^T s_k \leq f(x_{k+1}),$$

ahol  $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\sigma \in (\rho, 1)$  fix paraméterek.

A gyakorlatban  $\rho = \frac{1}{10}$  ( $\sigma = 1 - \rho$ ), vagy kisebb. Az Armijo-Goldstein feltételek azt biztosítják, hogy a függvényértékek se túl lassan, se túl gyorsan ne csökkenjenek:  $\alpha_k > 0$  és  $\nabla f(x_k)^T s_k < 0$  miatt  $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ , de

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \alpha_k \left| \nabla f(x_k)^T s_k \right|.$$

Egy  $\alpha_k$  lépéshossz akkor és csak akkor elégíti ki a két Armijo-Goldstein feltételt, ha

$$(5.3) \quad g(0) + \alpha_k \sigma g'(0) \leq g(\alpha_k) \leq g(0) + \alpha_k \rho g'(0).$$

### 5.3. Iránykeresési módszerek

Számos lehetőség van az  $\{s_k\}$  kutatási irányok megválasztására:

- 1. A leggyorsabb lecsökkenés módszere:**  $s_k = -\nabla f(x_k)$ ;
- 2. Newton-szerű módszerek:**  $s_k = -B_k^{-1} \nabla f(x_k)$ , ahol  $B_k$  szimmetrikus pozitív definit mátrix.

Mindkét esetben a csökkenő tulajdonság teljesül. A leggyorsabb lecsökkenés módszerénél

$$\nabla f(x_k)^T s_k = -\|\nabla f(x_k)\|^2 < 0 \quad (\nabla f(x_k) \neq 0).$$

A  $B_k^{-1}$  pozitív definitisége miatt a Newton-szerű módszereknél

$$\nabla f(x_k)^T s_k = -\nabla f(x_k)^T B_k^{-1} \nabla f(x_k) < 0 \quad (\nabla f(x_k) \neq 0).$$

### 5.3.1. Gradiens módszer (Cauchy módszer, 1847)

Mint tudjuk, a gradiens vektor a függvény legnagyobb növekedésének irányába mutat. Legkézenfekvőbb tehát a  $d$  kereső irányra a  $d = -\nabla f(x)$  választás, hisz ebben az irányban várható a függvény legnagyobb csökkenése. Szokás ezt a módszert a legnagyobb csökkenés módszerének is nevezni. A módszer lényege az alábbiakban foglalható össze.

#### Gradiens módszer algoritmus

1 INPUT:  $k = 0$  és  $x_k \in \mathbb{R}^n$  pont.

2 FOR  $k = 1, 2, \dots$

3  $s_k = -\nabla f(x_k)$

4  $\alpha_k > 0 : f(x_k + \alpha_k s_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha s_k)$

5  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$

Megállási feltétel lehet például ha  $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ , vagy ha  $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$ .

**5.7. Példa.** Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot gradiens módszerrel. Legyen az  $x_1 = (0, 0)$  a startvektor és legyen  $\varepsilon = 0.005$  a pontossági tűrés.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 + x_2 + 5 \rightarrow \min!$$

#### Megoldás:

A célfüggvény gradiense

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1 \end{bmatrix}$$

1. lépés:  $x_1 = (0, 0)$

$$\nabla f(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s_1 = -\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Innen  $x = x_1 + \alpha s_1 = (\alpha, -\alpha)$ . Az egyváltozós optimalizálási feladat és megoldása:  $\varphi(\alpha) = f(\alpha, -\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 5 \rightarrow \min!$ , amelyből  $\alpha_1 = 1$

2. lépés:  $x_2 = x_1 + \alpha_1 s_1 = (\alpha_1, -\alpha_1) = (1, -1)$ . Innen  $s_2 = -\nabla f(x_2) = (1, 1)$  és  $x = x_2 + \alpha s_2 = (1 + \alpha, -1 + \alpha)$ . Az egyváltozós optimalizálási feladat és megoldása:  $\varphi(\alpha) = f(1 + \alpha, -1 + \alpha) = 5\alpha^2 - 2\alpha + 4 \rightarrow \min!$

Ennek megoldása  $\alpha_2 = \frac{1}{5}$

3. lépés:  $x_3 = x_2 + \alpha_2 s_2 = \left(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ , ahonnan

$$s_3 = -\nabla f(x_3) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right), x = x_3 + \alpha s_3 = \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{5}\alpha, -\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\alpha\right).$$

*Az egyváltozós optimalizálási feladat és megoldása:*

$$\varphi(\alpha) = f\left(\frac{6}{5} + \frac{1}{5}\alpha, -\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\alpha\right) = \frac{1}{25}\alpha^2 - \frac{2}{25}\alpha + \frac{19}{5} \rightarrow \min!$$

*Innen  $\alpha_3 = 1$*

$$4. \text{ lépés: } x_4 = x_3 + \alpha_3 s_3 = \left(\frac{7}{5}, -1\right), s_4 = -\nabla f(x_4) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \\ x = x_4 + \alpha s_4 = \left(\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\alpha, -1 + \frac{1}{5}\alpha\right).$$

*Az egyváltozós optimalizálási feladat és megoldása:*

$$\varphi(\alpha) = f\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\alpha, -1 + \frac{1}{5}\alpha\right) = \frac{1}{5}\alpha^2 - \frac{2}{25}\alpha + \frac{94}{25} \rightarrow \min!$$

*ahonnan  $\alpha_4 = \frac{1}{5}$*

$$5. \text{ lépés: } x_5 = x_4 + \alpha_4 s_4 = \left(\frac{36}{25}, -\frac{24}{25}\right), s_5 = -\nabla f(x_5) = \left(\frac{1}{25}, -\frac{1}{25}\right), \\ x = x_5 + \alpha s_5 = \left(\frac{36}{25} + \frac{1}{25}\alpha, -\frac{24}{25} - \frac{1}{25}\alpha\right).$$

*Az egyváltozós optimalizálási feladat és megoldása:*

$$\varphi(\alpha) = f\left(\frac{36}{25} + \frac{1}{25}\alpha, -\frac{24}{25} - \frac{1}{25}\alpha\right) = \frac{1}{625}\alpha^2 - \frac{2}{625}\alpha + \frac{469}{125} \rightarrow \min!$$

*Innen  $\lambda_5 = 1$*

6. lépés:  $x_6 = x_5 + \alpha_5 s_5 = \left(\frac{37}{25}, -1\right) = (1.48, -1)$ . Az eljárást befejezzük, mert az 5. lépésben már elég közel kerültünk a minimumhelyhez, amely  $x = (1.5, -1)$ .

### 5.3.2. Konjugált gradiens módszer (Fletcher, Reeves)

Első lépésként definiáljuk a konjugált vektorok fogalmát. Legyen  $C$  egy  $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix. A  $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  vektorokat  $C$ -konjugáltaknak

vagy egyszerűen konjugáltaknak nevezzük, ha lineárisan függetlenek és  $v_i^T C v_j = 0$  minden  $i \neq j$  esetén.

Az irány megválasztására eddig sok módszert láttunk, a gradiens módszerben  $s_k = -\nabla f(x_k)$ , a későbbiekben ismertetésre kerülő DFP módszerben  $s_k = -D_k \nabla f(x_k)$ . A DFP módszer úgy is felfogható, hogy nem a legnagyobb csökkenés irányába mutató vektort használjuk irányvektornak, hanem annak egy mátrix-szal szorzott transzformáltját. A konjugált gradiens módszerben sem a gradiens vektor  $(-1)$ -szeresét használjuk irányvektornak, hanem ahhoz egy vektort adunk hozzá, amely az előző lépésben használt irányvektor irányába mutat, képletben

$$s_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \alpha_k s_k.$$

Több módszer ismert az  $\alpha_k$  szorzóra, Fletcher és Reeves az alábbi szorzót javasolta

$$\alpha_k = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|^2}.$$

#### **Fletcher-Reeves módszer algoritmus:**

Induló lépés ( $k = 1$ ): Kiindulunk egy tetszőleges  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  vektorból és a  $s_k = -\nabla f(x_k)$  irányvektorból.

Közbülső lépés:

1. Megállunk, ha  $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$ , egyébként folytatjuk az eljárást a következő sorral.
2. Megoldjuk a  $\min \{f(x_k + \lambda s_k) : \lambda \geq 0\}$  minimalizálási feladatot  $\lambda$ -ra, legyen az optimális megoldás  $\lambda_k$ .
3. Meghatározzuk a következő közelítést:  $x_{k+1} = x_k + \lambda_k s_k$ .
4. Irányvektor meghatározása:  $s_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2} s_k$ .
5. Folytatjuk az eljárást,  $k := k + 1$ .

**5.3. Tétel.** *Legyen a minimalizálandó függvény kvadratikus, azaz  $f(x) = cx + \frac{1}{2}xHx$ . Alkalmazzuk ennek a feladatnak a megoldására a Fletcher-Reeves módszert, amelyben a kiindulásnál legyen  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  tetszőleges vektor és  $s_1 = -\nabla f(x_1)$ . Végezzünk el  $n$  darab iterációt. Ha minden  $k = 1, 2, \dots, n$  esetén  $\nabla f(x_k) \neq 0$ , akkor igazak az alábbi állítások*

- (1)  $s_1, s_2, \dots, s_n$  kereső irányok  $H$  – konjugáltak,



(2)  $s_1, s_2, \dots, s_n$  kereső irányok javító (csökkenő) irányok

$$(3) \alpha_k = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2} = \frac{s_k^T H \nabla f(x_{k+1})}{s_k^T H s_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

**5.8. Példa.** Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot Fletcher-Reeves módszerrel. Legyen az  $x_1 = (0, 0)$  a startvektor és legyen  $\varepsilon = 0.005$  a pontossági tűrés.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 + x_2 + 5 \rightarrow \min!$$

**Megoldás:**

A célfüggvény gradiense:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1 \end{bmatrix}$$

1. lépés: Az első lépés megegyezik a gradiens módszerrel.

$$x_1 = (0, 0), \quad s_1 = -\nabla f(x_1) = (1, -1), \quad x = x_1 + \lambda s_1 = (\lambda, -\lambda)$$

Az egyváltozós optimalizálási feladat és megoldása:

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda, -\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \rightarrow \min!$$

$$\lambda_1 = 1$$

2. lépés:  $x_2 = x_1 + \lambda_1 s_1 = (\lambda_1, -\lambda_1) = (1, -1)$ ,  $\nabla f(x_2) = (-1, -1)$ .

Ettől a lépéstől térünk el a gradiens módszertől, mert az irányvektor meghatározása kissé bonyolultabb. Ehhez számítsuk ki a két utolsó közelítéshez tartozó gradiensek hosszának négyzetét:

$$\|\nabla f(\mathbf{x}_1)\|^2 = 2, \quad \|\nabla f(\mathbf{x}_2)\|^2 = 2$$

Az új irányvektor

$$s_2 = -\nabla f(x_2) + \frac{\|\nabla f(x_2)\|^2}{\|\nabla f(x_1)\|^2} s_1 = (2, 0)$$

$$x = x_2 + \lambda s_2 = (1 + 2\lambda, -1)$$

Az egyváltozós optimalizálási feladat és megoldása:

$$\varphi(\lambda) = f(1 + 2\lambda, -1) = 4\lambda^2 - 2\lambda + 4 \rightarrow \min!$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}$$

3. lépés:  $x_3 = x_2 + \lambda_2 s_2 = (\frac{3}{2}, -1)$ ,  $s_3 = -\nabla f(x_3) = (0, 0)$ .

Mivel az  $\mathbf{x}_3$  közelítéshez tartozó gradiensvektor zérus, így befejezzük az eljárást.

Az  $x = (1.5, -1)$  pontban teljesül a minimum szükséges feltétele, így megkaptuk az optimális megoldást.

Mivel a minimalizálandó függvényünk kvadratikus, így érvényes a Fletcher-Reeves módszerre a fentebb közölt tétel állításai.

### 5.3.3. Newton-módszer vonalmenti minimalizálással

Tekintsük most néhány Newton-típusú módszer vonalmenti minimalizálással kiegészített változatát!

```

1  FOR  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
2       $Hf(x_k) s_k = -\nabla f(x_k)$ 
3       $\alpha_k > 0 : f(x_k + \alpha_k s_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha s_k)$ 
4       $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$ 

```

### 5.3.4. Módosított Newton-módszer vonalmenti minimalizálással

```

1  FOR  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
2       $[Hf(x_k) + E_k] s_k = -\nabla f(x_k)$ 
3       $\alpha_k > 0 : f(x_k + \alpha_k s_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha s_k)$ 
4       $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$ 

```

Az egyik legismertebb, vonalmenti minimalizálást is használó kvázi-Newton módszer a Davidon-Fletcher-Powell-féle DFP eljárás.

### 5.3.5. DFP (Davidon-Fletcher-Powell) eljárás

Adott egy  $x_1$  kiinduló pont és egy szimmetrikus pozitív definit  $D_1$  mátrix.

```

1  FOR  $k = 1, 2, \dots$ 
2       $d_k = -D_k \nabla f(x_k)$ 
3       $\lambda_k > 0 : f(x_k + \lambda_k s_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha s_k)$ 
4       $s_k = \lambda_k d_k$ 
5       $x_{k+1} = x_k + s_k$ 
6       $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ 
7       $D_{k+1} = D_k + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k} - \frac{D_k y_k y_k^T D_k}{y_k^T D_k y_k}$ 

```

Itt is, hasonlóan a BFGS-módszerhez, beszélhetünk egyrangú illetve kétrangú formuláról. A

$$D_{k+1} = D_k + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k} - \frac{D_k y_k y_k^T D_k}{y_k^T D_k y_k}$$

formula az úgynevezett kétrangú formula. Az egyrangú formula a következő:

$$D_{k+1} = D_k + \frac{(s_k - D_k y_k)(s_k - D_k y_k)^T}{(s_k - D_k y_k)^T y_k}.$$

**5.9. Példa.** Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot Davidon-Fletcher-Powell módszerrel a kétrangú formulát használva a  $D_k$  előállítására.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 + x_2 + 5 \rightarrow \min!$$

Legyen az  $x_1$  startvektor és a Hesse mátrixot helyettesítő  $D_1$  startmátrix az alábbi.

$$x_1 = (0, 0), \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Megoldás:**

Előkészületként határozzuk meg a célfüggvény gradiensét

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1 \end{bmatrix}$$

1. lépés: Az első lépés megegyezik a gradiens módszerrel.

$$\begin{aligned} x_1 &= (0, 0), \\ \nabla f(x_1) &= (-1, 1), \\ d_1 &= -D_1 \nabla f(x_1) = (1, -1), \\ x &= x_1 + \lambda d_1 = (\lambda, -\lambda) \end{aligned}$$

Az egyváltozós optimalizálási feladat és megoldása:

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda, -\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \rightarrow \min!$$

Ennek megoldása:  $\lambda_1 = 1$

2. lépés:

$$x_2 = x_1 + \lambda_1 d_1 = (\lambda_1, -\lambda_1) = (1, -1)$$

Most előkészítjük a  $D_2$  mátrix számítását.

$$\begin{aligned}
\nabla f(\mathbf{x}_2) &= (-1, -1) \\
s_1 &= x_2 - x_1 = \lambda_1 d_1 = (1, -1), \\
y_1 &= \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1) = (0, -2) \\
D_1 y_1 &= (0, -2) \\
s_1 s_1^T &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
s_1^T y_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \\
(D_1 y_1)(D_1 y_1)^T &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\
(D_1 y_1)^T y_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 4 \\
D_2 &= D_1 + \frac{s_1 s_1^T}{s_1^T y_1} - \frac{(D_1 y_1)(D_1 y_1)^T}{(D_1 y_1)^T y_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Az  $x_2$  ponthoz tartozó irányvektor:  $d_2 = -D_2 \nabla f(x_2) = (1, 0)$

$x = x_2 + \lambda d_2 = (1 + \lambda, -1)$ .

Az egyváltozós optimalizálási feladat és megoldása:

$\varphi(\lambda) = f(1 + \lambda, -1) = \lambda^2 - \lambda + 4 \rightarrow \min!$

Ennek megoldása:  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

3. lépés:

$x_3 = x_2 + \lambda_2 d_2 = (1 + \lambda_2, -1) = (\frac{3}{2}, -1)$

Most jön a  $D_3$  mátrix számítása.

$\nabla f(x_3) = (0, 0)$ .

Mivel az  $x_3$  közelítéshez tartozó gradiensvektor zérus, így befejezzük az eljárást. Az  $x = (1.5, -1)$  pontban teljesül a minimum szükséges feltétele, így megkaptuk az optimális megoldást.

Mivel a minimalizálandó függvényünk kvadratikus, folytassuk tovább a számítást, hogy az algoritmushoz közölt tételek állításainak helyességét ellenőrizhessük.

$$\begin{aligned}
s_2 &= x_3 - x_2 = \lambda_2 d_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \\
y_2 &= \nabla f(x_3) - \nabla f(x_2) = (1, 1), \\
D_2 y_2 &= (1, 0) \\
s_2 s_2^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
s_2^T y_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \\
(D_2 y_2)(D_2 y_2)^T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
(D_2 y_2)^T y_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \\
D_3 &= D_2 + \frac{s_2 s_2^T}{s_2^T y_2} - \frac{(D_2 y_2)(D_2 y_2)^T}{(D_2 y_2)^T y_2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A célfüggvény Hesse mátrixa:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

és ellenőrizhetjük a fenti tételek egyik állításának helyességét, miszerint a  $D_3$  mátrix a Hesse mátrix inverze.

A Davidon-Fletcher-Powell módszer az egyik leggyakrabban alkalmazott eljárás.

### 5.3.6. Hooke-Jeeves módszer

Végül megadunk egy egyszerű, lassú, de sok esetben használható eljárást.

Az  $s_k$  irányok ciklikusan rendre az  $e_1, e_2, \dots, e_n$   $n$ -dimenziós egységkoordináta irányok. Képletben kifejezve

$$s_{in+j} = e_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots$$

A Hooke-Jeeves módszer bizonyos esetekben nem konvergál. Ennek oka az  $s_k$  irányok rögzítése. Szokás az  $s_{in+j} = \pm e_j$  választással élni, aszerint,

hogy az  $f(x_{in+j} + e_j) \leq f(x_{in+j})$ , vagy  $f(x_{in+j} - e_j) \leq f(x_{in+j})$  feltételek közül melyik teljesül. Más hatékonyabb módszerek pl. Rosenbrock-módszer az irányokat nem rögzítik, hanem valamilyen elv alapján változtatják.

## 5.4. A büntetőfüggvény módszerek

Az alábbiakban közölt módszerek alapgondolata az, hogy a feltételes optimalizálási feladat megoldását visszavezetjük feltétel nélküli optimalizálási feladatok sorozatos megoldására. Ezt a megoldási eljárást szokás SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) módszer néven is emlegetni. Két változatát ismertetjük, az egyik a büntetőfüggvényes eljárás, a másik a korlátfüggvényes eljárás. Mindkét módszer lényege az, hogy a feltételeket beépíti a célfüggvénybe, így kapunk egy feltételnélküli optimalizálási feladatot.

Ezen két módszer közül mi a büntetőfüggvények módszerét ismertetjük.

Vizsgáljuk elsőként az

$$(5.4) \quad \begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ h(x) &= 0 \end{aligned}$$

egyenlőségi feltétellel megadott szélsőérték feladatot, ahol  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . A SUMT módszerek alapgondolata R. Couranttól származik 1943-ból. Az ötlet a következő: Vezessük be a

$$(5.5) \quad \Phi(x, \sigma) = f(x) + \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^m h_i^2(x) = f(x) + \frac{\sigma}{2} h(x)^T h(x) = f(x) + \frac{\sigma}{2} \|h(x)\|_2^2$$

*büntetőfüggvényt* és az eredeti feladat helyett vizsgáljuk a

$$(5.6) \quad \Phi(x, \sigma) \rightarrow \min$$

feltétel nélküli szélsőérték feladatot a  $\sigma > 0$  *büntető paraméter* különböző értékeire!

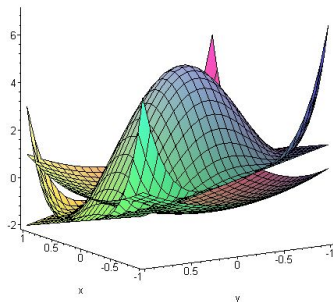
Ha  $x \in S = \{x \mid h(x) = 0\}$ , akkor  $\Phi(x, \sigma) = f(x)$ . Ha  $x \notin S$ , akkor van legalább egy  $i_0$  index, hogy  $h_{i_0}(x) \neq 0$ . Ezért

$$\Phi(x, \sigma) = f(x) + \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^m h_i^2(x) \geq f(x) + \frac{\sigma}{2} h_{i_0}^2(x) > f(x).$$

Tehát  $\Phi(x, \sigma) > f(x)$  attól függően, hogy milyen mértékben tér el  $h(x)$  a 0 vektortól és mekkora a  $\sigma$  paraméter. Ha  $\sigma$  nagyobb, a büntetés is nagyobb.

Vizsgáljuk meg a következő két egyszerű példát!

**5.10. Példa.** Az  $f(x, y) = -x - y \rightarrow \min$ ,  $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  feladat célfüggvényét, megengedett megoldásainak halmazát és a  $\sigma = 10$  értékhez tartozó büntetőfüggvényt ábrázolja az alábbi ábra.



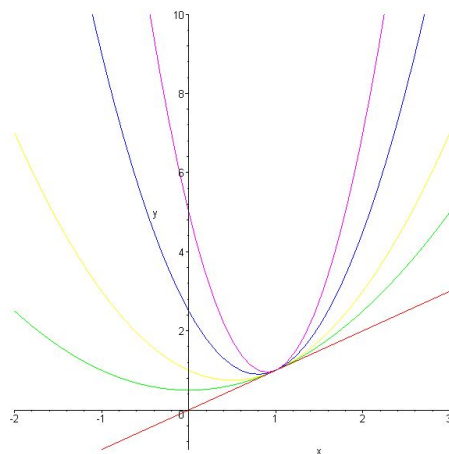
A Courant-féle büntetőfüggvény.

Látható, hogy büntetőfüggvény a célfüggvényt a megengedett megoldások halmazán (az egységkörön) kívül mintegy felhajlítja.

**5.11. Példa.** Legyen

$$f(x) = x \rightarrow \min, \quad h(x) = x - 1 = 0.$$

Ekkor  $\Phi(x, \sigma) = x + \frac{\sigma}{2}(x - 1)^2$ , amelynek minimumhelye  $x(\sigma) = 1 - \frac{1}{\sigma}$ . Ez  $\sigma \rightarrow +\infty$  esetén tart 1-hez, az eredeti feladat minimumhelyéhez. Ha tehát  $\sigma$  elég nagy, akkor  $x(\sigma)$  elég pontosan megközelíti az eredeti feladat megoldását (lásd a következő ábrát).



Courant-féle büntetőfüggvény különböző  $\sigma$  értékekre

A büntetőfüggvény módszerek egy lehetséges általános sémája a következő.

**A SUMT algoritmus**

```

1  INPUT  $\{\sigma_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^+, \sigma_k \rightarrow +\infty$  sorozat,  $\varepsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n, k = 1$ 
1  FOR  $k = 1, 2, \dots$ 
2       $x_{k-1}$ -ből kiindulva határozzuk meg  $\Phi(x, \sigma_k) \rightarrow \min$  egy
           $x_k = x(\sigma_k)$  lokális megoldását!
3      IF  $\|h(x(\sigma_k))\| < \varepsilon$ 
4          THEN exit
```

Általában a  $\sigma_k = 10^{k-1}$  sorozatot használjuk. Az eljárás konvergenciáját mondja ki a következő tétel.

**5.4. Tétel.** *Tegyük fel, hogy  $f$  és  $h$  folytonos függvények,  $f$  alulról korlátos a megengedett megoldások nemüres  $S = \{x : h(x) = 0\}$  halmazán és*

$$(5.7) \quad f^* = \inf_{x \in S} f(x).$$

*Ha  $\sigma_k \rightarrow +\infty$  monoton növekedő, akkor*

*(i) A  $\{\Phi(x_k, \sigma_k)\}$  sorozat monoton növekedő.*

*(ii) A  $\{\|h(x_k)\|\}$  sorozat monoton csökkenő.*

*(iii) Az  $\{f(x_k)\}$  sorozat monoton növekedő.*

*Továbbá  $h(x_k) \rightarrow 0$  és az  $\{x_k\}$  sorozat bármely torlódási pontja megoldása a feltételes szélsőérték feladatnak.*

*Bizonyítás.* Legyen  $k < l$  és  $\sigma_k < \sigma_l$ . Az  $x_k$  definíciójából és (5.5)-ből

$$\Phi(x_k, \sigma_k) \leq \Phi(x_l, \sigma_k) \leq \Phi(x_l, \sigma_l) \leq \Phi(x_k, \sigma_l)$$

következik. Az első két egyenlőtlenség bizonyítja az (i) állítást. Az egyenlőtlenség láncból adódó

$$\begin{aligned} 2(\Phi(x_k, \sigma_l) - \Phi(x_l, \sigma_l) + \Phi(x_l, \sigma_k) - \Phi(x_k, \sigma_k)) = \\ = (\sigma_l - \sigma_k) (\|h(x_k)\|_2^2 - \|h(x_l)\|_2^2) \geq 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenség igazolja az (ii) állítást. A  $\Phi(x_k, \sigma_k) \leq \Phi(x_l, \sigma_k)$  egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$f(x_k) + \frac{\sigma_k}{2} \underbrace{(\|h(x_k)\|_2^2 - \|h(x_l)\|_2^2)}_{\geq 0} \leq f(x_l),$$



amiből az  $\{f(x_k)\}$  sorozat monoton növekedése következik. Az  $x_k$  definíciója és (5.7) alapján

$$(5.8) \quad f(x_k) \leq \Phi(x_k, \sigma_k) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x, \sigma_k) \leq \inf_{x \in S} \overbrace{\Phi(x, \sigma_k)}^{=f(x)} = f^*.$$

Ha  $\sigma_k \rightarrow +\infty$ , akkor

$$h(x_k)^T h(x_k) \leq 2(f^* - f(x_k)) / \sigma_k \leq 2(f^* - f(x_1)) / \sigma_k \rightarrow 0$$

miatt,  $h(x_k) \rightarrow 0$ . Ha  $x_{k_j} \rightarrow x^*$ , akkor a folytonosság miatt  $h(x^*) = 0$ . Ezért  $f(x^*) \geq f^*$ . De (5.8) miatt  $f(x_k) \leq f^*$ , amiből  $f(x^*) \leq f^*$  következik. A két egyenlőtlenség együtt az  $f(x^*) = f^*$  egyenlőséget adja, amivel állításunkat maradéktalanul igazoltuk.  $\square$

Megjegyezzük, hogy a tételben nem tettünk fel differenciálhatóságot és a szokásos Kuhn-Tucker feltevéseket sem.

Vizsgáljuk most az egyenlőtlenségeket is tartalmazó

$$(5.9) \quad \begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ h(x) &= 0 \\ g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

( $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ ) feltételes szélsőérték feladatot. Ekkor a megfelelő büntetőfüggvény

$$\Phi(x, \sigma) = f(x) + \sigma \sum_{i=1}^m h_i^2(x) + \sigma \sum_{j=1}^r (\max\{g_j(x), 0\})^2.$$

A büntetőfüggvény geometriai tartalma az egyenlőségi feltételek esetén már ismert. Ha valamely egyenlőtlenségre, mondjuk a  $j$ -edikre fennáll, hogy  $g_j(x) > 0$ , akkor  $\max\{g_j(x), 0\} = g_j(x)$ . Így az ebből származó büntetés mértéke  $\sigma(g_j(x))^2$ .

A fenti büntetőfüggvénnyel a SUMT eljárás változatlan. Változik azonban az eljárás konvergenciája.

Sok esetben a  $\Phi(x, \sigma)$  büntetőfüggvény Hesse-mátrixa sok esetben rosszul kondicionált lesz nagy  $\sigma$  esetén. Ha a Newton módszeren alapuló minimalizálást alkalmazzuk, akkor Broyden és Attia egy speciális lineáris egyenletrendszer megoldó módszerét lehet alkalmazni. A probléma egy elterjedtebb kezelési módja a Powell-féle büntetőfüggvény, amelynek alakja

$$\Phi(x, \theta, \sigma) = f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_i (h_i(x) - \theta_i)^2,$$

ahol  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T$  és  $\sigma = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]^T$ . A  $\theta_i$  paraméterek az origótól való eltolást, a  $\sigma_i \geq 0$  paraméterek pedig a büntetés mértékét szabályozzák. A Powell-féle büntetőfüggvény jellegében egy nemlineáris legkisebb négyzetes feladat célfüggvénye.

A 5.11 példa esetén  $\Phi(x, \theta, \sigma) = x + \frac{\sigma}{2}(x - \theta)^2$ , amelynek minimumhelye  $x(\sigma) = \theta - \frac{1}{\sigma}$ .

A Powell-féle büntetőfüggvény egy jobban számítható alakját kapjuk, ha bevezetjük a  $\lambda_i = \theta_i \sigma_i$  változókat és elhanyagoljuk az  $x$ -től független  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \theta_i^2 \sigma_i$  tagot. Ekkor a

$$\Phi(x, \lambda, \sigma) = f(x) - \lambda^T h(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i^2(x) = f(x) - \lambda^T h(x) + \frac{1}{2} h(x)^T S h(x)$$

büntetőfüggvényt kapjuk, ahol  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$  és  $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ .

Megmutatható, hogy létezik olyan  $\lambda^*$  vektor, amelyre  $x^*$  a  $\Phi(x, \lambda^*, \sigma)$  minimuma lesz minden  $\sigma > \sigma'$  esetén (Itt az  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x < y \Leftrightarrow x_i < y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) jelölést használjuk).

A következő eljárást lehet ennek alapján megfogalmazni:

1. Határozzuk meg a  $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda^*$  sorozatot!
2. Határozzuk meg a  $\Phi(x, \lambda^{(k)}, \sigma^{(k)})$  függvény egy  $x_k = x(\lambda^{(k)}, \sigma^{(k)})$  lokális minimumhelyét!
3. Fejezzük be az eljárást, ha  $h(x(\lambda^{(k)}, \sigma^{(k)}))$  elég kicsi!

Powell javaslata a  $\lambda^{(k)}$  és  $\sigma^{(k)}$  meghatározására a következő. Legyen

$$S^{(k)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(k)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_m^{(k)} \end{bmatrix}.$$

#### A Powell módszer algoritmus

1. Legyen  $\lambda = \lambda^{(1)}$ ,  $\sigma = \sigma^{(1)}$ ,  $k = 0$ ,  $\|h^{(0)}\|_\infty = \infty$ .
2. Határozzuk meg a  $\phi(x, \lambda, \sigma)$  függvény  $x(\lambda, \sigma)$  minimumhelyét és legyen  $h = h(x(\lambda, \sigma))$ .
3. Ha  $\|h\|_\infty > \frac{1}{4} \|h^{(k-1)}\|_\infty$ , akkor legyen  $\sigma_i = 10\sigma_i$  minden olyan  $i$  indexre, amelyre fennáll, hogy  $|h_i| > \frac{1}{4} \|h^{(k-1)}\|_\infty$ . Menjünk a 2. pontra!
4. Legyen  $k = k + 1$ ,  $\lambda^{(k)} = \lambda$ ,  $\sigma^{(k)} = \sigma$ ,  $h^{(k)} = h$ .
5. Legyen  $\lambda = \lambda^{(k)} - S^{(k)} h^{(k)}$ .
6. Menjünk a 2. pontra!

**5.12. Példa.** Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot büntetőfüggvényes

módszerrel:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min!$$

$$h(x_1, x_2) = x_1 - x_2 = 0$$

### Megoldás

A feltétel nélküli segédfeladat:

$$\phi(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \sigma \cdot (x_1 - x_2)^2 \rightarrow \min!$$

A kiinduló vektor legyen  $x = (10, 20)$ , a kiinduló büntető paraméter pedig legyen  $\sigma = 2$ . A megoldás egyes lépéseit az alábbi táblázatban közöljük:

| $\sigma$ | $x_\sigma$                                           | $\phi(x_\sigma)$ | $f(x_\sigma)$ | $\sigma B(x_\sigma)$ | $B(x_\sigma)$         |
|----------|------------------------------------------------------|------------------|---------------|----------------------|-----------------------|
| 1        | $\begin{bmatrix} 0.666 \\ 0.333 \end{bmatrix}$       | 0.333            | 0.222         | 0.111                | 0.111                 |
| 10       | $\begin{bmatrix} 0.524 \\ 0.476 \end{bmatrix}$       | 0.4762           | 0.4535        | 0.0227               | 0.00227               |
| 100      | $\begin{bmatrix} 0.5025 \\ 0.4975 \end{bmatrix}$     | 0.4975           | 0.4950        | 0.002475             | $2.475 \cdot 10^{-5}$ |
| 1000     | $\begin{bmatrix} 0.500249 \\ 0.499749 \end{bmatrix}$ | 0.49975          | 0.49950       | 0.00025              | $2.5 \cdot 10^{-7}$   |
| 10000    | $\begin{bmatrix} 0.500024 \\ 0.499974 \end{bmatrix}$ | 0.499975         | 0.499950      | $2.5 \cdot 10^{-5}$  | $2.5 \cdot 10^{-9}$   |

A feladat optimális megoldása:  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 0.5$ ,  $f_{\min} = 0.5$ . A táblázatban jól látható, hogy a feladat megoldása hogyan konvergál az optimális megoldáshoz, továbbá az is látható, hogy a  $\sigma$  büntetőparaméter növekedésével  $\phi(x_\sigma)$ ,  $f(x_\sigma)$  növekszik, míg  $\sigma B(x_\sigma)$ ,  $B(x_\sigma)$  csökken.

**5.13. Példa.** Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot büntetőfüggvényes módszerrel:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min!$$

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 3 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0$$

### Megoldás

A kiinduló vektor legyen  $x = (4, 3)$ , a kiinduló büntető paraméter pedig legyen  $\sigma = 1$ . A feltétel nélküli segédfeladat:

$$\phi(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + \sigma \cdot \left[ (\max \{0, x_1^2 - x_2 - 3\})^2 + (\max \{0, x_1 + 2x_2 - 4\})^2 \right] \rightarrow \min!$$

*A megoldás egyes lépéseit az alábbi táblázatban közöljük:*

| $\sigma$ | $x_\sigma$ | $\phi(x_\sigma)$ | $f(x_\sigma)$ | $\sigma B(x_\sigma)$ | $B(x_\sigma)$ |
|----------|------------|------------------|---------------|----------------------|---------------|
| 1        | 2.074773   | -11.267922       | -11.491933    | 0.2240114            | 0.2240114     |
|          | 1.192522   |                  |               |                      |               |
| 10       | 2.008504   | -11.031470       | -11.062322    | 0.0308523            | 0.0030852     |
|          | 1.022957   |                  |               |                      |               |
| 100      | 2.0008625  | -11.003203       | -11.006400    | 0.0031968            | 0.0000320     |
|          | 1.0023407  |                  |               |                      |               |
| 1000     | 2.0000864  | -11.000321       | -11.000651    | 0.0003203            | 0.0000003     |
|          | 1.0002343  |                  |               |                      |               |

*Az optimális megoldás:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $f_{\min} = -11$ . A táblázatban jól látható a feladat megoldásának az optimális megoldáshoz való konvergálása, továbbá az is látható, hogy a  $\sigma$  büntetőparaméter növekedésével  $\phi(x_\sigma)$ ,  $f(x_\sigma)$  növekszik, míg  $\sigma B(x_\sigma)$ ,  $B(x_\sigma)$  csökken.*

## 6. fejezet

### Feladatok

1.  $f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5 \rightarrow \text{extr.}$
2.  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 4y^2 + 6 \rightarrow \text{extr.}$
3. Határozzuk meg az  $a$  és  $b$  oldalú téglalap alakú kartonból készíthető maximális térfogatú, felül nyitott doboz adatait!
4.  $f(x) = x^4(x-1)^{-1}(x-3)^{-3} \rightarrow \text{extr.}$
5.  $f(x, y) = 8x + 4y + xy - x^2 - y^2 \rightarrow \text{extr.}$
6.  $f(x, y) = 12xy - x^2 - 3y^2 \rightarrow \text{extr}$
7. Határozzuk meg azt a maximális területű téglalapot, amelynek kerülete 100 területegység!
8. Határozzuk meg azt a maximális térfogatú téglatestet, amelynek felülete 600 területegység!
9. Határozzuk meg azt a maximális felületű téglatestet, amelynek térfogata 1000 területegység!
10. Egy téglalap alakú kertet akarunk készíteni egy fal mellett, így csak a kert 3 oldalát kell kerítéssel bekeríteniünk. Mekkora a maximális méretű kert, ha 50m kerítés áll rendelkezésünkre?
11. Határozzuk meg a maximális térfogatú  $x_1$  sugarú és  $x_2$  magasságú henger adatait, ha a henger felszíne  $24\pi$ ! Ellenőrizzük, hogy a kapott eredmény tényleg maximum pont-e?
12. Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 10$  függvény maximumát a  $h(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2^2 = 3$  feltétel mellett!

13. Oldjuk meg az  $f(x, y) = \frac{k}{xy^2} \rightarrow \min$  feladatot a  $h(x, y) = x^2 + y^2 = a^2$  feltétel mellett!

14. Oldjuk meg az  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2 \rightarrow \min$  feladatot a

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 - x_2 = 0 \\ h_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

feltételek mellett!

15. Oldjuk meg az  $f(x, y) = |x + y + 2| \rightarrow \min$ ,  $g(x, y) = \max\{-x, -y\} \leq 0$  feladatot!

16. Oldjuk meg az  $f(x, y) = y + x^2 + y^3 \rightarrow \min$ ,  $g(x, y) = -y \leq 0$  feladatot!

17. A Kuhn-Tucker tétel segítségével igazoljuk, hogy a  $(\frac{13}{17}, \frac{18}{17})^T$  pont az

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 &\rightarrow \min \\ 2x_1 + 3x_2 - 6 &\leq 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5 &\leq 0 \end{aligned}$$

konvex optimalizálási feladat optimális megoldása!

18. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow \min \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 &\leq 0 \\ -x_1 + x_2^2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

konvex optimalizálási feladatot!

19. Adott az  $x_1 + x_2 = 4$  és az  $x_1 - x_2 = 2$  egyenes. Ezek az egyenesek a síkot négy részre bontják, tekintsük azt a tartományt, amely tartalmazza az  $x = (0, 5)$  pontot. Határozza meg a tartomány azon pontját, amely a legközelebb van az origóhoz. Ellenőrizze az elégséges feltétel segítségével, hogy a kapott pont valóban optimális!

20. Minimalizálandó a

$$2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$$

függvény feltéve, hogy  $x_1 + 2x_2 \leq 10$ . Írja fel a Karush-Kuhn-Tucker feltételeket és határozza meg a KKT pontot! Ellenőrizze, hogy a KKT pont optimális megoldás-e!

21. Minimalizálandó a

$$4x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$$

függvény feltéve, hogy  $x_1 + 2x_2 \leq 20$  és  $x_1 + x_2 = 10$ . Írja fel a Karush-Kuhn-Tucker feltételeket és határozza meg a KKT pontot! Ellenőrizze, hogy a KKT pont optimális megoldás-e!

22. Minimalizálandó a

$$2x_1^2 - 4x_1x_2x_3 + 4x_2^2x_3 + x_3$$

függvény feltéve, hogy  $x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$  és  $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ . Írja fel a Karush-Kuhn-Tucker feltételeket és határozza meg a KKT pontot!

23. Határozzuk meg az  $f(x) = -e^{-x^2} \rightarrow \min, x \geq 1$  primál feladat duálisát és mutassuk meg, hogy a duális feladatnak nincsen véges optimuma!

24. Határozzuk meg az  $f(x) = e^{-x} + x^2$  ( $x \in [0, 1]$ ) függvény minimumhelyét!

25. Határozzuk meg az  $f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x}$  ( $x \in [0, 1]$ ) függvény minimumhelyét!

26. Határozzuk meg az  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x(\lg \frac{x}{e} - 2)$  ( $x \in [1.5, 2]$ ) függvény minimumhelyét!

27. Határozzuk meg az  $f(x) = 5x + x^2 - \frac{1}{4}x^4$  ( $x \in [0, 1]$ ) függvény maximumhelyét és maximális értékét!

28. Irjuk át a Broyden-módszert inverz alakba a Sherman-Morrison-Woodbury formula segítségével!

29. Adjuk meg a BFGS eljárást az inverzet használó alakban!

30. Hogyan módosul a BFGS eljárás vonalmenti minimalizálás használata esetén?

31. Vizsgáljuk meg a SUMT módszer konvergenciáját az  $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min, g(x) = x_1 + x_2 = 0$  feladat esetén!

32. Oldjuk meg az  $f(x) = x^2 - 5x + 10 \rightarrow \min$ ! egyváltozós optimalizálási feladatot Dichotomus keresés módszerével, ha a bizonytalansági intervallum  $[a, b] = [1, 5]$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\varepsilon = 0.5$ .

33. Oldjuk meg az  $f(x) = x^2 - 7x + 8 \rightarrow \min$ ! egyváltozós optimalizálási feladatot Dichotomus keresés módszerével, ha a bizonytalansági intervallum  $[a, b] = [2, 4]$ ,  $\delta = 0.25$ ,  $\varepsilon = 0.5$ .

34. Oldjuk meg az  $f(x) = x^2 - 5x + 10 \rightarrow \min!$  egyváltozós optimalizálási feladatot aranymetszéses keresés módszerével, ha a bizonytalansági intervallum  $[a, b] = [1, 5]$ ,  $\varepsilon = 0.5$ .
35. Adott az  $[a_1, b_1] = [2, 5]$  bizonytalansági intervallum. Hány lépést kell kiszámolni az aranymetszéses keresés módszere esetén, hogy a minimumpont hibája kisebb legyen, mint 0.01?
36. Oldjuk meg az  $f(x) = x^2 - 7x + 8 \rightarrow \min!$  egyváltozós optimalizálási feladatot aranymetszéses keresés módszerével, ha a bizonytalansági intervallum  $[a, b] = [2, 4]$ ,  $\varepsilon = 0.25$ .
37. Oldjuk meg az  $f(x) = x^2 - 5x + 10 \rightarrow \min!$  egyváltozós optimalizálási feladatot Fibonacci keresés módszerével, ha a bizonytalansági intervallum  $[a, b] = [1, 5]$ , és válasszuk az  $n$  értékét  $n = 4$ -re.
38. Oldjuk meg az  $f(x) = x^2 - 7x + 8 \rightarrow \min!$  egyváltozós optimalizálási feladatot Fibonacci keresés módszerével, ha a bizonytalansági intervallum  $[a, b] = [2, 4]$ , és válasszuk az  $n$  értékét  $n = 6$ -ra.
39. Adott az  $[a_1, b_1] = [2, 5]$  bizonytalansági intervallum. Mennyire kell választani  $n$  értékét a Fibonacci módszernél, hogy a minimumpont hibája kisebb legyen, mint 0.01?
40. Oldjuk meg az  $f(x) = x^3 - 12x + 4 \rightarrow \min!$  egyváltozós optimalizálási feladatot Newton módszerrel, ha a kiinduló közelítő megoldás  $x_1 = 3$ ,  $\varepsilon = 0.05$ .
41. Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot Hooke-Jeeves módszerrel. Legyen az  $x_1 = (0, 0)$  a startvektor és legyen  $\varepsilon = 0.005$  a pontossági tűrés.
42. Ellenőrizze le a Fletcher-Reeves módszerre felírt tételben megfogalmazott állítások helyességét.
43. Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 10x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 10 \rightarrow \min!$  kétváltozós optimalizálási feladatot gradiens módszerrel az  $x_0 = (1, 1)$  kiindulópontból  $\varepsilon = 0.1$  pontossággal.
44. Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 10x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 10 \rightarrow \min!$  kétváltozós optimalizálási feladatot konjugált gradiens módszerrel az  $x_0 = (1, 1)$  kiindulópontból  $\varepsilon = 0.1$  pontossággal.



45. Az

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 7$$

függvény minimumát szeretnénk meghatározni konjugált gradiens módszerrel. Tegyük fel, hogy néhány lépést elvégeztünk, az eredmények:  $x_5 = (0, 1 + \sqrt{3}/2)$ ,  $d_5 = (1/2, 1/2)$ ,  $x_6 = (1/2, 4)$ . Határozza meg az  $x_7$  közelítést és a hozzátartozó  $d_7$  vektort!

46. Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 10x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 10 \rightarrow \min!$  kétváltozós optimalizálási feladatot egyrangú BFGS-módszerrel az  $x_0 = (1, 1)$  kiindulópontból  $\varepsilon = 0.1$  pontossággal, ha nem használjuk az iránymenti optimalizálást. A kiinduló  $B_0$  mátrix legyen  $B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

47. Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 10x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 10 \rightarrow \min!$  kétváltozós optimalizálási feladatot kétrangú BFGS-módszerrel az  $x_0 = (1, 1)$  kiindulópontból  $\varepsilon = 0.1$  pontossággal, ha nem használjuk az iránymenti optimalizálást. A kiinduló  $B_0$  mátrix legyen  $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

48. Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 10x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 10 \rightarrow \min!$  kétváltozós optimalizálási feladatot egyrangú BFGS-módszerrel az  $x_0 = (1, 1)$  kiindulópontból  $\varepsilon = 0.1$  pontossággal, ha használjuk az iránymenti optimalizálást. A kiinduló  $B_0$  mátrix legyen  $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

49. Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 10x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 10 \rightarrow \min!$  kétváltozós optimalizálási feladatot kétrangú BFGS-módszerrel az  $x_0 = (1, 1)$  kiindulópontból  $\varepsilon = 0.1$  pontossággal, ha használjuk az iránymenti optimalizálást. A kiinduló  $B_0$  mátrix legyen  $B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

50. Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 10x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 10 \rightarrow \min!$  kétváltozós optimalizálási feladatot egyrangú DFP-módszerrel az  $x_1 = (1, 1)$  kiindulópontból  $\varepsilon = 0.1$  pontossággal a vonalmenti minimalizálás használatával és anélkül is. A kiinduló  $D_1$  mátrix legyen  $D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

51. Határozzuk meg az  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 10x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 10 \rightarrow \min!$  kétváltozós optimalizálási feladatot kétrangú DFP-módszerrel az  $x_1 = (1, 1)$  kiindulópontból  $\varepsilon = 0.1$  pontossággal a vonalmenti minimalizálás használatával. A kiinduló  $D_1$  mátrix legyen  $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

52. Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot Davidon-Fletcher-Powell módszerrel.

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 + 5 \rightarrow \min!$$

A  $D_1$  kiinduló mátrix legyen az egységmátrix, az  $x_1$  pedig legyen a  $(-1, 2)$  pont.

53. Az alábbi függvény minimumát szeretnénk meghatározni.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1 + x_2 + 7$$

a) Adott az  $x = (1, 0)$  startvektor. Határozza meg a következő közelítést gradiens módszerrel!

b) Adott az  $x = (0, 1)$  startvektor. Határozza meg a következő közelítést Newton I. módszerrel. Határozza meg a közelítést abban az esetben is, ha a Newton I. módszert összekapcsoljuk az iránymenti optimalizálással!

c) Adottak az alábbi startelemek:

$$x = (1, 0), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Határozza meg az  $x$  vektor és a  $B$  mátrix következő közelítését, ha a BFGS (kvázi Newton I.) módszer egyrangú verzióját használja és nem alkalmaz iránymenti optimalizálást!

d) Adottak az alábbi startelemek:

$$x = (1, 0), \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Határozza meg az  $x$  vektor és a  $D$  mátrix következő közelítését, ha a DFP (kvázi Newton II.) módszer kétrangú verzióját használja és alkalmaz iránymenti optimalizálást!

54. Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot büntetőfüggvényes módszerrel

$$\begin{aligned} 3x &\rightarrow \min! \\ 2 - x &\leq 0 \end{aligned}$$

55. Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot büntetőfüggvényes módszerrel

$$\begin{aligned} 3x^2 &\rightarrow \min! \\ 2 - xe^x &\leq 0 \end{aligned}$$

56. Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot büntetőfüggvényes módszerrel

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\rightarrow \min! \\ x_1^2 + x_2^2 &= 9 \end{aligned}$$

57. Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot büntetőfüggvényes módszerrel

$$\begin{aligned} 3x_1^3 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 &\rightarrow \min! \\ x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \end{aligned}$$

58. Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot büntetőfüggvényes módszerrel:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min! \\ g_1(x_1, x_2) &= x_1^2 - 2x_2 - 8 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) &= 2x_1 + 4x_2 - 6 \leq 0 \end{aligned}$$