

5. gyakorlat

lineáris egyenletrendszer megoldása Jacobi iterációval

Az $Ax=b$ ($A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ nonsinguláris mátrix, $b \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$) LER
helyett helyettesítve az $x = Cx + d$ iteratív lineáris egyenletrendszert,
ahol a C mátrix i -edik sora:

$$e_i^T C = \left[\frac{a_{i1}}{-a_{ii}}, \dots, \frac{a_{i,i-1}}{-a_{ii}}, 0, \frac{a_{i,i+1}}{-a_{ii}}, \dots, \frac{a_{in}}{-a_{ii}} \right]_{i=1:n}$$

és a d vektor i -edik eleme

$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i=1:n$$

Ezt lépésenként meg, loop az $Ax=b$ LER-től az i -és egyenlethől
kifejezhetjük az x_i -ket, $i=1:n$.

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) / a_{11}$$
$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) / a_{22}$$
$$\vdots$$

$$x_n = (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}) / a_{nn}$$

azaz

$$d_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \dots, d_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen $X^{(0)} \in \mathbb{Q}^n$ valamelyik kezdeti vektor. Tekintsük a
közvetlen

$$X^{(1)} = C \cdot X^{(0)} + d$$

$$X^{(2)} = C \cdot X^{(1)} + d$$

:

$$X^{(k)} = C \cdot X^{(k-1)} + d$$

feltéve, hogy a k -ik közelítést kiszámoltuk:

$$(\text{komponensek}) \quad x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad i=1:n, \quad k=0,1,2,\dots$$

Hibakeplet

$$h_{k+1} = \frac{\|C\|_{\infty}}{1 - \|C\|_{\infty}} \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_{\infty} < \epsilon \rightarrow \text{stop}$$

ha $\|C\|_{\infty} < 1$ szükséges feltétel $\Leftrightarrow$ ha az A diagonálisan domináns volt.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Gauss-Seidel iterációval

Gyorsítási lehetőség: mindig a legújabb információkat dolgozzuk fel.

Tjlt. az $x^{(k)}$ közelítés már ismert:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad i=1:n, \quad k=0,1,2,\dots$$

Hibakeplet

$$h_{k+1} = \frac{\|C\|_{\infty}}{1 - \|C\|_{\infty}} \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_{\infty} < \epsilon \rightarrow \text{stop}$$

1. Az $X^{(0)} = [3, 3, 3]^T$ kezdővektor esetén határozza meg az
 alábbi IER megoldásának közelítő értékeit!

- a) Jacobi-iterációval $X^* = \begin{bmatrix} -9,5367 \\ -5,64 \\ -10,2033 \end{bmatrix}$
 b) Gauss-Seidel-iterációval!

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,1 \\ 14,1 \\ 16,1 \end{bmatrix}$$

Atkar ér véget az eljárás, ha az iterációkban 4 vagy az
 ennél kisebb mint $\epsilon = 0,09$!

mis a) ellenőrizni, ha A diagonálisan domináns ✓

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12,1 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 &= 14,1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 16,1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{iteratív IER} \\ \rightarrow \rightarrow \end{array} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0,25x_2 + 0,5x_3 - 3,025 \\ x_2 &= 0,1667x_1 + 0,1667x_3 - 2,35 \\ x_3 &= 0,5x_1 + 0,25x_2 - 4,025 \end{aligned}$$

Iteratív IER számítási mátrixa:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0,5 \\ 0,1667 & 0 & 0,1667 \\ 0,5 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0,75 \\ 0,3334 \\ 0,75 \end{matrix} \quad d = \begin{bmatrix} -3,025 \\ -2,35 \\ -4,025 \end{bmatrix}$$

konvergencia feltétele: $\|C\|_{\infty} = 0,75 < 1$ ✓

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (k=0)$$

$k=1$: először behelyettesítjük

$$x_1^{(1)} = 0,25 \cdot 3 + 0,5 \cdot 3 - 3,025 = -0,775$$

$$x_2^{(1)} = 0,1667 \cdot 3 + 0,1667 \cdot 3 - 2,35 = -1,3498$$

$$x_3^{(1)} = 0,5 \cdot 3 + 0,25 \cdot 3 - 4,025 = -1,775$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,775 \\ -1,3498 \\ -1,775 \end{bmatrix}$$

hiba $l_1 = \underbrace{\frac{0,75}{1-0,75}}_3 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -0,775 \\ -1,3498 \\ -1,775 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 14,325 \neq 0,09$

$\left\| \begin{pmatrix} -3,775 \\ -4,3498 \\ -4,775 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 4,775 = \max\{3,775, \dots, 4,775\}$

$l_2 = 2$

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0,25 \cdot (-1,3498) + 0,5 \cdot (-1,775) - 3,025 = -4,25 \\ x_2^{(2)} &= 0,1667 \cdot (-0,775) + 0,1667 \cdot (-1,775) - 2,35 = -2,775 \\ x_3^{(2)} &= 0,5 \cdot (-0,775) + 0,25 \cdot (-1,3498) - 4,025 = -4,75 \end{aligned} \right\} x^{(2)} = \begin{bmatrix} -4,25 \\ -2,775 \\ -4,75 \end{bmatrix}$$

hiba : $l_2 = 3 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -4,25 \\ -2,775 \\ -4,75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,775 \\ -1,3498 \\ -1,775 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 10,425 \neq 0,09$

$\left\| \begin{pmatrix} -3,475 \\ -1,4252 \\ -2,975 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 3,475$

$l_3 = 3$

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(3)} &= 0,25 \cdot (-2,775) + 0,5 \cdot (-4,75) - 3,025 = -6,0938 \\ x_2^{(3)} &= 0,1667 \cdot (-4,25) + 0,1667 \cdot (-4,75) - 2,35 = -3,8503 \\ x_3^{(3)} &= 0,5 \cdot (-4,25) + 0,25 \cdot (-2,775) - 4,025 = -6,8438 \end{aligned} \right\} x^{(3)} = \begin{bmatrix} -6,0938 \\ -3,8503 \\ -6,8438 \end{bmatrix}$$

hiba : $l_3 = 3 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -6,0938 \\ -3,8503 \\ -6,8438 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4,25 \\ -2,775 \\ -4,75 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 6,2814 \neq 0,09$

$\left\| \begin{pmatrix} -1,8438 \\ -1,0753 \\ -2,0938 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 2,0938$

$l_4 = 4$

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(4)} &= 0,25 \cdot (-3,8503) + 0,5 \cdot (-6,8438) - 3,025 = -7,4094 \\ x_2^{(4)} &= 0,1667 \cdot (-6,0938) + 0,1667 \cdot (-6,8438) - 2,35 = -4,5062 \\ x_3^{(4)} &= 0,5 \cdot (-6,0938) + 0,25 \cdot (-3,8503) - 4,025 = -8,0344 \end{aligned} \right\} x^{(4)} = \begin{bmatrix} -7,4094 \\ -4,5062 \\ -8,0344 \end{bmatrix}$$

hiba $l_4 = 3 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -7,4094 \\ -4,5062 \\ -8,0344 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6,0938 \\ -3,8503 \\ -6,8438 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 3 \cdot \max\{1,3156, 0,6559, 1,1906\} = 3,9468 \neq 0,09$

b) eleje utpanaz!

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$k=1$: mindig aktualizálunk!

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,775 \\ -1,9791 \\ -4,9073 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{(1)} = 0,25 \cdot 3 + 0,5 \cdot 3 - 3,025 = -0,775$$

$$X_2^{(1)} = 0,1667 \cdot -0,775 + 0,1667 \cdot 3 - 2,35 = -1,9791$$

$$X_3^{(1)} = 0,5 \cdot (-0,775) + 0,25 \cdot (-1,9791) - 4,025 = -4,9073$$

hiba $h_1 = 3 \cdot \left\| \begin{bmatrix} -0,775 \\ -1,9791 \\ -4,9073 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 3 \cdot \max \{ 3,775; 4,9791; 7,9073 \} = 23,7219$

$k=2$

$$X_1^{(2)} = 0,25 \cdot (-1,9791) + 0,5 \cdot (-4,9073) - 3,025 = -5,9734$$

$$X_2^{(2)} = 0,1667 \cdot (-5,9734) + 0,1667 \cdot (-4,9073) - 2,35 = -4,1638$$

$$X_3^{(2)} = 0,5 \cdot (-5,9734) + 0,25 \cdot (-4,1638) - 4,025 = -8,0527$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} -5,9734 \\ -4,1638 \\ -8,0527 \end{bmatrix}$$

hiba $h_2 = 3 \cdot \left\| \begin{bmatrix} -5,9734 \\ -4,1638 \\ -8,0527 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,775 \\ -1,9791 \\ -4,9073 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 3 \cdot \max \{ +5,1984; 2,1847; 3,1454 \} = 15,5952$

$k=3$

$$X_1^{(3)} = 0,25 \cdot (-4,1638) + 0,5 \cdot (-8,0527) - 3,025 = -8,0923$$

$$X_2^{(3)} = 0,1667 \cdot (-8,0923) + 0,1667 \cdot (-8,0527) - 2,35 = -5,0414$$

$$X_3^{(3)} = 0,5 \cdot (-8,0923) + 0,25 \cdot (-5,0414) - 4,025 = -9,3315$$

hiba $h_3 = 3 \cdot \left\| \begin{bmatrix} -8,0923 \\ -5,0414 \\ -9,3315 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5,9734 \\ -4,1638 \\ -8,0527 \end{bmatrix} \right\|_\infty =$

$$= 3 \cdot \max \{ 2,1189; 0,8776; 1,2788 \} = 6,3567 < 9,09$$

új $X^{(4)} = ?$

□

2. Megoldható-e a) Jacobi

b) Gauss-Seidel

iterációkat az $Ax=b$ egyenletrendszer, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -10 \\ 1 & 5 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9,5 \\ 4,5 \\ 10 \end{bmatrix} ?$$

$$\varepsilon = 0,05$$

meg: sorok szerinti! írd meg A diagon. elemi. ✓

a)

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -10 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 4,5 \\ 9,5 \end{bmatrix}$$

$$10x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 4,5$$

$$2x_1 - x_2 - 10x_3 = 9,5$$

iterációk: $x_1 = 0,2x_2 - 0,2x_3 + 1$

$$x_2 = -0,2x_1 + 0,2x_3 + 0,9$$

$$x_3 = 0,2x_1 - 0,1x_2 - 0,95$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & -0,2 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & -0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9 \\ -0,95 \end{bmatrix}$$

konvergencia feltétele: $\|C\|_\infty = 0,4 < 1$ ✓

Mivel megadva $x^{(0)}$, így $d = x^{(0)}$ valószínűleg!

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9 \\ -0,95 \end{bmatrix}$$

$k=1$

$$x_1^{(1)} = 0,2 \cdot 0,9 - 0,2 \cdot (-0,95) + 1 = 1,37$$

$$x_2^{(1)} = (-0,2) \cdot 1 + 0,2 \cdot (-0,95) + 0,9 = 0,51$$

$$x_3^{(1)} = 0,2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 0,9 - 0,95 = -0,84$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,37 \\ 0,51 \\ -0,84 \end{bmatrix}$$

hiba

$$h_1 = \frac{0,4}{1-0,4} = 0,6667$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1,37 \\ 0,51 \\ -0,84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9 \\ -0,95 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = 0,26$$
$$\left\| \begin{bmatrix} 0,37 \\ -0,39 \\ 0,11 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = 0,39$$

k=2

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0,2 \cdot 0,51 - 0,2 \cdot (-0,84) + 1 = 1,27 \\ x_2^{(2)} &= (-0,2) \cdot 1,37 + 0,2 \cdot (-0,84) + 0,9 = 0,458 \\ x_3^{(2)} &= 0,2 \cdot 1,37 - 0,1 \cdot 0,51 - 0,95 = -0,727 \end{aligned} \right\} x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,27 \\ 0,458 \\ -0,727 \end{bmatrix}$$

hiba

$$h_2 = 0,6667 \cdot \left\| \begin{bmatrix} 1,27 \\ 0,458 \\ -0,727 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,37 \\ 0,51 \\ -0,84 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = 0,6667 \cdot \max\{0,1; 0,052; 0,113\} = 0,0753$$

k=3

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(3)} &= 0,2 \cdot 0,458 - 0,2 \cdot (-0,727) + 1 = 1,237 \\ x_2^{(3)} &= (-0,2) \cdot 1,27 + 0,2 \cdot (-0,727) + 0,9 = 0,5006 \\ x_3^{(3)} &= 0,2 \cdot 1,27 - 0,1 \cdot 0,458 - 0,95 = -0,7418 \end{aligned} \right\} x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,237 \\ 0,5006 \\ -0,7418 \end{bmatrix}$$

hiba

$$h_3 = 0,6667 \cdot \left\| \begin{bmatrix} 1,237 \\ 0,5006 \\ -0,7418 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,27 \\ 0,458 \\ -0,727 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = 0,6667 \cdot \max\{0,033; \underline{0,0426}; 0,0148\} = 0,0484 < 0,05$$

stop

D

b) elejé उपरांत!

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9 \\ -0,95 \end{bmatrix}$$

$k=1$

$$x_1^{(1)} = 0,2 \cdot 0,9 - 0,2 \cdot (-0,95) + 1 = 1,37$$

$$x_2^{(1)} = (-0,2) \cdot 1,37 + 0,2 \cdot (-0,95) + 0,9 = 0,436$$

$$x_3^{(1)} = 0,2 \cdot 1,37 - 0,1 \cdot 0,436 - 0,95 = -0,7196$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,37 \\ 0,436 \\ -0,7196 \end{bmatrix}$$

hiba $h_1 = \frac{0,4}{1-0,4} \cdot \left\| \begin{bmatrix} 1,37 \\ 0,436 \\ -0,7196 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9 \\ -0,95 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0,1667 \cdot \max\{0,37; 0,464; 0,2304\} = 0,0773$

$k=2$

$$x_1^{(2)} = 0,2 \cdot 0,436 - 0,2 \cdot (-0,7196) + 1 = 1,2311$$

$$x_2^{(2)} = -0,2 \cdot 1,2311 + 0,2 \cdot (-0,7196) + 0,9 = 0,5099$$

$$x_3^{(2)} = 0,2 \cdot 1,2311 - 0,1 \cdot 0,5099 - 0,95 = -0,7548$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,2311 \\ 0,5099 \\ -0,7548 \end{bmatrix}$$

hiba $h_2 = 0,1667 \cdot \left\| \begin{bmatrix} 1,2311 \\ 0,5099 \\ -0,7548 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,37 \\ 0,436 \\ -0,7196 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0,1667 \cdot \max\{0,1389; 0,0739; 0,0352\} = 0,023 < 0,05$

$k=3$

$$x_1^{(3)} = 0,2 \cdot 0,5099 - 0,2 \cdot (-0,7548) + 1 = 1,2529$$

$$x_2^{(3)} = (-0,2) \cdot 1,2529 + 0,2 \cdot (-0,7548) + 0,9 = 0,4985$$

$$x_3^{(3)} = 0,2 \cdot 1,2529 - 0,1 \cdot 0,4985 - 0,95 = -0,7493$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,2529 \\ 0,4985 \\ -0,7493 \end{bmatrix}$$

hiba : $h_3 = 0,1667 \cdot \max\{0,0218; 0,0114; 0,0055\} = 0,0037 < 0,01$