

Hatvány módszer

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrix, $\epsilon \in (0, 1)$ hibakorlát, $q_0 \in \mathbb{R}$ és $v^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdő közelítések.

↳ sajátvektorhoz tart

↓
sajátértékhez tart

$k=0$ $q_0, v^{(0)}$ (adott)

Ha $k-1$. lépésben elődelt q_{k-1} és $v^{(k-1)}$ közelítések

Ekkor a k . - ik lépésben

- $z^{(k)} = A \cdot v^{(k-1)}$ előállítás

- meghatározzuk azt a t indexet, melyre

$$|z_t^{(k)}| = \|z^{(k)}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^{(k)}|$$

- legyen $y = e_t$ (t . - ik egységvektor)

- majd előállítjuk

$$q_k = \frac{y^T \cdot z^{(k)}}{y^T \cdot v^{(k-1)}}$$

$$v^{(k)} = \frac{1}{\|z^{(k)}\|_\infty} \cdot z^{(k)}$$

Megállás, ha

$$|q_{k+1} - q_k| < \epsilon \Rightarrow \text{STOP}$$

A hatvány módszer a domináns sajátértékhez közelít és az ahhoz tartozó sajátvektorhoz.

↑
legnagyobb abszolút értékű se.

D

$$k=4 \quad z^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9987 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,9061 \\ 4,8748 \end{bmatrix}$$

$$\|z^{(4)}\|_\infty = 4,9061 \quad t=1 \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,9061 \\ 4,8748 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9987 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9987 \end{bmatrix}} = \frac{4,9061}{1} = 4,9061$$

$$h_4 = |4,9061 - 4,5713| = 0,3348$$

$$h_4 < \epsilon = 0,4 \quad \text{STOP}$$

$$v^{(4)} = \frac{1}{4,9061} \begin{bmatrix} 4,9061 \\ 4,8748 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9936 \end{bmatrix}$$

1. Hatanószor meg hatágy módszerrel az A mátrix domináns sajátértékénél közeli értéket, valamint a hozzá tartozó sajátvektort adott hibakorlát mellett!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad q_0 = 1, \quad v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 0,4$$

$k=1$

$$z^{(1)} = A \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow 1. \text{ index}$$

$$\|z^{(1)}\|_{\infty} = 2 = |z^{(1)}_1| \quad t=1$$

$$y = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} z^{(1)}$$

$$\frac{[1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v^{(0)}}{[1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v^{(0)}} = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$v^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$$h_1 = |2 - 1| = 1$$

$k=2$

$$z^{(2)} = A \cdot v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0,5 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 3 \end{bmatrix} \leftarrow 1. \text{ index}$$

$$y = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 3,5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{[1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}}{[1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}} = \frac{1 \cdot 3,5 + 0 \cdot 3}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0,5} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

$$v^{(2)} = \frac{1}{3,5} \begin{bmatrix} 3,5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8571 \end{bmatrix}$$

$$h_2 = |3,5 - 2| = 1,5$$

$k=3$

$$z^{(3)} = A \cdot v^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8571 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5713 \\ 4,4284 \end{bmatrix}$$

$$\|z^{(3)}\|_{\infty} = 4,5713 \quad t=1$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 4,5713 \\ 4,4284 \end{bmatrix} = \frac{4,5713}{1} = 4,5713$$

$$h_3 = |4,5713 - 3,5| = 1,0713$$

$$v^{(3)} = \frac{1}{4,5713} \begin{bmatrix} 4,5713 \\ 4,4284 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9687 \end{bmatrix}$$