MÁTRIXINVERTÁLÁS

LERD 35

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszing. mátrix inverze előállításához az alábbi LER-eket oldjuk meg rendre.

$$A x^{(1)} = e_1 \quad , \text{ahol } e_1 \text{ első egységvekt.}$$
$$A x^{(2)} = e_2 \quad , \text{ahol } e_2 \text{ 2-dik egységvekt.}$$
$$\vdots$$
$$A x^{(i)} = e_i$$
$$\vdots$$
$$A x^{(n)} = e_n \quad , \text{ahol } e_n \text{ n-edik egységvekt.}$$

Így $A^{-1} = \left[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)} \right]$

Az inverzmátrixot Gauss–Jordan eljárással is lehet meghatározni.

$$\left[A \mid I \right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[I \mid A^{-1} \right].$$

---

def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot ortogonálisnak nev., ha $A^T A = A A^T = I$ ($I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egység mátrix)

LED 36

Áll: l. $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ perm. mátrix

$\Longrightarrow$

1. $P^{-1} = P^{T}$ (ortogon.)
2. $\det(P) = (-1)^{\alpha}$, ahol

α = ~~hány~~ a P sorai felcserélésének száma / egységmátrixhoz jussunk.

~~**Áll:** Ha $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonális mátrix nemszing.~~

~~$\Longrightarrow$~~

Áll: Ha $D := [\cancel{d_1, \dots, d_n}] = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$ nemszing.

$\Longrightarrow$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Az LU-felbontás

LU 1

<u>def</u>: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix LU-felbontásán a mátrix $A = LU$ szorzatalakban történő felbontását értjük, ahol $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ alsó és $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ felső 3$\measuredangle$ mátrix

<u>Tétel</u>: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszing. mátrix

$\Longrightarrow \exists P$ olyan permutáció mátrix /

$PA = LU$. $\exists$-felbontás

Biz.

LU$_2$

def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix r-edik főminor mátrixán az

$$A^{(r)} := [a_{ij}]_{i,j=1}^{r}$$ rész mátrixot

értjük, ahol $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Tétel: Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nem-szinguláris mátrixnak akk és csak akk $\exists$ LU-felbontása, ha

$$\det(A^{(r)}) \neq 0 \quad (r = 1, \dots, n-1).$$

LER megoldása LU módrel

LU_3

<u>Tétel</u>: T.f. az $Ax=b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemsz, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) LER ~~...~~ együttható mátrixának lét. $A = LU$-felb$^{\text{sa}}$.
Akk, az $Ax=b$ LER ekvivalens

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

<u>Biz</u>:

$\Longrightarrow$: T.f. $A \cancel{x} = LU$

és $Ax = b \Longrightarrow (LU)x = b$

$$L\underbrace{(Ux)}_{y} = b \Longrightarrow \begin{cases} Ly = b \text{ és} \\ Ux = y. \end{cases}$$

$\Longleftarrow$: T.f. $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

$L \cdot / \; Ux = y$

$\cancel{Ax=} \; L(Ux) = Ly = b$

$Ax = b$

Az LU-mód. algsa (I.): LU 4

l. $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, A nemsz. g.)

1. Határozzuk meg az $A = LU$ felbontást!
2. Oldjuk meg az $Ly = b$ l.e.r.-t! (↓) Visszahelyettő algsa
3. Oldjuk meg az $Ux = y$ l.e.r.-t! (↑)

~~Inv~~ Mátrix invertálása LU-mód^rel

l. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszing.

1. Határozzuk meg az $A = LU$ felbontását!
2. Megoldjuk rendre az
   $$Ly^{(i)} = e_i \text{ és } Ux^{(i)} = y^{(i)}$$
   $3 \times n^{xu}$ l.e.r.-ket $i = 1, \dots, n$.
3. Felírjuk az inverzmátrixot
   $$A^{-1} = [x^{(1)}, \dots, x^{(n)}].$$

Ha a $PA=LU$ felbontást tudjuk csak meghatározni, akk az I. algoritmus értelemszerűen a következő". $\boxed{LU_5}$

<u>Az LU-mód. algoritmus (II.):</u>

l. $Ax=b$ ($A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ nemszing., $b\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$).

1. Határozzuk meg a $PA=LU$ felbontást!
2. Oldjuk meg $Ly=Pb$ l.e.r.-t!
3. Oldjuk meg $Ux=y$ l.e.r.-t!

Ch01

~~Def~~ Def:

T.f. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus és pozitív definit mátrix.

Akk az A m. Choleski-felbontásán az $A = \tilde{U}^T \tilde{U}$ -felbontást értjük, ahol ~~i=1:n~~

$$e_i^T \tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{u_{ii}}} \cdot e_i^T U, \quad (i=1:n),$$

és az $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix az $A=LU$-felbontásban szereplő felső 3∡ mátrix.

Choleski-felbontás algoritmusa

~~$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$~~ T.f. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimm. + poz. def

$$A \xrightarrow{G.e.} U \longrightarrow \tilde{U} \longrightarrow \tilde{U}^T$$

ahol

$$e_i^T \tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{u_{ii}}} \cdot e_i^T U, \quad i=1:n.$$

Cholesky-mód.

Chol

T.f. $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) LER

A együttható mátrixa szimm. és poz. def.

1.) Meghatározzuk az $A = \tilde{U}^T \tilde{U}$ Cholesky felbontást. Visszahely. alg.-kal

2.) ~~m~~megoldjuk (~~...~~) az

$$\tilde{U}^T y = b$$ LER-t

3.) megoldjuk az

$$\tilde{U} x = y$$ LER-t.

LER megoldás II.: Iterációs módszerek

Jac-seid.

Az $Ax=b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszing. mátrix, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) LER helyett tekintsük az

$$x = Cx + d$$

ún. iteratív LER-t, ahol a $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot és a $d \in \mathbb{R}^n$ vektort az alábbi algoritmussal állítjuk elő:

```
for i = 1:n
    c_ii = 0
    for j = 1:n
        if j ≠ i
            c_ij = a_ij / (-a_ii) = a_ij/(-a_ii)
        end % if
    end % for j
    d_i = b_i / a_ii
end % for i
```

azaz:

$$d = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1}/a_{nn} & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

I Jacobi iteráció

$\forall\, x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdő közelítés esetén az $x^{(k)}$ k-adik köz ismeretében:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} + d_i$$

$i = 1:n$ és $k = 0, 1, 2, \dots$

Tétel: l. az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszing. mátrix, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) inhomogén LER egyetlen megoldása $z \in \mathbb{R}^n$.

Tekintsük az

$$x = Cx + d$$

~~ide~~ iteratív LER-t! T.f. $\|C\|_\infty < 1$,

$\Longrightarrow$ $\forall\, x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdő közelítésből kiindulva a Jacobi iteráció konvergál ~~a valódi~~ z a valódi megoldáshoz, és

$$\cancel{\|x^{(k+1)} - z\|_\infty \le \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}}$$

$$\|x^{(k+1)} - z\|_\infty \le \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty,$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

II Seidel iteráció

Jac-Seid.

$\forall\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdő közelítés esetén t.f.f. $x^{(k)}$ a k-adik közel. előáll.

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} \cdot x_j^{(k)} + d_i$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Tétel:

l. az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszing. mátrix, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) LER egyetlen megoldása $z \in \mathbb{R}^n$, ~~Tè~~

Tekintsük az

$$x = Cx + d$$

iteratív LER-t!

T.f. $\|C\|_\infty < 1$.

$\Longrightarrow$

$\forall\, x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdőközelítésből kiindulva a Seidel iteráció konvergál ~~a valódi~~ a z valódi megoldáshoz és

$$\|x^{(k+1)} - z\|_\infty \leq \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

Fontos megj.:

Jdc–Seid

① Ha az $Ax=b$ ($A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b\in\mathbb{R}^n$, $b\neq 0$) LER esetén az A mátrix diagonálisan domináns, azaz

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad (i=1,2,\dots,n),$$

akk az

$$x = Cx + d$$

~~iteratív alakú LER~~
redukált iteratív alakú LER esetén

$$\|C\|_\infty < 1.$$

Jac-Seid 6

(2) Ha $\|C\|_\infty < 1$,

akk a tételekben szereplő hibáképlet alapján célszerű a program futatását a

$$h_{k+1} := \frac{\|C\|_\infty}{1-\|C\|_\infty} \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$$

feltétel mellett leállítani, ahol $\varepsilon \in (0;1)$ egy adott hibakorlát.