LER megoldása

1. LER: Általános alakja

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mi}x_i + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

~~Töl~~

Tömörebb alakja:

$$Ax = b, \ \cancel{ahol} \ (\underbrace{A}_{\text{együttható mátrix}} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ \underbrace{b}_{\text{jobboldali vektor}} \in \mathbb{R}^m)$$

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$$

$$\underbrace{x}_{\text{ismeretlen vektor}} \in \mathbb{R}^n$$

def: Az $Ax=0$, ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $0 \in \mathbb{R}^m$) LER-t homogén LER-nek nev.

def: Az $Ax=b$, ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$), LER-t inhomogén LER-nek nev.

LERD 2

def: ~~Ha m×n~~ Az $Ax=b$ ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}$)
egyenletrendszert
a) alulhatározottnak nev., ha $m < n$;
b) túlhatározottnak, ha $n < m$;
c) négyzetesnek, ha $m = n$.

LER geo-i tartalma:

def: Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér $d \in \mathbb{R}^n$ normálvektorú és $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ponton átmenő hipersíkján az

$$\{x \in \mathbb{R}^n : (x-x_0)^T d = 0\}$$

halmazon értjük.

Meg: A hipersík egyenlete más alakja: $x^T d = x_0^T d$.

Legyen az A mátrixnak LER

$$A = \begin{bmatrix} e_1^T A \\ \vdots \\ e_m^T A \end{bmatrix}$$

sorvektor alakja. ~~az~~

Ekkor $Ax = b$ ekvivalens

$$Ax = \begin{bmatrix} e_1^T A \\ \vdots \\ e_m^T A \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} (e_1^T A)x \\ \vdots \\ (e_m^T A)x \end{bmatrix} = b$$

NO

azaz

$$\begin{aligned} (e_1^T A)x &= b_1 \\ &\vdots \\ (e_m^T A)x &= b_m \end{aligned}$$

Innen jól látszik, a LER megoldása m hipersík közös metszete.

3 eset lehetséges

(i) a LER-nek $\nexists$ megoldása

(ii) a LER-nek pontosan 1 megoldása van!

(iii) a LER-nek ∞ megoldása van.

Def: Ha az $Ax=b$, $(A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^{n})$ LER-nek legalább egy megoldása van, akk konzisztens ~~xxx~~ LER-ről beszélünk. ~~és inkonzisztens~~

A LER inkonzisztens, ha $\nexists$ megoldása.

---

def: Az $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}^m$ vektorrendszert lineárisan összefüggőnek nev., ha $\exists$ $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ /

$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0 \in \mathbb{R}^m$,

egyébként lineár. ftlennek nev.

LERD

<u>def</u>: Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix rangján a mátrix lin. független oszlop- vagy sorvektorok maximális számát értjük.

<u>Jel.</u>: $\underline{r}\text{ank}(A)$.

<u>Tétel</u>: Az $Ax = b$ $\in \mathbb{R}^{n}$, $b \in \mathbb{R}^{m}$ ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}$) LER akk és csak akk megoldható, ha $\underline{r}\text{ank}(A) = \underline{r}\text{ank}([A, b])$.

Továbbiakban csak □-es LER-rel foglalkozunk.

Tétel: Legyen $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) inhomogén LER. | LERD 6

Akk az alábbi állítások ekvivalensek:

1.) A LER-nek pontosan 1 megoldása van.
2.) Az A együttható mátrix nemszinguláris
3.) $\det(A) \neq 0$
4.) ~~Az~~ A m. oszlopai lin. ftlenek
5.) Az A mátrix ~~oszlopai~~ sorai lin. ftlenek

Meg: Ekkor $x = A^{-1}b$: nem előnyös

Tétel: Az $Ax = 0$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 \in \mathbb{R}^n$) homogén LER-nek akkor és csak akkor lét. nemtriviális megoldása, ~~ha $\det(A) = 0$.~~ (azaz $x \neq 0$), ha $\det(A) = 0$.

$3\measuredangle$ mxú LER-k

LERD 7

def: Az $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ ~~et~~ mátrix alsó $3\measuredangle$ alakú, ha $\forall$ $i < j$ eseten $a_{ij} = 0$ ~~($i=1,\ldots$~~

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

---

def: Az $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ mátrix felső $3\measuredangle$ alakú, ha minden $i > j$ esetén $a_{ij} = 0$ ~~($j=1,\ldots,n$)~~

---

def: Az $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ (alsó, felső) $3\measuredangle$ mátrixot egység (alsó, felső $3\measuredangle$ mátrixnak nev., ha $a_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

LERD8

3⦣ m×ú LER

1. Alsó 3⦣ ×ú ~~LER~~

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots\cdots &= b_2\\
\vdots \qquad\qquad &\ \ \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

~~$Ax=b$~~ $Ax=b$, ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszing. alsó 3⦣ m., $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

~~Algoritm.~~

Megoldás alg$\underline{sa}$:

$\det(A) := a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\cdot x_j\right),$$

$i = 2, 3, \dots, n$.

Visszahelyettesítő alg$\underline{s}$

2. Felső 3∡mxű LER

$\boxed{LERD_g}$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{22}x_2 + \cdots & + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
a_{ii}x_i + \cdots & + a_{in}x_n = b_i \\
& \vdots \\
& a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

$Ax = b$, ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ felső 3∡m, nem szing., $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix};$$

Megoldás alg^{sa}

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right),$$

$i = n-1, n-2, \ldots, 1.$

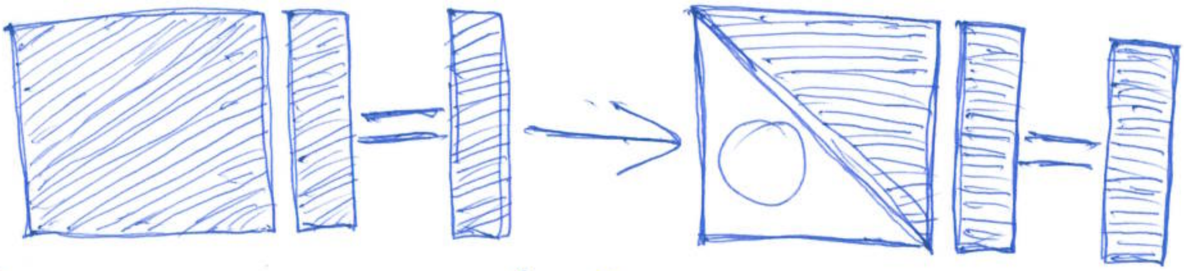
Visszahelyettesítő algsnak is nev.

Gauss-módszer

LERD 10

A Gauss-mód. 2 fázisból áll:

I. Azonos átalakításokkal az $Ax = b$ $(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$ LER-t felső 3∡ alakúra hozzuk.



II. A kapott felső 3∡ m.x-ú LER-t ~~az~~ a fenti alg-sal megoldjuk.

A felső 3∡ ~~m.x-ú~~ alakra hozás:

T.f. / az első (k−1) oszlopban ~~már~~ a kinullázás már megtörtént.

Akkor az

LERD 11

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{kk}x_k + \dots + a_{kj}x_j + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

$$a_{ik}x_k + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

$$a_{nk}x_k + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

egyenletrendszert kapjuk.

Ha $a_{kk} \neq 0$, akkor az a_{kk} alatti x_k együtthatóit kinullázzuk.

Az i-edik sorból a k-adik sor λ-szorosát kivonva adódik /

$$(a_{ik} - \lambda a_{kk})x_k + \dots + (a_{ij} - \lambda a_{kj})x_j + \dots + (a_{in} - \lambda a_{kn})x_n = b_i - \lambda b_k.$$

Mivel $a_{ik} - \lambda a_{kk} = 0$ egyenlőség teljesülnie kell

~~ezért~~

ezért $\lambda = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$.

Tehát a k-adik lépésben az a_{kk} alatti kinullázását az alábbi algoritmussal végrehajthatjuk:

Tehát a Gauss-mód. algsa: $\boxed{\text{LERD 12}}$

$$k = 1 : n-1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{ik} = a_{ik}/a_{kk} \\ \left.a_{ij} = a_{ij} - \lambda_{ik} a_{kj}\right] \; j = k+1 : n \\ b_i = b_i - \lambda_{ik} b_k \end{array}\right] \; i = k+1 : n$$

A kinullázást mindaddig folytatjuk, amíg az $a_{kk} \neq 0$, $k \leq n-1$ feltételek fennállnak.

Ha sikerült az A mátrixot felső 3$\measuredangle$ alakra hozni, akk a ~~visz~~ megfelelő visszahelyettesítő algssal ~~felírjuk~~ ~~a m~~ előállítjuk a LER megoldását.

Meg: Ha $a_{kk} = 0$, akk felcseréljük a k-adik sort ~~egy~~ olyan i-edik sorral, ahol $a_{ik} \neq 0$

Főelemkiválasztásos Gauss-mód.

LERD 23

<u>def</u>: Az a_{kk}-t a k-adik <u>pivot, vagy főelemnek</u> nev.

<u>def</u>: A ~~sorok felcsere~~

A sorok (oszlopok) felcserélését, úgy, hogy az új pivot ne legyen zérus, pivotálásnak vagy főelemkiválasztásnak nev.

<u>Meg</u>: A főelemkiválasztás nagy mértékben befolyásolja az eredmények megbízhatóságát.

Két alapvető pivotálási stratégia:

I. Részleges főelemkiválasztás;

A k-adik lépésben a k-adik oszlop a_{pk} $(k \le p \le n)$ elemei közül kiválasztjuk a maximális abszolútértékűt. Ha ennek indexe i, akkor a k-adik és az i-edik sort felcseréljük. A pivotálás után teljesül, hogy

$$|a_{kk}| = \max_{k \le p \le n} |a_{pk}|.$$

II. Teljes főelemkiválasztás

LERD 26

A k-adik lépésben az a_{pq} $(k \le p, q \le n)$ mátrix elemek közül kiválasztjuk a maximális abszolútértékűt. Ha ennek indexpárja (i, j), akkor a k-adik és az i-edik sort, valamint a k-adik ~~oszlopot~~ és a j-edik oszlopot felcseréljük. A pivotálás után teljesül

$$|a_{kk}| = \max_{k \le p, q \le n} |a_{pq}|$$

Gauss-Jordan mód.

LERD 28

A Gauss-mód. Jordan féle változatában a k-adik lépésben a k-adik sort végig osztjuk a_{kk}-val és ~~az~~ nemcsak az a_{kk} alatti elemeket nullázzuk ki, hanem az a_{kk} felettieket is. Így I. fázis végén egység együttható mátrixot kapunk, ahonnan ~~a~~ megoldás azonnal kiadódik.

Műveletigény: kb n^3.