

Részleges főelem kiválasztásos LBRD 27 algoritmus

for $k = 1:n-1$

Határozzuk meg t indexet

$$|A(t, k)| = \max_{k \leq j \leq n} |A(j, k)|$$

if $k \neq t$

Cseréljük fel a k -adik és
a t -edik sort!

end % if k

for $i = k+1:n$

$$\gamma = A(i, k) / A(k, k)$$

$$A(i, k)$$

$$A(i, k+1:n) = A(i, k+1:n) - \gamma * A(k, k+1:n)$$

$$b(i) = b(i) - \gamma * b(k)$$

end % for i

~~end % for~~

end % for k .

Gauss mbd. alg_{sa};

LERD 13

I. (elimináció) fázis

for $k=1:n-1$

for $i=k+1:n$

$$\gamma = A(i,k)/A(k,k)$$

$$A(i,k+1:n) = A(i,k+1:n) - \gamma * A(k,k+1:n)$$

$$b(i) = b(i) - \gamma * b(k)$$

end % for i

end % for k

II. (helyettesítés) al fázis:

$$x(n) = b(n)/A(n,n)$$

$$\text{for } i=n-1:-1:1 \quad x(i) = \frac{1}{A(i,i)} * \left(b(i) - \sum_{j=i+1}^n A(i,j) * x(j) \right)$$

end % for i

A Gauss mód.

LERD₁₄

műveletigény

A Gauss-módszer véges sok ~~lépés~~ lépésben, véges sok aritmetikai művelet (+, -, *, /) elvégzése után ~~megadja~~ az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) LER megoldását. $(b \in \mathbb{R}^n \mid f)$

def: Szükséges aritmetikai műveletszám műveletigénynek neve.

Meg: 1.) A „*” és az „/” kb azonos műveletigénye (M) Van.

2.) az „+” és a „-” kb azonos műveletigénye (A) van.

LERD 15

def: (Nagy ordó)

Azt mondjuk / $f(n) = O(g(n))$,
ha $\exists M \in (0, \infty)$ konstáns /
 $|f(n)| \leq M \cdot |g(n)|$ minden
elegendően nagy n -re.

Példa: $\frac{n^2}{2} - 3n = O(n^2)$

U.i: $|\frac{n^2}{2} - 3n| \leq M \cdot |n^2|$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{2} - 3n \leq M n^2 \quad (n \geq 7)$$

$$\Rightarrow 3n \geq (\frac{1}{2} - M) n^2$$

ez csak úgy teljesül, ha

$$\frac{1}{2} - M \leq 0 \text{ azaz } M \geq \frac{1}{2}$$

def: (Kis Ordó)

LERD₁₆

$f(n) = o(g(n))$ ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Pelda: $2n = o(n^2)$.

Tétel: A Gauss-mód.
művelet igényle:

$\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ multiplika

multiplikatív és egyamennyi

$\frac{n^3}{3} + O(n^2)$

addit additív művelet.

Biz:

LERD 17

I. fázis műveletigény kiszámítása:

for $k=1:n-1$

for $i=k+1:n$

$$\gamma = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \rightarrow M$$

for $j=k+1:n$

$$a_{ij} = a_{ij} - \gamma \cdot a_{kj} \rightarrow M+A$$

end % for j

$$b_i = b_i - \gamma \cdot b_k \rightarrow M+A$$

end % for i

end % for k

Tehát a for "i" ciklus végén
a műveletigény:

$$(n-k) \left[M + (n-k)(M+A) + M+A \right] =$$
$$\left[(n-k)^2 + 2(n-k) \right] M + \left[(n-k)^2 + (n-k) \right] A$$

$\Rightarrow$ a for k " LERD₁₈

ciklus végén a műveletigény:

$$I_i = \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)^2 + 2(n-k)]M + \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)^2 + (n-k)]A$$

$\begin{matrix} (n-1)^2 + 2(n-1) & & (n-1)^2 + (n-1) \\ (n-2)^2 + 2(n-2) & & (n-2)^2 + (n-2) \\ \vdots & & \vdots \\ 1^2 + 2 \cdot 1 & & 1^2 + 1 \end{matrix}$

$$= \sum_{p=1}^{n-1} (p^2 + 2p)M + \sum_{p=1}^{n-1} (p^2 + p)A$$

De A analízisből tudjuk!

$$\sum_{p=1}^L p^2 = \frac{L(L+1)(2L+1)}{6} \text{ és}$$

$$\sum_{p=1}^L p = \frac{L(L+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^L (p^2 + 2p) = \frac{L(L+1)(2L+1)}{6} + L(L+1) =$$

$\begin{matrix} \downarrow L \rightarrow n \\ \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + (n-1)n \end{matrix}$

$$\frac{L(L+1)(2L+1)}{6} + L(L+1)$$

↳

NO

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (n-1)n =$$

$$= \frac{2n^3 - n^2 - 2n^2 + n}{6} + n^2 - n$$

$$= \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6n^2 - 6n}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n$$

Hasonlóan belátható /

$$\sum_{k=1}^{n-1} (p^2 + p) = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$$

$$\Rightarrow I_1 = \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n \right) M + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} \right) A$$

Hasonlóan belátható a II. fázis műveletigénye:

$$I_2 := \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right) M + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right) A$$

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= \\
 &= \left(\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \right) M + \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n \right) A \\
 &= \frac{n^3}{3} (M+A) + \left(n^2 - \frac{n}{3} \right) M + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n \right) A
 \end{aligned}$$

Ha n elég nagy akkor $\frac{n^3}{3}$ tag válik dominánssá.

Ezzel képezi a biz,

NO

Mátrix invertálása

LERD

3
20

def: Az $x \in \mathbb{R}^n$ vektort i -edik egységvektornak nevezik, ha az i -edik eleme 1-es, összes többi pedig zérus: (Jelölés e_i)

pl.: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

def All: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy mátrix
 $e_i \in \mathbb{R}^n$ i -edik egységvekt, $u \in \mathbb{R}^n$ tets.
 $\Rightarrow$

1. $u^T e_i = u_i$

2. $A e_i$ mátrixművelet kiemelési

az A mátrix i -edik oszlopát.

3. $e_i^T A$ mátrixművelet kiemelési
az A mátrix i -edik sorát.

def: A $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix LERD₃₀

Permutáció mátrixnak neve, ha minden sorában és oszlopában pontosan 1 db 1-es áll az összes többi eleme zérus.

Meg: 1.) $\forall P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutáció ^{mátrix} esetén
 $\exists$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ számoknak
lét. $\{i_1, \dots, i_n\}$ permutációja/

$$P = [e_{i_1}, \dots, e_{i_n}]$$

2.) $\forall P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutáció mátrix
esetén az $\{1, \dots, n\}$ számok ^{nek} lét.
 $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációja/

$$P = \begin{bmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{bmatrix}$$

Permutáció mátrix változtatás

LERD 34

1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $P =$

$$P = \begin{bmatrix} e_{i_1}^T \\ \vdots \\ e_{i_n}^T \end{bmatrix} = [e_{j_1}, \dots, e_{j_n}]$$

permutáció mátrix.

$$\Rightarrow PA = \begin{bmatrix} e_{i_1}^T \\ \vdots \\ e_{i_n}^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} e_{i_1}^T A \\ \vdots \\ e_{i_n}^T A \end{bmatrix}$$

és

$$AP = A[e_{j_1}, \dots, e_{j_n}] = [Ae_{j_1}, \dots, Ae_{j_n}]$$

1. All: Ha $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ perm. mátrix,
akkor $P^{-1} = P^T$

2. All: $\det(P) = (-1)^\alpha$, $(P \in \mathbb{R}^{n \times n}$
perm. mátrix)
ahol α = hányszor kell felcserélni
a sorokat egység mátrixhoz jutni.

A-mikor

✓ ~~Legyen~~ főelemkiválasztás, LERD₃₂

alapuló Gauss-módszer k -adik lépésében az $A^{(k-1)}$ mátrix k -adik és i -edik sorát ($i > k$) felcseréljük, akkor az ekvivalens a

$$P_k A^{(k-1)} x = P_k b^{(k-1)}$$

átalakítással, ahol

$$P_k = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{k-1}^T \\ e_i^T \\ e_{k+1}^T \\ \vdots \\ e_{i-1}^T \\ e_k^T \\ e_{i+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix}$$

NO

Tétel: Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ LEQD
mátrix nonsinguláris, akkor
létezik P permutációmátrix /
a PA mátrixnak van LU-
felbontása.

def: A $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^n$ mátrixot
diagonálisnak nevezzük, ha
 $d_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ esetben.

All: Ha $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) =$
 $\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & d_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

akkor

$$1.) AD = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & \dots & a_{1n}d_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}d_1 & \dots & a_{nn}d_n \end{bmatrix}$$

2.)

$$DA = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & \dots & d_1 a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_n a_{n1} & \dots & d_n a_{nn} \end{bmatrix}$$

All: Ha $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$,
~~nemzet~~ akkor $\det(D) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$

All: Ha $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$
nemzeng. ~~matrix~~ (diag.) matrix
 $\Rightarrow$

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$$

def: (régi flop)

1 régi flop az a számítási munka, amely az

$$s = s + x * y$$

művelet (1 összeadás + 1 szorzás) elvégzéséhez kell.

def: Példa: Az $x^T y$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$) skaláris szorzás kiszámítása

$$s = 0$$

~~%~~ for $i = 1:n$

$$s = s + x_i * y_i$$

end % for i

algoritmussal n régi flop

def: (új flop)

LERD₂₂

1 új flop az a számítási munka, amely egy $+$, $-$, $*$, $/$ aritmetikai művelet elvégzéséhez kell.

All: Egy ~~1 re~~

1 régi flop = 2 új flop

Tétel: 1.) A Gauss-mód.
műveletigénye $\frac{n^3}{3}$ ~~*~~

$$\frac{n^3}{3} + O(n^2) \text{ régi flop.}$$

2.) A Gauss-Jordan eljárás
műveletigénye: n^3

Pelda: Legyen

LERD₂₄

$$10^{-17} x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

LER. ~~esetén~~ Ha ezt pivotálás
nélkül Gauss-mód: rel
számítógépen megoldjuk, akkor

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

közelítő megoldást
kapunk.

Ha viszont pivotálással, akkor

$$\cancel{x_1 = 1}$$

$$\cancel{x_2 = 1}$$

azaz $x_1 + x_2 = 2$

$$10^{-17} x_1 + x_2 = 1$$

LER oldjuk meg, akkor

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a közelítő megoldást
kapunk, ami

közelebb van a valódi megoldáshoz:

$$x = \begin{bmatrix} 1/(1-10^{-17}) \\ 1 - 10^{-17}/(1-10^{-17}) \end{bmatrix}$$