

Klasszikus hibaszámítás

h1.1.

def: $l.$ x egy pontos érték,
és a egy közelítése
(vagy jelölés: $x \approx a$).

* Akk. a $\Delta a := |x - a|$ -t
~~abszolútértéket~~ a közelítés
hibájának nev.

** Ha $\Delta a \leq \delta a$, akk a δa -t
a közelítés abszolút
hibakorlátjának nev.

def: $l_k x \approx a, \text{ és } y \approx b$ közelítések
 $\text{és } \odot \in \{+, -, *, /\}$ művelet.

akk.

1. $x \odot y \approx a \odot b$: művelet közelítés
2. $\Delta(a \odot b) = |(x \odot y) - (a \odot b)|$:
művelet hibája.
3. $\Delta(a \odot b) \leq \delta(a \odot b)$: a
művelet abszolút
hibakorlátja.

Tétel:

h 1.16

$$1. \quad \delta(a+b) \leq \delta a + \delta b$$

$$2. \quad \delta(a-b) \leq \delta a + \delta b.$$

Biz: l. $x \approx a$, $y \approx b$, δa
és δb abszolút hibakorlátal.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1. \quad \Delta(a+b) &= |(x+y) - (a+b)| \leq \\ &\leq |x-a| + |y-b| = \Delta a + \Delta b \leq \\ &\leq \delta a + \delta b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \Delta(a-b) &= |(x-y) - (a-b)| \leq \\ &= |(x-a) - (y-b)| \\ &\leq |x-a| + |y-b| \leq \delta a + \delta b. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Tétel:

h1.17

1.) $\delta(ab) \approx |a| \delta b + |b| \delta a$, ha
 $|a| \gg \delta a$, $|b| \gg \delta b$.

2.) $\delta(a/b) \approx \frac{|a| \delta b + |b| \delta a}{|b|^2}$, ha
 $b \neq 0$, $|b| \gg \delta b$.

Biz:

$x \approx a$, δa absz. h.k.
 $y \approx b$, δb absz. h.k. h1.1

$$\Delta a = \cancel{x-a} \Rightarrow x-a = \pm \Delta a$$

$$x = \pm \Delta a + a$$

$$y = \pm \Delta b + b$$

$$\begin{aligned} 1.) \quad \Delta ab &= |xy - ab| = \\ &= |xy - (\pm \Delta a + a) \cdot (\pm \Delta b + b) - ab| = \\ &= |(\pm \Delta a)(\pm \Delta b) + (\pm \Delta a)b + (\pm \Delta b)a + \\ &\quad + ab - ab| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \cancel{\Delta a \cdot \Delta b} \leq \Delta a \cdot \Delta b + |b| \Delta a + |a| \Delta b \\ &\leq |a| \cdot \delta b + |b| \delta a + \delta a \cdot \delta b \end{aligned}$$

ez a hibatag elhanyagolható, mert
 $|a| \gg \delta a$ és $|b| \gg \delta b$.

Kész.

2.)

$$\begin{aligned}
 \Delta(a/b) &= \left| \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right| = \\
 &= \left| \frac{\pm \Delta a + a}{\pm \Delta b + b} - \frac{a}{b} \right| = \\
 &= \left| \frac{(\pm \Delta a) \cdot b + ab - ab + (\pm \Delta b) \cdot a}{b(\pm \Delta b + b)} \right| \\
 &= \frac{|(\pm \Delta a)b + (\pm \Delta b)a|}{|b^2(1 \pm \frac{\Delta b}{|b|})|}
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{|b|\Delta a + |a|\Delta b}{|b|^2(1 - \frac{\Delta b}{|b|})}$$

$$\leq \frac{|b|\delta a + |a|\delta b}{|b|^2(1 - \frac{\delta b}{|b|})}$$

$$|b|\delta a + |a|$$

$$\leq \frac{|b|\delta a + |a|\delta b}{|b|^2}, \text{ mert}$$

$$b \neq 0 \text{ es } |b| \gg \delta b \quad \%$$

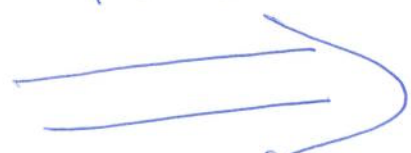
Függvényérték hibája

h1.20

Tétel: l. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

legalább 2-szer
folyt^{san} diff^{to} és

$x \approx a$ (akk. nyilván
 $f(x) \approx f(a)$).



az $f(x) \approx f(a)$ közeliítés
abszolút hibakorlátja

$$\delta(f(a)) \approx |f'(a)| \cdot \delta a$$

Biz: A másodikrendű |h1.21
Taylor formulából adódik/

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2,$$

$$\xi \in (a-\delta a, a+\delta a).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(f(a)) &= |f'(a)| \cdot \Delta a + \frac{|f''(\xi)|}{2} (\Delta a)^2 \\ &= |f(x) - f(a)| \leq |f'(a)| \cdot \delta a + M \cdot (\delta a)^2, \text{ ahol} \\ M &\geq \frac{1}{2} |f''(\xi)|, \quad [a-\delta a, a+\delta a] \text{ -n} \end{aligned}$$

Há az $M(\delta a)^2$ hibatag
elhanyagolásából adódik/
 $\delta(f(a)) \approx |f'(a)| \delta a.$

Aritmetikai műveletek

h1.22

relatív hibája

def: l. $x \approx a$.

Akkor ennek közelítés
relatív hibáján a $\frac{\delta a}{|x|}$
mennyiséget értjük.

~~Meg: Az x általában nem
ismerjük, ezért~~

Meg: Az x pontos érték
általában nem ismerjük, ezért
a $\frac{\delta a}{|x|}$ helyett a $\frac{\delta a}{|a|}$

mennyiséget használjuk.

Indoklás:

$$\left| \frac{\delta a}{|x|} - \frac{\delta a}{|a|} \right| = \frac{||a|\delta a - |x|\delta a|}{|a||x|} \leq$$

$$\leq \frac{\delta a \cdot |x-a|}{|x| \cdot |a|} \leq \frac{(\delta a)^2}{|x| \cdot |a|} \quad \boxed{\text{h1.2}}$$

Ha $|x| \gg \delta a$ és $|a| \gg \delta a$

$$\Rightarrow \frac{(\delta a)^2}{|x| \cdot |a|} \text{ hibatag}$$

elhanyagolható,

Teljesen, $\frac{\delta a}{|x|} \approx \frac{\delta a}{|a|}$

Tétel:

1.) $\frac{\delta(a+b)}{|a+b|} \approx \max\left\{\frac{\delta a}{|a|}, \frac{\delta b}{|b|}\right\}$
 ha $ab > 0$. BACK

2.) $\frac{\delta(a-b)}{|a-b|} \approx \frac{\delta a + \delta b}{|a-b|}, \text{ ha } ab > 0$

3.) $\frac{\delta(ab)}{|ab|} \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|}, \text{ ha } \begin{cases} |a| \gg \delta a \\ |b| \gg \delta b \end{cases}$

4.) $\frac{\delta(a/b)}{|a/b|} \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|}, \text{ ha } \begin{cases} b \neq 0 \\ |b| \gg \delta b \end{cases}$

def: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2-szer folyt san diff tó fv.

és $x \approx a$. Ekkor az

$f(x) \approx f(a)$ ^{érték} közelítés

relatív hibája:

$$\frac{\delta(f(a))}{|f(a)|} \approx \frac{|f'(a)| \cdot \delta a}{|f(a)|}$$

def: Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2-szer
folyt san diff tó fv az $a \in \mathbb{R}$
pontbeli kondíciószáma

$$c(f, a) := \frac{|f'(a)| \cdot |a|}{|f(a)|}$$

A lebegőpontos hibaanalízis

Lebp₁

def: A lebegőpontos
számok halmaza

$$F := F(\beta, t, L, U) =$$

$$= \left\{ \pm m * \beta^e \mid \frac{1}{\beta} \leq m < 1, \right. \\ \left. m = 0.d_1d_2\dots d_t, L \leq e \leq U \right\} \cup \{0\}$$

ahol

- β a számrendszer alapja
- m a lebegőpontos szám mantisszája a β számrendszerben
- t a mantissa hossza
- L a legkisebb kitevő (alulcsordulási határ kitevője)
- U a legnagyobb kitevő (túlcsordulási határ kitevője)

Felírható a mantissa | Lebp₂

$$m = 0.d_1 d_2 \dots d_t = \\ = \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t}$$

$\Rightarrow$

$$F = \left\{ \pm \left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t} \right) \cdot \beta^e : \right. \\ \left. L \leq e \leq U \right\} \cup \{0\}$$

Tétel: Ha $a \in F \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$

$$M_L \leq |a| \leq M_U, \text{ ahol}$$

$$M_L = \beta^{L-1} \text{ és}$$

$$M_U = \beta^U (1 - \beta^{-t})$$

def: l. $G = [-M_u, M_u]$. $[Leb p_3]$

Az $fl: G \rightarrow F \subseteq G$,
 $x \mapsto fl(x)$

leképezést keresztésnek nevé,

def: Az $\mu := \frac{1}{2} \cdot \beta^{1-t}$

memmiziséget egységnyi keresztés
mértékének nevé,

Tétel: $\forall x \in G$ esetén

$$fl(x) = x(1+\varepsilon), |\varepsilon| \leq \mu.$$

def 1:

$$\text{Az } \varepsilon_M := 2u = \beta^{1-t}$$

értéket gépi epsilonnak nev.

def 2:

A gépi epsilon az 1 és a hozzá legközelebbi 1-nél nagyobb szám távolsága.

Algoritmus $\varepsilon_M / 2$

meghatározására a bináris
alap esetén:

```

x = 1
while 1 + x > 1
    x = x / 2
end

```

def: $\exists a, b \in F$ LebP₅
es $\square \in \{+, -, *, /\}$, dkk
 $fl(a \square b) = (a \square b)(1 + \varepsilon), |\varepsilon| < u$

Nem volt
