LER hibaanalízise | LERH1

Adott $Ax = b$ LER, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
~~T.f.~~ $\cancel{x} \in \mathbb{R}^n$ a valódi megoldás
és $b \in \mathbb{R}^n$ a jobboldali vektor.
T.f. $x \approx \hat{x}$ ~~és~~ és jelölje
$\Delta x := \hat{x} - x$ a közelítés hibáját.

__def__: ~~Az $Ax = b$~~
A fenti LER esetén az
$\underline{r}(y) = Ay - b$, $y \in \mathbb{R}^n$ mennyiséget reziduális hibának nev.

__Meg__: Az elméleti megoldás esetén
$\underline{r}(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

LERH2

def: T.f. / $\hat{x}$ (számított) közelítő megoldás kielégíti az

$$\hat{A}\hat{x} = \hat{b},$$

ahol $\hat{A} = A + \Delta A$ és $\hat{b} = b + \Delta b$

Akkor a ΔA és Δb mennyiséget - inverz hibáknak nev.

$\boxed{\text{Érzékenységi Vizsgálat}}$

T.f. $Ax = b$ $(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$ LER helyett a perturbált

$$A\hat{x} = b + \Delta b$$

LER-t oldjuk meg. Legyen $\hat{x} = x + \Delta x$. Vizsgáljuk meg a két megoldás eltérését!

def: ~~Ha $Ax = b$~~ Ha x valódi megoldása $Ax = b$ LER-nek és $x \approx \hat{x}$. Akkor a közelítés relatív hibája:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

<u>def</u>: Adott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszing. mátrix esetén

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

~~mennyiséget kondíciószámnak nev.~~
mennyiséget az A mátrix kondíciószámának nev.

<u>Tétel</u>:
Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszing. mátrix

$$\Longrightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

<u>Biz</u>: Vegyük a perturbált

$$A\hat{x} = b + \Delta b$$

LER_t és $\hat{x} = x + \Delta x$ közelítő megoldást.

$$\Rightarrow A\cdot \Big| \hat{x} = x + \Delta x$$

$$A\hat{x} = Ax + A\Delta x = b + A\Delta x$$

$$\Rightarrow b + \Delta b = b + A\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta b = A\Delta x$$

LERH4

$$\Rightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| .$$

$$Ax = b \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot / \ \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\|x\|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \leq$$

$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|A\|}{\|b\|} \cdot \|\Delta b\| =$$

$$= \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad . \quad \%$$

def: Az

$$Ax = b$$

LER-t (ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nem szing. mátrix)

a) jól kondicionáltnak nev., ha $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)$ kicsi

b) rosszul kondicionáltnak nev., ha $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)$ nagy.

Példa: Az

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

LER rosszul kondicionált.

Mi: $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} 1999 \\ 1997 \end{array} \Rightarrow \|A\|_\infty = 1999$

$$A^{-1} = \frac{1}{1000\cdot 998 - 999^2}\begin{bmatrix} 998 & -999 \\ -999 & 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

$\|A^{-1}\|_\infty = 1999$

$\mathrm{cond}_\infty(A) = 1999 \cdot 1999 = 3\,996\,001$, ami

~~ami nagy szám~~

(relatíven) nagy szám.

T.f. az

$$Ax = b$$

LER helyett a perturbált

$$(A + \Delta A)\hat{x} = b$$

LER-t oldjuk meg.

l. $\hat{x} = x + \Delta x$

és $r(\hat{x}) = A\hat{x} - b$ reziduális hiba.

Tétel: T.f. $\hat{x} \neq 0$ az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszing. m.) LER közelítő megoldása és $b \neq 0$.

Ha

$$\frac{\|r(\hat{x})\|_2}{\|b\|_2} =: \alpha < 1$$

$$\underset{a}{\Longrightarrow}$$

$$\Delta A = -\frac{1}{\|\hat{x}\|_2^2} \cdot r(\hat{x}) \cdot \hat{x}^T$$

diadikus mátrixra igaz, hogy $(A + \Delta A)\hat{x} = b$ (azaz ΔA inverz hiba)

és

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Tétel: LERH7

T.f. az

$$Ax = b \quad \cancel{(A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ nemszing. m.})}$$

LER helyett a perturbált

$$(A + \Delta A)\,\hat{x} = b + \Delta b$$

LER-t oldjuk meg, és legyen

$\hat{x} = x + \Delta x$.

Ha $\det(A) \neq 0$, $\cancel{\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)}$

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$$

és $b \neq 0$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)}{1 - \mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}.$$

Def: Egy

$$Ax=b$$ e

LER (ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátr.) megoldó ~~algoritmus~~ eljárást gyengén stabilnak nev. ~~ha~~ egy H mátrixosztályon, ha minden jólkondicionált $A \in H$ mátrix és minden $b \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén az $Ax=b$ LER $\hat{x}$ közelítő megoldására, ~~fell~~ ~~fennáll, hogy~~

$$\frac{\|\hat{x}-x\|}{\|x\|}$$ relatív hibája kicsi.

Tétel (Bunch)
Egy LER megoldó algor. gyengén stabil, ~~ha~~ a H mátrixosztályon, ha minden jólkondicionált $A \in H$ mátrix és minden $b \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén az $Ax = b$ LER $\hat{x}$ közelítő megoldására fennáll, hogy

1.) $\dfrac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|}$ kicsi

2.) $\dfrac{\|r(\hat{x})\|}{\|b\|}$ kicsi

3.) $\exists\, \Delta A$ úgy, hogy $(A + \Delta A)\hat{x} = b$ és $\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi.