

LKNM

LKNM

Alapfeladat: Adott $n < N \in \mathbb{N}$

és $g_0(x), \dots, g_n(x)$ folyt. fv. sorozata.

Fennáll az ~~alábbi~~ fv. kapcsolat:

$$y = \sum_{j=1}^{n+1} a_j g_{j-1}(x)$$

lineáris fv. kapcsolat, ahol $a_1, \dots, a_{n+1}$ együtthatók nemismertek

Az x és y változóka N számú megfigyelést végzünk, melynek eredménye

	a_1	a_2	$\dots$	a_{n+1}	
x	$g_0(x)$	$g_1(x)$	$\dots$	$g_n(x)$	$f(x) = y$
x_1	$g_0(x_1)$	$g_1(x_1)$	$\dots$	$g_n(x_1)$	$f(x_1) = y_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$g_0(x_i)$	$g_1(x_i)$	$\dots$	$g_n(x_i)$	$f(x_i) = y_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_N	$g_0(x_N)$	$g_1(x_N)$	$\dots$	$g_n(x_N)$	$f(x_N) = y_N$

A mérések miatt lenni kell/ LKNM2
allyn

$$y_i = \sum_{j=1}^{n+1} g_{j-1}(x_i) \cdot a_j + \varepsilon_i \quad (i=1, \dots, N)$$

ahol ε_i ismeretlen hiba, $(i=1, \dots, N)$.

A feladat, az hogy minimalizáljuk
a hibák négyzetösszegét:

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(y_i - \sum_{j=1}^{n+1} g_{j-1}(x_i) \cdot a_j \right)^2 \rightarrow \min$$

Most legyen

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \text{ és}$$

$$X = \begin{bmatrix} g_0(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_N) & \dots & g_n(x_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (n+1)}$$

Vektor alakban a hibavektor:

LKNT93

$$\varepsilon = y - Xa,$$

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \|\varepsilon\|_2^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (y - Xa)^T (y - Xa) \\ = \|y - Xa\|_2^2 \rightarrow \min,$$

azaz keressük $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektor/

$$\|y - Xa\|_2^2 \rightarrow \min \text{ legyen.}$$

Tétel: Az $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektor ~~min~~
akkor és csak akkor megoldása
a minimális feladatnak, ha

$$X^T(y - Xa) = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Biz:

LKNMA

Legyen $r(a) = y - Xa$ reziduális
hiba.

$$\text{T.f. } X^T r(a) = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ esetén}$$

$$r(c) = y - Xc = y - Xa + Xa - Xc$$

$$r(c) = r(a) + X(a - c)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|r(c)\|_2^2 &= (r(a) + X(a - c))^T (r(a) + X(a - c)) \\ &= (r(a)^T + (a - c)^T X^T) (r(a) + X(a - c)) = \\ &= r(a)^T r(a) + \underbrace{r(a)^T X(a - c)}_{=0} + \\ &\quad + (a - c)^T \underbrace{X^T r(a)}_{=0} + (a - c)^T X^T X(a - c) = \\ &= \underbrace{\|r(a)\|_2^2}_{\geq 0} + \underbrace{\|X(a - c)\|_2^2}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{az } a \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ vektor, melyre}$$
$$X^T r(a) = 0 \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ min. megoldása}$$

22

LKMM5

$$\|y - Xa\|_2^2 \longrightarrow \min$$

minimál feladatnak.

Fordítva: T.f. a $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ olyan vektor /

$$X^T r(c) = z \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Belátjuk, ekkor c nem lehet a minimál feladat megoldása.

U.i.: $\lambda \in \mathbb{R}$ ~~teszt~~ $d = c + \lambda z$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ ~~teszt~~.

$$\Rightarrow r(d) = y - Xd = y - Xc - \lambda Xz = r(c) - \lambda Xz$$

$$\|r(d)\|_2^2 = r(d)^T r(d) =$$

$$= (y - Xd)^T (y - Xd) =$$

$$= (y - X(c + \lambda z))^T (y - X(c + \lambda z))$$

$$= (y - Xc - \lambda Xz)^T (y - Xc - \lambda Xz)$$

$$= (r(c) - \lambda Xz)^T (r(c) - \lambda Xz) =$$

$$= r(c)^T r(c) - \lambda r(c)^T Xz - \lambda z^T X^T r(c) + \lambda^2 z^T X^T Xz$$

$$= r(c)^T r(c) - \lambda \underbrace{r(c)^T X z}_{z^T} - \lambda \underbrace{z^T X^T r(c)}_z + \lambda^2 z^T X^T X z$$

$$= \|r(c)\|_2^2 - 2\lambda \|z\|_2^2 + \lambda^2 \|Xz\|_2^2$$

Ha $\lambda \leftarrow$

Ha λ elég kicsi, például

$$\lambda < \frac{2\|z\|_2^2}{\|Xz\|_2^2} \Rightarrow$$

$$\|r(d)\|_2^2 = \|r(c)\|_2^2 - 2\lambda \|z\|_2^2 + \lambda^2 \|Xz\|_2^2 < \|r(c)\|_2^2$$

Tehát, ha $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ olyan vektor /

$X^T r(c) \neq 0$, akkor

c nem teljesíti a minimál feladatot. %

Név:

Évfolyam:

Házi feladat Numerikus Módszerek c. tantárgyból
II. éves Levelező Villamosmérnöki szak (BSc) hallgatók részére

1. Tegyük fel, hogy $\sqrt{15}$ értékét 10^{-8} hibakorláttal akarjuk kiszámítani. Az alábbi elméletileg egyenlő két kifejezés közül, melyiket lehet kisebb relatív hibával kiszámítani és hányszor kisebbel?

(i) $\frac{1}{(4 + \sqrt{15})^6}$.

(ii) $119071 - 30744\sqrt{15}$.

2. Gauss-eliminációval részleges főelemkiválasztást alkalmazva, oldja meg az alábbi $Ax = b$ l.e.r.-t, ahol a $b = [101, -13, 79]^T$ és az A mátrix sorai rendre: $[10.1, 10.1, 10.1]$, $[20.3, 25.3, 40.3]$, $[30.2, 50.2, 61.2]$.
3. Gauss-transzformációval számítsuk ki az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixának LU -felbontását és alkalmazzuk a kapott eredményt az $Ax = b$ LER megoldására, ha $b = [101, -13, 79]^T$ és az A mátrix sorai rendre: $[10.1, 10.1, 10.1]$, $[20.3, 25.3, 40.3]$, $[30.2, 50.2, 61.2]$.
4. Határozza meg az alábbi függvénytáblázathoz illeszkedő Lagrange interpolációs polinomot a *Lagrange segédfüggvény* segítségével és annak alapján $f(1.44)$ közelítő értékét!

x	1.1	2.1	3.1
$f(x)$	4.1	2.1	2.1

5. A *hatvány* módszerrel határozza meg az alábbi A mátrix domináns sajátértékének $q^{(2)}$ közelítő értékét valamint a hozzá tartozó közelítő sajátvektort és adjon hibabecslést a kapott eredményre a $q^{(0)} = 0$ és $v^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ kezdő érték és vektor esetén! A mátrix sorai rendre: $[5, 2, 2]$, $[2, 6, 1]$, $[2, 1, 4]$.
6. A *Seidel* módszerrel határozza meg az alábbi l.e.r. megoldásának $x^{(2)}$ közelítő értékét és adjon hibabecslést a kapott eredményre az $x^{(0)} = [3, 3, 3]^T$ kezdő vektor esetén!

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.1 \\ 14.1 \\ 16.1 \end{bmatrix}$$

7. Az *érintő parabola* módszerrel határozza meg az

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{27} = 0$$

nemlineáris egyenlet esetén a $[0, 1]$ intervallumban a gyök $x^{(4)}$ közelítő értékét és adjon hibabecslést a kapott eredményre!

8. Az *intervallum-felező* módszerrel határozza meg az

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{27} = 0$$

nemlineáris egyenlet esetén a $[0, 1]$ intervallumban a gyök $x^{(4)}$ közelítő értékét és adjon hibabecslést a kapott eredményre!

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{27} = 0$$

nemlineáris egyenlet esetén a $[0, 1]$ intervallumban a gyök $x^{(4)}$ közelítő értékét és adjon hibabecslést a kapott eredményre!

10. Az alábbi függvénytáblázat esetén határozza meg *Newton I. formulájának* segítségével azt a legfejebb másodfokú polinomot, melynek görbéjére az adatok legjobban illeszkednek!

x	1.1	2.1	3.1
$f(x)$	4.1	2.1	2.1

11. Írjuk le az alábbi függvénytáblázathoz illeszkedő a *Hermite* interpolációs polinomot definiáló egyenleteket!

x	0.1	1.1
$g(x)$	-1.1	1.1
$g'(x)$	1.1	2.1

12. Határozza meg az alábbi mátrix esetén a Frobenius, a sorösszeg és oszlopösszeg normákat valamint a kondíciós számot! A mátrix sorai rendre:

$$\begin{bmatrix} 10.1 & 10.1 & -210.1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20.3 & -250.3 & 40.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 333.2 & 50.2 & 61.2 \end{bmatrix}.$$

13. Newton módszerrel határozza meg az $f(x) = [f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]^T = 0$ nemlineáris egyenletrendszer megoldásának $x^{(2)}$ közelítő értékét és adjon hibabecslést a kapott eredményre! Az adottak: $f_1(x_1, x_2) = 2x_1^4 - 3x_2^3$, $f_2(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$, $x^{(0)} = [1, 1]^T$.

14. Határozza meg az alábbi integrál közelítő értékét és adjon hibabecslést a kapott eredményre! Használja fel azt a tényt, hogy az integrandus kétszer folytonosan differenciálható!

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx.$$

a) *Trapézformula* segítségével.

b) Az *összetett Trapézformula* segítségével, a $[-1, 1]$ intervallum 4 azonos hosszúságú rész-intervallum felosztása mellett.

15. Határozza meg az alábbi integrál közelítő értékét és adjon hibabecslést a kapott eredményre! Használja fel azt a tényt, hogy az integrandus négyszer folytonosan differenciálható!

$$\int_{-1}^1 e^{-2x^2} dx.$$

a) *Simpson formula* segítségével.

b) Az *összetett Simpson formula* segítségével, a $[-1, 1]$ intervallum 4 azonos hosszúságú részintervallum felosztása mellett.

16. A legkisebb négyzetek módszerével illesszen $g(x) = A_1 + A_2 \log_3 x$ alakú függvényt az alábbi táblázathoz!

x	0.3	1.1	3.1	9.1	27.1
$f(x)$	-1.1	1.1	3.1	4.1	7.1

¹ A számolásokat 4 tizedes pontossággal végezze!

² A feladatok 1-1 pontosak.

³ Legalább 9 pont szükséges az aláíráshoz.