# Numerikus deriválás

ND1

<u>Alapfeladat</u>: T.f. az $x_0, x_0 \pm h, x_0 \pm 2h, \ldots$
$\ldots, x_0 \pm kh \in \mathbb{R}$ $(h>0, k \in \mathbb{N})$ pontokban ismertek egy $f$ kellően sokszor diff.-tó fv. fv.-értékei. Azt vizsgáljuk meg, hogyan közelítjük az $f$ fv. deriváltjait az $x_0$ pontban a fv.értékek segítségével és hogy ezek közelítések milyen tulajdonságokkal rendelkeznek.

<u>def</u>: Jelölje a kellően sokszor deriválható $f$ fv. egy tetsz. deriváltját az $x_0$ pontban $Df$ és ennek egy közelítése legyen $\Delta f(h)$, {ahol $h$ az alappontok távolsága}. Azt mondjuk, hogy az $x_0$ pontban a $\Delta f(h)$ közelítés rendje (legalább) $r$, ha $\exists K>0$ szám,

$$|Df - \Delta f(h)| \le K h^r,$$

azaz ha

$$|Df - \Delta f(h)| = O(h^r).$$

~~def:~~ Az első derivált közelítése NMD2

Egy fv. deriváltját a differenciálhányados határértékeként értelmezzük. Így kézenfekvő a deriváltat a differenciálhányados értékeivel közelíteni.

**def**: A

$$\Delta f_+ := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

mennyiséget, ill. a

$$\Delta f_- := \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

mennyiséget az f fv. az $x_0$-beli haladó ill. retrográd differenciájának nev.

Tétel: Ha $f \in C^2 \Longrightarrow$ a haladó és a retrográd differencia elsőrendű közelítése az f fv-nek.

Biz: Vegyük az alábbi Taylor-sorfejtést a másodrendű tagig, $x_0$ körül. ~~$x_0$ körül~~

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-x_0)^2$$

valamilyen $\xi \in \mathbb{R}$-re.

$\boxed{\text{ND3}}$

a) $x \rightsquigarrow x_0 + h$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(\xi)}{2}\cdot h^2$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\,h + \frac{f''(\xi)}{2}\,h^2$$

$$\Delta f_+ := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}\,h$$

$$\cancel{\Rightarrow f'(x_0) \approx \Delta f_+}$$

$$\Rightarrow \Delta f_+ \approx f'(x_0) + \mathcal{O}(h)$$

b) $x \rightsquigarrow x_0 - h$

$$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2$$

$$\cancel{f(x_0-h}$$

$$\cancel{\Delta f_- \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} + \mathcal{O}(h)}$$

$$f(x_0-h) - f(x_0) = f'(x_0)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \quad \Big/ :(-h)$$

$$\Delta f_- = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \approx f'(x_0) + \mathcal{O}(h)$$

---

~~Def: A retrográd és a haladó differenciák átlagát központi differenciának, azaz~~

$$\cancel{\Delta f_c := \frac{\Delta f_+ + \Delta f_-}{2} = f(x_0+h) - 2h + f(x}$$

$$\cancel{= \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{2h}}$$

LND4

<u>def</u>: A retrográd és a haladó differenciák átlagát központi differenciának nev., azaz

$$\Delta f_c := \frac{\Delta f_+ + \Delta f_-}{2} = \frac{f(x_0-h) - f(x_0-h)}{h}$$

<u>Tétel</u>:

~~(a)~~ Ha $f \in C^3 \Longrightarrow$ a központi differencia másodrendű közelítése az ~~fv~~ f fv. deriváltjának.

~~(b)~~

## A második derivált közelítése

mivel a második derivált az első derivált deriváltja ezért a

$$\Delta^2 f_c := \frac{\Delta f_+ - \Delta f_-}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

közelítést másodrendű központi differenciának nev.

<u>Tétel</u>: A másodrendű központi differencia másodrendű közelítése egy $f \in C^4$ fv. második deriváltjának.

## A deriváltak másfajta közelítése

ND5

**Tétel**: Az $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$ pontokra illeszkedő interpolációs polinom (legfeljebb elsőfokú) deriváltja egybeesik a haladó diffciával.

Az $(x_0-h, f(x_0-h))$, $(x_0, f(x_0))$ pontokon illeszkedő interpolációs polinom (legfeljebb elsőfokú) deriváltja egybeesik a retrográd diffciával.

**Tétel**: Az $(x_0-h, f(x_0-h))$, $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$ pontokra illeszkedő interpolációs polinom (legfeljebb másodfokú) deriváltja $x_0$-ban egybeesik a központi diffciával, második deriváltja pedig a másodrendű központi diffciával.

**Tétel**: Az $(x_0-h, f(x_0-h))$, $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$ pontokra illeszkedő harmadfokú spline interpolációs függvény $x_0$-pontbeli deriváltja egybeesik a központi differenciával.