Numerikus integrálás ~~alo~~

~~Alapfeladat~~: ~~Ha~~ Tudjuk, hogy ha egy $f(x)$ fv. az $[a,b]$ intervallumban integrálható $F(x)$ primitív fv-nyel, akk a Leibnitz szabályból

$$I := \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

De a Leibnitz szabály nem mindig közvetlenül alkalmazható: Pl.:

$$\int_0^1 \cos x\,dx = [\sin x]_0^1 = \sin 1,$$

A ~~szi~~ $\sin 1$ ~~csak~~ értéket csak közelítőleg határozható meg.

def: Azt az eljárást, amikor egy fv határozott integrálját nem a Newton–Leibnitz–szabály segítségével adjuk meg, hanem azt valamilyen módszerrel közelítjük, numerikus integrálásnak nev.

~~A~~ r

A numerikus integrálás alapfeladata:

Adott az alábbi fv táblázat

x	x_0	x_1	....	x_n
$f(x)$	f_0	f_1		f_n

ahol $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$x_0 = a$, $x_n = b$.

Adjunk becslést az $I := \int_a^b f(x)\,dx$ integrál értékére!

Legyen I_n az $f_0, f_1, \ldots f_n$ fvértékeknek egy lineáris kombinációja, azaz

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k, \quad a_k \in \mathbb{R} \ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Ezt a lin. komb.-t kvadraturaformulának nev.

~~Defini~~ Jelölje $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ az $[a,b]$ ~~alappont~~ intervallum felosztó alappontok egy ~~hal~~ halmazát.

Def: Zárt a kvadratura-formula, ha $a, b \in \Omega_n$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

~~def~~: Nyílt a formula, ha $a, b \notin \Omega_n$, $h = \frac{b-a}{n+2}$, $x_k = a + (k+1)h$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $x_{-1} = a$, $x_{n+1} = b$

Néhány egyszerű integráló formula

① Érintő formula

$$I_é = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Tétel: (érintő formula hibája)

l. $c = \frac{a+b}{2}$, $f \in C^2[a,b]$, akkor az érintő formulával

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$$

valamilyen $\eta \in [a,b]$ -ra.

Biz: ~~Fejtjük c-körül az f(x) fv-~~
Fejtjük Taylor sorba az $f(x)$ fv-t c-körül a 2. deriváltig.

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(\eta_x)$$

Integrálva kapjuk/

$$I_é = (b-a)f(c) + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{(x-c)^2}{2} f''(\eta_x)\,dx$$

$\Rightarrow$ A hiba

$$R = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot |f''(\eta)| = \frac{M_2}{24}(b-a)^3,$$

$$M_2 = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

③ Összetett érintő formula (NumInt 4)

l. $f_{i/2} := f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$, $i = 1:n$.

$$I := \int_a^b f(x)\,dx \approx \acute{E}_n = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{i/2}$$

Tétel: Ha $f \in C^2[a,b] \Longrightarrow$

az összetett formula hibája:

$$|I - \acute{E}_n| = \frac{(b-a)h^2}{24} \cdot |f''(\eta)|,$$

valamilyen $\eta \in [a,b]$ értékre.

Továbbá,

$$|I - \acute{E}_n| \le \frac{(b-a)\,h^2 M_2}{24},$$

ahol M_2 az $f(x)$ 2. deriváltjának egy felső korlátja az (a,b) nyílt intervallumban.

~~③ Érintő formula: $I := \int_a^b f(x)\,dx \approx$~~

~~$\approx E =$~~

3. Trapéz formula:

$$T = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Tétel: Ha $f \in C^2[a,b] \Longrightarrow$

$$I := \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$

valamilyen $\eta \in [a,b]$-ra.

4. Összetett trapézformula: $I = \int_a^b f(x)dx \approx$

$$\approx T_n = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right)$$

Tétel: Ha $f \in C^2[a,b] \Longrightarrow$ az összetett trapéz hibája:

$$\cancel{|I - T_n|} \quad |I - T_n| = \frac{(b-a)h^2}{12} \cdot |f''(\eta)|$$

Meg: mivel az η nemismert érték is lehet ezért a hiba

$$|I - T_n| \le \frac{(b-a)h^2}{12} \cdot M_2, \text{ ahol}$$

~~M_2 = max egy felső~~

M_2 az $f''(x)$ egy felső korlátja az (a,b) nyílt intervallumon.

⑤ Simpson formula:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx S = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Tétel: Ha $f \in C^4[a,b] \Rightarrow$ a hiba

$$|I - S| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot M_4,$$

ahol M_4 az $f^{(4)}(x)$ 4. derivált egy felső korlátja

⑥ Összetett Simpson formula: $I = \int_a^b f(x)\,dx \approx$

$$\approx S_n = \frac{h}{6}\left[f_0 + 4f_{1/2} + 2f_1 + 4f_{3/2} + 2f_2 + \cdots + 4f_{(n-1)/2} + f_n\right]$$

Tétel: Ha $f \in C^4[a,b] \Rightarrow$ a hiba

$$|I - S_n| = \frac{(b-a)h^4}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta)$$

valamilyen η-ra,

vagy

$$|I - S_n| \leq \frac{(b-a)h^4 M_4}{2880},$$

ahol

$$M_4 = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

~~Feladat~~: Határozza meg az NumInt7

$$I = \int_0^1 x^4 dx$$

~~integrál~~ ~~a tanult összetett közelítését, ha az intervallum~~
közelítését a tanult összetett formulákkal 4 osztóintervallumot használva, és a hibákat!

$\boxed{\text{Megoldás}}$

$f: [0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$. Mivel a részintervallumok száma $n = 4 \Rightarrow$ intervallumközt eredményez

$$h = \frac{1-0}{4} = 0,25$$

x	0	0,25	0,5	0,75	1
$f(x)$	0	0,0039	0,0625	0,3164	1

① Összetett érintő formula: $M_2 = 12$

~~$f_{1/2} = f\left(\frac{0+0,25}{2}\right) =$~~

$$E_4 = 0,25\left[f(0,125) + f(0,375) + f(0,625) + f(0,875)\right] = 0,189697 2$$

$$SE_4 \approx \frac{(1-0) \cdot 0,25^2 \cdot 12}{24} = 0,03125$$

② Összetett trapéz formula

$$T_4 = 0,25\left[\frac{f(0)}{2} + f(0,25) + f(0,5) + f(0,75) + \frac{f(1)}{2}\right] =$$

$$= 0,22070$$

$$ST_4 \approx \frac{(1-0) \cdot 0,25^2}{12} \cdot 12 = 0,0625$$

③ Összetett simpson formula: $M_4 = 24$

$$\cancel{\frac{0,25}{6}\Big[f(0) + 4f(0,25) + 2f(0,5) + 4f(0,375) + 2f(0,75) + 4f(0 + 2f(0,5) + 4f(0,625)}$$

$$\frac{0,25}{6}\Big[f(0) + 4f(0,125) + 2f(0,5) + 4f(0,375) + 2f(0,75) + 4f(0,875) + 2f(0,5) + 4f(0,625) + f(1)\Big] = 0,20003$$

$$SS_4 \approx \frac{(1-0)\cdot 0,25^4 \cdot 24}{2880} = 3,2552 \cdot 10^{-5}$$