

Interpolációs polinomok (Ip₁)

I] Interpoláció feladat

l. $a = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ egy felosztási az $[a, b]$ intervallumnak és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ f.v. az alábbi fvtáblázattal

x	$a = x_1$	x_2	$\dots$	$x_n = b$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

Keressünk

$g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1}$
lefejező $(n-1)$ -ed fokú polinomot, hogy
 $g(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$

Meg: Az $x_1, \dots, x_n$ pontokat
alappontoknak is nevezi.

II] Lagrange interpoláció

Ip₂

Az interpolációs polinom létezését és egyértelműségét biztosítja az alábbi tétel.

Tétel

Pontosan egy olyan ~~megfelelő~~ $(n-1)$ -edfokú g polinom létezik, melyre igaz, hogy

$$g(x_i) = f(x_i), \quad i=1, \dots, n.$$

Tétel (közelítés hibája)

T.f. f n -szer^{folyt. szm} differenciálható f.v. az $[a, b]$ -~~on~~.

$$\Rightarrow |f(x) - g(x)| < \frac{M_n}{n!} (b-a)^n,$$

ahol $M_n > 0$ és

$$M_n = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n)}(x)|$$

A

$$g(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x)$$

~~f.v. elem~~

f.v. elemet tesz az interpoláció
feladatnak, ahol

$$l_i(x) := \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

ln. i -edik Lagrange alappolinom

Newton- interpoláció

A Lagrange interpoláció hátránya:

Képzelfük, hogy az $y_1, \dots, y_n$ számok mérési eredmények. Kiszámítjuk a Lagrange-~~féle~~ $p(x)$ a Lagrange-féle interpolációs polinomot, úgy, hogy

$$p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2, \dots, p(x_n) = y_n$$

Keletkezik egy új mérési eredmény: az x_{n+1} helyen y_{n+1} . Ekkor sajnos előrel kell kezdeni a számolást. Viszont a Newton-interpolációval ~~ittu~~ itt tudjuk beidézni ezt a problémát:

Az $x_1, \dots, x_n$ helyeken megfelelő $p(x)$ polinomhoz egy

$$g(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

alakú korrekciós tagot adunk hozzá. Ez nem rontja el az $x_1, \dots, x_n$ helyeken felvett értékeket. A c konstans úgy választjuk, hogy ~~az~~ a $p(x) + g(x)$ függvény értéke az x_{n+1} helyen is jó legyen, azaz

$$p(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

Adott	x	x_1	$\dots$	x_n	füttáblázat
	$f(x)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$	

Tétel: (Newton-féle ~~előadatok~~ ~~osztott~~ diff. kal)

A $p(x)$ Lagrange interpolációs polinom előadható

$$p(x) = [x_1]f + [x_1, x_2]f \cdot (x - x_1) + [x_1, x_2, x_3]f \cdot (x - x_1)(x - x_2) + [x_1, x_2, x_3, x_4]f \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots$$

$$+ [x_1, x_2, \dots, x_n]f \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

alakban, ahol az együtthatóként szereplő ún. osztott differenciák rekurzív módon határozható meg az

$$[x_k]f$$

és

$$[x_j, \dots, x_k]f = \frac{[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}]f - [x_j, \dots, x_{j+k-1}]f}{x_{j+k} - x_j}$$

ig az ^{első} ~~első~~ rendű és k -adrendű képlettel

$$k = 1: n \quad \text{és} \quad j = 1: n - k$$

Példa: Adott az alábbi függvényérték táblázat

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	2	-2	-4	4

Határozza meg az interpolációs polinomot
Newton-féle osztott differenciákkal!

Megoldás:

$$-2 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[-2, -2]$$

$$[-2, -2, -4]$$

$$[-2, -2, -4, 4]$$

$$\frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = [-4]$$

$$\frac{-1 - (-4)}{1 - (-2)} = [1]$$

$$\frac{5/4 - 1}{3 - (-2)} = \left[\frac{1}{20} \right]$$

$$-1 \quad -2$$

$$\frac{-4 - (-2)}{1 - (-1)} = -1$$

$$\frac{4 - (-1)}{3 - (-1)} = \frac{5}{4}$$

$$1 \quad -4$$

$$\frac{4 - (-4)}{3 - 1} = 4$$

$$3 \quad 4$$

$$p(x) = 2 + (-4)(x - (-2)) + 1 \cdot ((x - (-2))(x - (-1))) +$$

$$+ \frac{1}{20} \cdot ((x - (-2))(x - (-1))(x - 1)) =$$

$$= \frac{x^3}{20} + 0,1x^2 - \frac{21}{20}x - 4,1$$

$$p(x) = 0,05x^3 + 0,1x^2 - 1,05x - 4,1$$

III] Newton I. formula

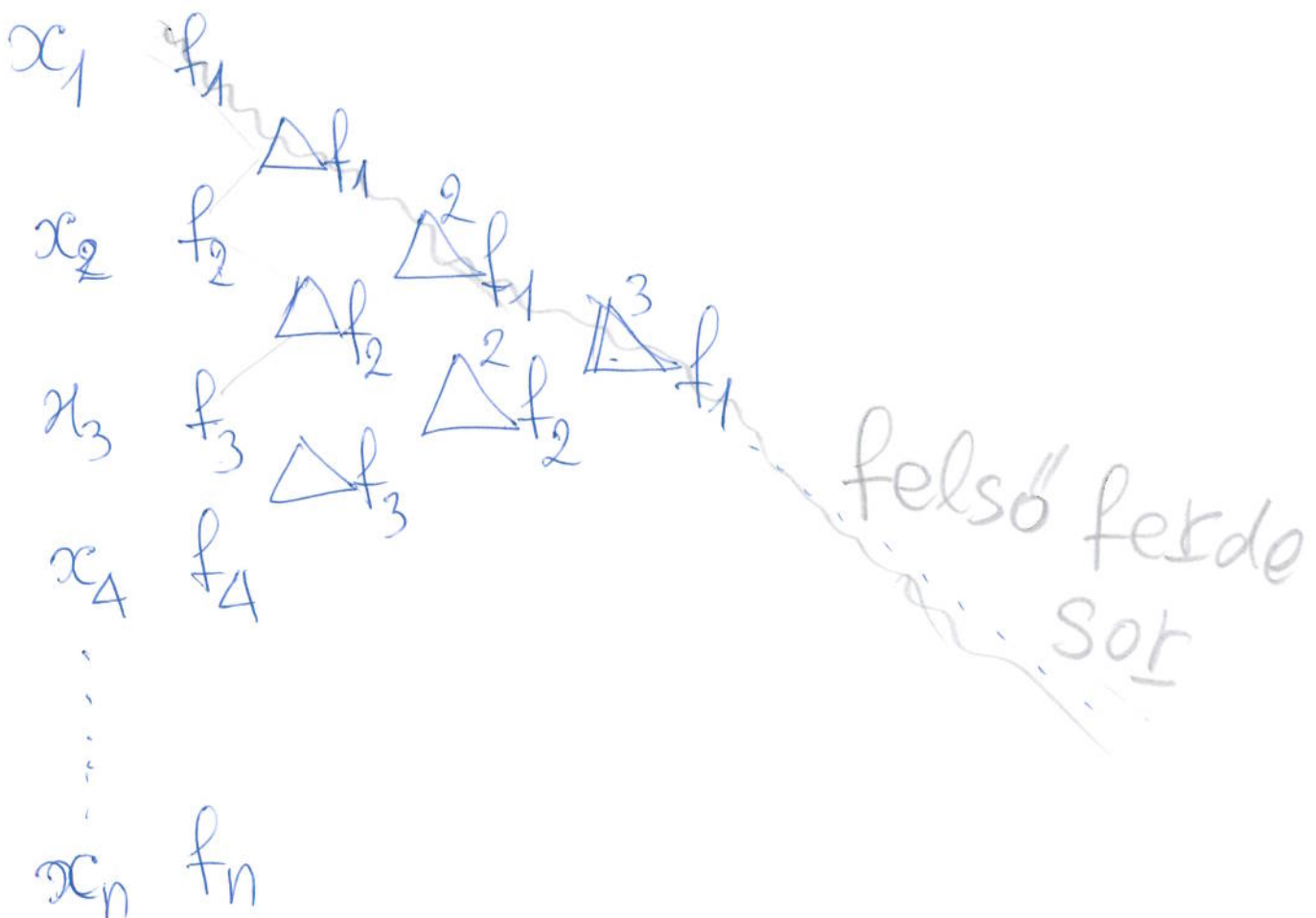
TP4

legyenek (x_i, f_i) pontok, ahol

$$f_i = f(x_i), \quad i=1, \dots, n.$$

T.f. $x_{i+1} - x_i = h$ állandó

$(i=1, \dots, n-1)$. Akkor képezhetjük az n - differenciál-táblázatot az alábbi módon:



$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i, \quad k \geq 2.$$

$$g(x) = \binom{t}{0} f_1 + \binom{t}{1} \Delta f_1 + \binom{t}{2} \Delta^2 f_1 + \dots \\ \dots + \binom{t}{n-1} \Delta^{n-1} f_1,$$

ahol
ahol

$$t = \frac{x - x_1}{h} \quad \text{és}$$

és

$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}$$

Feladat: l. adott az

TP5

x	0	0.1	0.2
$f(x)$	1	1.415	1.261

fü táblázat. Határozza meg ~~egy~~ ^{az} olyan
legfeljebb ~~3~~ 2-odfokú polinomot, melynek
görbéje áthalad a pontokon!

Adjon Lagrange és Hermite interpol-
ción ~~alapuló~~ ^{interpol} meg valamint Newton I
formulán alapuló megoldást! $f(0.185) \approx$?

(i) Lagrange interp. esete

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i=1,2,3.$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0.1)(x-0.2)}{(0-0.1)(0-0.2)} = 50x^2 - 15x + 1$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.1-0)(0.1-0.2)} = -100x^2 + 20x$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-0.1)}{(0.2-0)(0.2-0.1)} = 50x^2 - 5x$$

$$\Rightarrow g(x) = 1 \cdot (50x^2 - 15x + 1) + 1.115(-100x^2 + 20x) + 1.261(50x^2 - 5x) =$$

$$g(x) = 1.55x^2 + 0.995x + 1$$

(ii) Newton I. formula este | $h=0.1$

0	1		
		0.115	
0.1	1.115		0.031
		0.146	
0.2	1.261		

$$\begin{cases} 0.1 - 0 = 0.1 \\ 0.2 - 0.1 = 0.1 \end{cases}$$

$$t = \frac{x-0}{0.1}$$

$$t = 10x$$

$$\binom{t}{0} = 1$$

$$\binom{t}{1} = t = 10x$$

$$\binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2} = \frac{10x(10x-1)}{2} = 50x^2 - 5x$$

$$g(x) = 1 + 0.115 * 10x + 0.031 * (50x^2 - 5x)$$

$$g(x) = 1 + 0.995x + 1.15x^2$$

$$f(0.185) \approx g(0.185) =$$

$$= 1 + 0.995 * 0.185 + 1.15 * 0.185^2 =$$

$$= 1.2334$$

$$\text{Totalt } \left[f(0.185) \approx 1.2234 \right]$$

IV] Hermite interpoláció

$\mathbb{I}P_8$

Adottak $a=x_1, x_2, \dots, x_n=b$ az $[a,b]$ intervallum alappontjai és

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffható fv. úgy, hogy $f'(x_i) \neq 0$ ($i=1, \dots, n$) ismertek.

Keressünk és $f(x_i)$

$$g(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_{2n-1} x^{2n-1}$$

legfeljebb $(2n-1)$ -edfokú polinomot, hogy

$$\begin{cases} g(x_i) = f(x_i), & i=1, \dots, n \\ g'(x_i) = f'(x_i), & i=1, \dots, n \end{cases}$$

Fv táblázat:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$
$f'(x)$	$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	$\dots$	$f'(x_n)$

Az $a_1, \dots, a_{2n}$ egyhátték meghatározásához: $\mathbb{I}P_g$

1.)

$$g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n-1}$$

$$g'(x) = a_2 + 2a_3 x + \dots + (2n-1)a_{2n} x^{2n-2}$$

2.) Megoldjuk az előbbi LER-t:

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + \dots + a_{2n} x_1^{2n-1} = f(x_1) \\ \vdots \\ a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + \dots + a_{2n} x_n^{2n-1} = f(x_n) \\ a_2 + 2a_3 x_1 + \dots + (2n-1)a_{2n} x_1^{2n-2} = f'(x_1) \\ \vdots \\ a_2 + 2a_3 x_n + \dots + (2n-1)a_{2n} x_n^{2n-2} = f'(x_n) \end{array}$$

(I_{p10})

Feladat: Határozza meg az
 alábbi ~~f~~ táblának ~~meg~~ szerinti
 Hermite interpolációs polinomot!
 Becsülje az $f(0.90)$ és $f'(0.90)$
 értékeket!

x	-1	1
$f(x)$	-1	1
$f'(x)$	1	2

$$n = 2$$

$$2n - 1 = 4 - 1 = 3$$

Keressünk

$$g(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

legfeljebb 3-adrendű polinomot/

$$\begin{array}{l} g(0) = -1 \\ g(1) = 1 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} g'(0) = 1 \\ g'(1) = 2 \end{array} \right\|$$

$$g'(x) = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2$$

Megoldjuk $Ac = b$ l.e.r. -t

ALER eldalltasa

$\boxed{Ip_{11}}$

$$g(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

$$g(x) = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2$$

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 = -1$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$$

$$c_2 - 2c_3 + 3c_4 = 1$$

$$c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 2$$

G-J plus peldall:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,75 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,25 \end{array} \right]$$

$$g(x) = -0,25 +$$

$$g(x) = -0,25 +$$

$$g(x) = -0,2500 + 0,7500x + 0,2500x^2 + 0,2500x^3$$

$$g'(x) = 0,7500 + 0,5000x + 0,7500x^2$$

$$f(0,9) \approx g(0,9) \approx +0,8349 \quad 0,8098$$

$$f'(0,9) \approx g'(0,9) \approx 1,8075$$