Lagrange interpolació (LI₁)

<u>Alapfeladat</u>: Adott

$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

felosztása az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumnak. ~~és~~ ~~t.f.~~ ~~A~~dott

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fv esetén t.f.

$f(x_1), \ldots, f(x_n)$ fv.-értékek

ismertek. Keressünk olyan

$p(x)$ legfeljebb $(n-1)$-ed fokú

polinomot, melyre

$$p(x_1) = f(x_1), \ldots, p(x_n) = f(x_n).$$

- Az $x_1, \ldots, x_n$ pontokat alappontoknak nev.

- - A $p(x)$ polinomot Lagrange interpolációs polinomnak nev.

LI2

Tétel: ~~Ponton~~

Adott

x	$a = x_1$	x_2	$\dots$	x_{n-1}	$x_n = b$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

fv. táblázat. Pontosan egy olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú ~~polinom~~ $p(x)$ polinom lét., melyre
$p(x_k) = f(x_k)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Biz: Tekintsük $k = 1, 2, \dots, n$ esetén az

~~$l_k(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x}{}$~~

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

polinomot. Nyilván $l_k(x)$ $(n-1)$-edfokú polinom ~~$k = 1, \dots, n$ esetén~~

és

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \cancel{i \neq k} \;\; j = i,\; i \neq k \end{cases}$$

Definiáljuk

$$p(x) = f(x_1)\, l_1(x) + \dots + f(x_n)\, l_n(x),$$

~~polinomot~~. fv-t.

A $p(x)$ legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, mert $(n-1)$-edfokú polinomok lineáris kombinációja. Nyilván való /

~~$p(x_j)$~~ $\forall\, j = 1, 2, \dots, n$ esetén

$$p(x_j) = f(x_j) \cdot \underbrace{l_j(x_j)}_{=1} + \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} f(x_k)\, \underbrace{l_k(x_j)}_{=0}}_{=0}$$

$\Longrightarrow$

$$p(x_j) = f(x_j).$$

Tehát $p(x)$ egy interpolá- LI4
ciós polinom.

Most lássuk be, csak egy ilyen ~~van~~ van!

Ui: T.f. van még egy másik $q(x)$ ilyen polinom.

Ll. $h(x) := p(x) - q(x)$.

$\Longrightarrow$ $h(x)$ is legfeljebb $(n-1)$-ed-fokú polinom.

$\forall\ k = 1, 2, \dots, n$ esetén

$$h(x_k) = p(x_k) - q(x_k) =$$
$$= f(x_k) - f(x_k) = 0$$

Mivel $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$ ~~számok~~ és $h(x)$ ~~pol~~ legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom gyökei (tehát legalább n db),

$\Longrightarrow$ $h(x) \equiv 0$ ~~is~~ ~~$p(x)$~~, $[a,b]$-n

$$\Longrightarrow p(x) = q(x).$$

Def: Az

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$k = 1, \ldots, n$, polinomaokat a Lagrange segéd polinomoknak nev.

Tétel: Adott

x	x_1	$\ldots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$\ldots$	$f(x_n)$

fv. táblázat ~~esetén~~, $a = x_1 < \ldots < x_n = b$.
T.f. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n-szer folytsan deriválható és l. $\tilde{x} \in [a, b]$.

$$\Longrightarrow \left| p(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) \right| \leq \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!} \cdot \prod_{k=1}^{n} |\tilde{x} - x_k|$$

valamilyen $\xi \in [a, b]$-re.

Newton I. formula

<u>def</u>: Az $x_1 < \dots < x_n$ véges számú pontsorozatot ekvidisztánsnak nev., ha $x_{i+1} - x_i = h$ $(i = 1, \dots, n-1)$ állandó.

Adott az

x	x_1	...	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

fv. táblázat esetén t. f. az $x_1, \dots, x_n$ alappontok ekvidisztánsak. Jelölje

$$f_i := f(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Tekintsük az alábbi ún. differenciatáblázatot:

felső ferde sor

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & f_1 & & & \\
 & & \Delta f_1 & & \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & \\
 & & \Delta f_2 & & \Delta^3 f_1 \quad \dots \\
x_3 & f_3 & & \Delta^2 f_2 & \vdots \\
 & & \Delta f_3 & \vdots & \\
x_4 & f_4 & \vdots & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
x_n & f_n & & &
\end{array}
$$

ahol $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$$

$i = 1, \dots, n-1$

$k = 1, \dots, n-1$

<u>def</u>: A $\Delta^k f_i$ értéket az i-edik k-ad rendű differenciálnak nev. ($k=1$ rendszámot nem írjuk ki).

LI8

Ekkor a felső ferde sort felhasználva az alábbi interpolációs polinomhoz jutunk:

$$p(x) = \binom{t}{0} f_1 + \binom{t}{1} \Delta f_1 + \dots + \binom{t}{n-1} \Delta^{n-1} f_1$$

~~ahol $t = \frac{x - x_1}{h}$~~

ún. Newton I. formulája, ~~ahol~~

$$t = \frac{x - x_1}{h}.$$

Meg: ritkán használjuk fel egyidejűleg az összes alappontot, mert a pontosság ~~nem változik, ha~~ nem mindig változik a fokszám növelésével.

LER-n alapuló megoldás

L.I9

Adott

x	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

fv táblázat.
Keressük az a $p(x)$ legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomot /

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 \to n.$$

$$p(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}.$$

Előállítsuk az alábbi LER az alappontok behelyettesítésével

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 x_1 + \dots + a_n x_1^{n-1} &= f(x_1) \\ \vdots \qquad & \vdots \\ a_1 + a_2 x_n + \dots + a_n x_n^{n-1} &= f(x_n), \end{aligned}$$

melyet megoldva kapjuk a keresett polinom együtthatoit.

Hermite interpoláció | HI$_1$

Legyen ismert az $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fv. és első deriváltjának értéke az $a=x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ alappontokban. Keressük azt a $p(x)$ legfeljebb $(2n-1)$-ed-fokú polinomot

$$\left.\begin{aligned} p(x_i)&=f(x_i)\\ p'(x_i)&=f'(x_i)\end{aligned}\right\}\ i=1,\dots,n.$$

I.

$$p(x)=a_1+a_2x+\dots+a_{2n}x^{2n-1}$$

$$p'(x)=\quad a_2+2a_3x+\dots+(2n-1)a_{2n}x^{2n-2}$$

Akkor az alappontok behelyettesítésével kapjuk az alábbi LER-t

HI$_2$

$$a_1 + a_2 x_1 + \dots + a_{2n} x_1^{2n-1} = f(x_1)$$
$$\vdots$$
$$a_1 + a_2 x_n + \dots + a_{2n} x_n^{2n-1} = f(x_n)$$
$$a_2 + \dots + (2n-1) a_{2n} x_1^{2n-2} = f'(x_1)$$
$$\vdots$$
$$a_2 + \dots + (2n-1) a_{2n} x_n^{2n-2} = f'(x_n)$$

(*)

Jelöljük D-vel együttható mátrixának det$\underline{\text{sát}}$:

$$D := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \dots & (2n-1) x_1^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2x_n & \dots & (2n-1) x_n^{2n-2} \end{vmatrix}$$

$\Longrightarrow D \neq 0.$

Ui. t.f. $D = 0$

$\Longrightarrow$ van $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ / $\boxed{HI_3}$

x megoldása $(*)$ LER-nek

$\Longrightarrow$

a) x megoldása az első ~~n~~ LER-nek $\Longrightarrow$ $p(x) = a_1 + \dots + a_{2n} x^{2n-1} \not\equiv 0$

b) x megoldása a maradék ~~n L~~ n LER-nek $\Longrightarrow$

$p'(x) = a_2 + 2a_3 x + \dots + (2n-1) a_{2n} x^{2n-2}$

$\not\equiv 0$

$\Longrightarrow$ $x_1, \dots, x_n$ legalább 2-szer zérushelye a $p(x) \not\equiv 0$ polinomnak $\lightning$, mert $p(x)$ legfeljebb $(2n-1)$-edfokú.

HI

Tétel:

folyt.

l. $f(x)$ $2n$-szer diffható $[a,b]$-n,

~~és~~ $a = x_1 < \dots < x_n = b$ és

$\tilde{x} \in [a,b]$.

$\Longrightarrow$

~~$|p(x) - f$~~

$$|p(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| \le \frac{|f^{(2n)}(\xi)|}{(2n)!} \prod_{i}^{n} (\tilde{x} - x_i)^2,$$

valamilyen $\xi \in [a,b]$-re.