

7. előadás

Numerikus analízis

Tekintsük

$$Ax = b$$

lineáris egyenletrendszer, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszinguláris mátrix és $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Legyen $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ egy kezdeti érték és $x^* \in \mathbb{R}^n$ az egyenlet egzakt megoldása.

Tekintsük az

$$x^{(r+1)} = Gx^{(r)} + k \quad r = 0, 1, 2 \dots$$

konzisztens iterációs módszert. Nyilvánvalóan

$$x^* = Gx^* + k$$

teljesül.

Ekkor az r -dik közelítés hibáját

$$e^{(r)} = x^{(r)} - x^*$$

képlettel definiáljuk.

Az

$$x^{(r+1)} - x^* = G(x^{(r)} - x^*)$$

összefüggésből

$$e^{(r+1)} = Ge^{(r)}$$

adódik. Tegyük fel, hogy a G iterációs mátrixra $\|G\| < 1$ teljesül. Ekkor

$$\|e^{(r+1)}\| = \|Ge^{(r)}\| \leq \|G\| \|e^{(r)}\| < \|e^{(r)}\|$$

adódik.

Tétel

Legyen adott az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nonszinguláris mátrix és $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ és a belőle származtatott

$$x^{(r+1)} = Gx^{(r)} + k \quad r = 0, 1, 2 \dots$$

iterációs módszer. Ha a $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ iterációs mátrixra $\|G\|_\infty < 1$, akkor tetszőleges $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdeti érték esetén az iterációs módszer konvergens vektorsorozatot eredményez, mely tart az $x^* \in \mathbb{R}^n$ egzakt megoldáshoz és a közelítés hibájára teljesül a következő egyenlőtlenség minden $r = 1, 2, \dots$ esetén:

$$\left\| x^{(r+1)} - x^* \right\|_\infty \leq \frac{\|G\|_\infty}{1 - \|G\|_\infty} \left\| x^{(r+1)} - x^{(r)} \right\|_\infty.$$

Bizonyítás

Első lépésként számítsuk ki a következőt:

$$\begin{aligned}\|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty} &= \|Gx^{(r)} - Gx^{(r-1)}\|_{\infty} \leq \|G\|_{\infty} \|x^{(r)} - x^{(r-1)}\|_{\infty} \\ &= \|G\|_{\infty} \|Gx^{(r-1)} - Gx^{(r-2)}\|_{\infty} \\ &\leq \|G\|_{\infty}^2 \|x^{(r-1)} - x^{(r-2)}\|_{\infty} = \dots \\ &\leq \|G\|_{\infty}^{r-t} \|x^{(t+1)} - x^{(t)}\|_{\infty}\end{aligned}$$

minden $1 \leq t < r$ esetén

Bizonyítás

Továbbá érvényes a következő:

$$\begin{aligned} \|x^{(r+p)} - x^{(r)}\|_{\infty} &\leq \|x^{(r+p)} - x^{(r+p-1)}\|_{\infty} + \|x^{(r+p-1)} - x^{(r+p-2)}\|_{\infty} \\ &\quad + \dots + \|x^{(r+2)} - x^{(r+1)}\|_{\infty} + \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Ebből az előzőt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|x^{(r+p)} - x^{(r)}\|_{\infty} &\leq \|G\|_{\infty}^{p-1} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty} \\ &\quad + \|G\|_{\infty}^{p-2} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty} + \dots \\ &\quad + \|G\|_{\infty} \|x^{(r+1)} - x^{(r+1)}\|_{\infty} + \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty} \end{aligned}$$

Bizonyítás

A mértani sor összegképletét felhasználva kapjuk, hogy

$$\|G\|_{\infty}^{p-1} + \|G\|_{\infty}^{p-2} + \dots + \|G\|_{\infty} + 1 = \frac{1 - \|G\|_{\infty}^p}{1 - \|G\|_{\infty}}$$

Ebből és az előző egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \|x^{(r+p)} - x^{(r)}\|_{\infty} &\leq \frac{1 - \|G\|_{\infty}^p}{1 - \|G\|_{\infty}} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|G\|_{\infty}} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty} \\ &\leq \frac{\|G\|_{\infty}^r}{1 - \|G\|_{\infty}} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty} \end{aligned}$$

Bizonyítás

Ha r -rel tartunk a végtelenhez, akkor az egyenlőtlenség jobboldala 0-hoz tart. Ebből adódik, hogy az $\{x^{(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ sorozat Cauchy-sorozat, ami véges dimenzióban azt jelenti, hogy konvergens (mert $\mathbb{R}^n$ teljes metrikus tér a szokásos normával). Ebből következik, hogy csak egyetlen határértéke lehet: x^* .

Vegyük az egyenlőtlenség mindkét oldalán a $p \rightarrow \infty$ határátmenetet.

Ekkor $\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(r+p)} = x^*$ és $\|G\|_{\infty} < 1$ miatt $\lim_{p \rightarrow \infty} \|G\|_{\infty}^p = 0$.

Emiatt és $\|G\|_{\infty} < 1$ kapjuk, hogy

Bizonyítás

$$\|x^* - x^{(r)}\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - \|G\|_{\infty}} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty},$$

azaz

$$\|e^{(r)}\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - \|G\|_{\infty}} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty}.$$

Mivel $\|e^{(r+1)}\|_{\infty} \leq \|G\|_{\infty} \|e^{(r)}\|_{\infty}$, ezért

$$\|x^* - x^{(r+1)}\|_{\infty} \leq \|G\|_{\infty} \frac{1}{1 - \|G\|_{\infty}} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty},$$

azaz

$$\|x^* - x^{(r+1)}\|_{\infty} \leq \frac{\|G\|_{\infty}}{1 - \|G\|_{\infty}} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty},$$

ami az állításunk volt.

Következmény

A Jacobi-módszer konvergenciájának elégséges feltétele, hogy

$$\left\| -D^{-1}(L + U) \right\|_{\infty} < 1.$$

Következmény

A Gauss-Seidel-módszer konvergenciájának elégséges feltétele, hogy

$$\left\| -(L + D)^{-1} U \right\|_{\infty} < 1.$$

A Jacobi-módszer algoritmus

Adottak:

- Az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nonszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ vektor
- valamely $x^{(0)}$ adott kezdeti vektor;
- ε a közelítés pontosságát definiáló paraméter ($\varepsilon > 0$).

A Jacobi-módszer algoritmusa

```
1  Határozzuk meg a  $G = -D^{-1}(L + U)$  mátrixot és  $\|G\|_{\infty}$  értékét
2  IF  $\|G\|_{\infty} < 1$ 
3      THEN  $h = 2\varepsilon$ 
4           $r = 0$ 
5          WHILE  $h > \varepsilon$  DO
6               $x^{(r+1)} = Gx^{(r)} + k$ 
7               $h = \frac{\|G\|_{\infty}}{1 - \|G\|_{\infty}} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty}$ 
8               $r = r + 1$ 
9          RETURN( $x^{(r)}$ )
10 ELSE RETURN(„hiba”)
```

A Jacobi-módszer algoritmus

Adottak:

- Az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nonszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ vektor
- valamely $x^{(0)}$ adott kezdeti vektor;
- ε a közelítés pontosságát definiáló paraméter ($\varepsilon > 0$).

A Jacobi-módszer algoritmusa

```
1  Határozzuk meg a  $G = -(L + D)^{-1}U$  mátrixot és  $\|G\|_{\infty}$  értékét
2  IF  $\|G\|_{\infty} < 1$ 
3      THEN  $h = 2\varepsilon$ 
4           $r = 0$ 
5          WHILE  $h > \varepsilon$  DO
6               $x^{(r+1)} = Gx^{(r)} + k$ 
7               $h = \frac{\|G\|_{\infty}}{1 - \|G\|_{\infty}} \|x^{(r+1)} - x^{(r)}\|_{\infty}$ 
8               $r = r + 1$ 
9          RETURN( $x^{(r)}$ )
10 ELSE RETURN(„hiba”)
```

Megjegyzés

Könnyű belátni, hogy ha az együttható mátrix diagonálisan domináns, akkor mind a Jacobi, mind a Gauss-Seidel módszer esetén a $\|G\|_\infty < 1$ feltétel automatikusan teljesül.

Megjegyzés

A Gauss-Seidel módszer esetén

$$(L + D)x^{(r+1)} = -Ux^{(r)} + b$$

$$Dx^{(r+1)} = -Lx^{(r+1)} - Ux^{(r)} + b$$

$$x^{(r+1)} = -D^{-1}Lx^{(r+1)} - D^{-1}Ux^{(r)} + D^{-1}b$$

áll elő, mely a módszer közismert iterációs alakja.

Megjegyzés

Ha a konvergencia elégséges feltétele automatikusan teljesül, akkor ezen alak alkalmazása a hatékonyabb, mivel ekkor nem szükséges az inverz meghatározása. Ekkor, stop-kritériumként használható pl. olyan feltétel, hogy a két legutoljára képezett közelítés különbségének normája elegendően kicsinek bizonyul-e.

A konvergencia gyorsítása

A konvergencia gyorsítása a következőképpen érhető el:
Tekintsük az elsőfokú, lineáris stacionárius iterációs módszer általános iterációs képletét:

$$x^{(r+1)} = Gx^{(r)} + k,$$

A konvergencia gyorsítása

Legyen

$$x^{(r+1)} = \omega(Gx^{(r)} + k) + (1 - \omega)x^{(r)},$$

ahol ω az ún. relaxációs tényező, amelyre $0 < \omega \leq 2$ teljesül. Könnyű belátni, hogy $\omega = 1$ esetén ez a két képlet megegyezik. Ha $0 < \omega < 1$ esetén alulkorrigálásnak, $1 < \omega \leq 2$ esetén túlkorrigálásnak nevezzük a

Ekkor

$$x^{(r+1)} = (\omega G + (1 - \omega)E)x^{(r)} + \omega k$$

érvényes, ami

$$x^{(r+1)} = G_{\omega}x^{(r)} + k_{\omega},$$

iterációs képletet eredményezi.

Itt az iterációs mátrix

$$G_{\omega} = (\omega G + (1 - \omega)E)$$

és

$$k_{\omega} = \omega k.$$

Ezek konkrét alakja a következők:

Jacobi-módszer: $G_{\omega} = -\omega D^{-1}(L + U) + (1 - \omega)E$.

Gauss-Seidel-módszer: $G_{\omega} = -\omega(L + D)^{-1}U + (1 - \omega)E$.

Az ω -t úgy kívánjuk választani, hogy ezáltal a konvergencia gyorsabbá váljon.