

5. előadás

Numerikus analízis

TÉTEL

Ha a g függvényre teljesülnek a következők:

(i) $g \in C^1[a, b]$ (azaz folytonosan differenciálható $[a, b]$ -n),

(ii) $\max_{x \in [a, b]} |g'(x)| = q < 1$,

akkor az $x \rightarrow g(x)$ kontrakció $[a, b]$ -n q kontrakciós tényezővel.

Bizonyítás.

Ha $x, y \in [a, b]$, akkor a differenciálszámítás Lagrange-féle középértéktétele alapján létezik $\xi \in [a, b]$, hogy

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)(x - y)| = |g'(\xi)| |x - y| \leq q |x - y|.$$

A fixpont iterációs eljárás algoritmus

Input x_0, ε ($\varepsilon > 0$).

$k = 1, \quad x_1 = g(x_0)$

while kilépési feltétel=hamis

$x_{k+1} = g(x_k)$

$k = k + 1$

end

Az algoritmus költsége a felező eljáráshoz hasonló.

Lépésenként itt is egy függvénykiértékelést kell végezni és ez határozza meg a költséget. Tárolni nem kell a sorozat minden elemét, elegendő mindig csak az utolsó kettőt. A kilépési feltételhez rendszerint ezekre szükség van, ezért is számítjuk ki még a ciklus előtt az x_1 -et.

Kilépési feltételként a következőket szokás használni:

$$(A) \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon \quad (\text{egzakt hibabecslés})$$

$$(B) |x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$$

$$(C) |x_k - g(x_k)| \leq \varepsilon$$

Ha nem alkalmazhatjuk az egzakt kilépési feltételt, akkor nagyon körültekintően kell eljárni, mert a (B) és (C) egyidejű teljesülése sem garantálja, hogy valóban a gyök ε környezetében járunk, sőt, még a konvergenciát sem.

Példa

Oldjuk meg az $f(x) = 4 - 4x^2 - e^x = 0$ egyenletet a $[0, 1]$ intervallumon, $\delta x_i = \varepsilon = 10^{-6}$ hibakorláttal, fixpont iterációs módszert alkalmazva. A számítások előtt igazoljuk a konvergenciát is.

Megoldás

Itt kísérletezhetünk az x^2 egyik oldalra rendezésével és utána négyzetgyökvonással, hogy az alkalmas $x = g(x)$ alakhoz jussunk. Kapjuk tehát az

$$x = g(x) = \frac{1}{2} \sqrt{4 - e^x}$$

egyenletet. (A négyzetgyökvonást pozitív előjellel végezzük mert pozitív gyököt keresünk.)

Megoldás

A kapott g függvény folytonos, de az is azonnal látszik, hogy szigorúan monoton csökken a $[0, 1]$ -en. (Ezt a derivált negatív volta mutatja.) Tehát a minimumát az intervallum végpontjában, a maximumát pedig a kezdőpontjában veszi fel. Igaz tehát a következő egyenlőtlenséglánc:

$$a = 0 \leq g(1) = 0.56606 \leq g(x) \leq g(0) = 0.86603 \leq 1 = b.$$

Ezzel a konvergencia tétel első feltételét beláttuk. (Vele együtt azt is, hogy az egyenletnek van gyöke a keresett helyen.) A kijelölt intervallumon a deriváltfüggvény, illetve az abszolút értéke:

$$|g'(x)| = \left| \frac{-e^x}{4\sqrt{4 - e^x}} \right| = \frac{e^x}{4\sqrt{4 - e^x}}.$$

A $[0, 1]$ intervallumon ez folytonos. Ugyanakkor $|g'(x)|$ szigorúan monoton növekvő, ezért maximumát az intervallum végpontjában veszi fel:

$$|g'(x)| \leq |g'(1)| = 0.60026 = q < 1.$$

Tehát fennáll a konvergenciatételünk (ii) feltétele is.

Alkalmazhatjuk az (A) egzakt kilépési feltételt és mivel a hibabecsléshez szükséges $\alpha = q/(1 - q) = 1.502$ a példára nézve állandó, ezt előre kiszámoltuk. Legyen az iteráció kezdő adata $x_0 = 1 \in [a, b]$ A számítások részleteit itt is táblázatban foglaltuk össze, bekeretezve a végeredményt:

Megoldás

k	x	$\delta x = \alpha x_{k+1} - x_k $
0	1	
1	0.566065	0.65
2	0.748111	0.27
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	0.703439	0.43×10^{-6}

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ekkor (a, b) -ben van gyöke f -nek. Legyen $x_0 = a, x_1 = b$. Az x_k és x_s közelítések ismeretében (ahol $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$) az f függvényt közelítsük az $(x_k, f(x_k))$ és $(x_s, f(x_s))$ pontokon átmenő egyenessel. Az egyenes x tengellyel vett metszéspontja legyen x_{k+1} . A következő közelítésben szereplő s index legyen:

$$s = \begin{cases} k, & \text{ha } f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0 \\ s, & \text{ha } f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0 \end{cases}$$

Képlettel: legyen adott x_0, x_1 úgy, hogy $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. Ekkor

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ahol s a legnagyobb index, melyre $f(x_s) \cdot f(x_k) < 0$.

Tétel

Ha

- (i) $f \in C^2[a, b]$,
- (ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$,
- (iii) f' és f'' állandó előjelű az $[a, b]$ intervallumon,
- (iv) $0 < m_1 \leq |f'|$,
- (v) $|f''| \leq M_2 < \infty$

akkor a húrmódszer konvergens és a hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_k - x^*| \cdot |x_s - x^*| \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és tegyük fel, hogy (a, b) -ben van gyöke f -nek. Legyen $x_0 = a, x_1 = b$. Az x_{k-1} és x_k közelítések ismeretében az f függvényt közelítsük az $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ és $(x_k, f(x_k))$ pontokon átmenő egyenessel. Az egyenes x tengellyel vett metszéspontja legyen x_{k+1} . Képlettel: legyen adott x_0, x_1 úgy, hogy $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. Ekkor

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Tétel

Ha

- (i) $f \in C^2[a, b]$,
- (ii) f -nek létezik $x^* \in (a, b)$ gyöke,
- (iii) f' állandó előjelű az $[a, b]$ intervallumon,
- (iv) $0 < m_1 \leq |f'|$,
- (v) $|f''| \leq M_2 < \infty$
- (vi) legyen $x_0 \in [a, b]$ olyan, hogy

$$|x_0 - x^*| < r = \min \left\{ \frac{2m_1}{M_2}, |a - x^*|, |b - x^*| \right\}$$

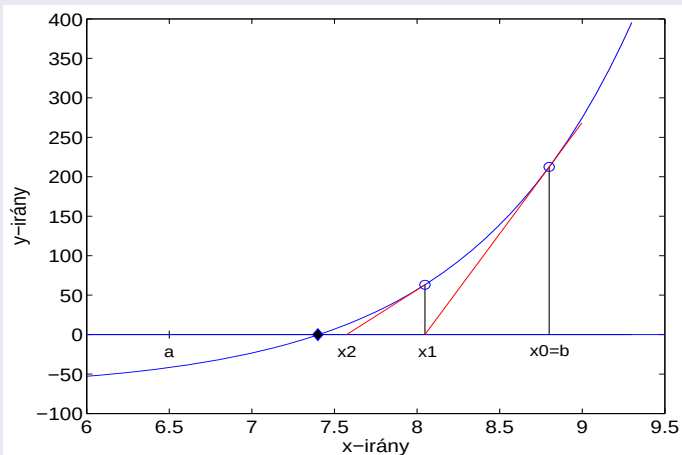
akkor a megfelelő környezetből indított szelő módszer konvergens és a konvergencia rendje $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_k - x^*| \cdot |x_s - x^*| \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Newton-módszer

A módszert szokás érintőmódszernek is nevezni. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. A módszer lényege, hogy az x_k pontban a függvényhez érintőt húzunk és ennek az érintőnek a zérushelye adja meg a keresett gyök $(k + 1)$ -edik közelítését, azaz x_{k+1} -et.

A Newton-módszer



Az ábrán az előre felvett kezdeti x_0 (ami gyakran a szóbanforgó intervallum valamelyik alkalmas végpontja) közelítést és további kettőt tüntettünk fel. Az érintő iránytangense a k -adik pontban $f'(x_k)$ és egyenlete

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k).$$

Az $y = 0$ helyen metszi az x -tengelyt; ezt behelyettesítve:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

feltéve, hogy $f'(x_k) \neq 0$.

Ehhez képlethez eljuthatunk egy kissé más érveléssel is. Nevezetesen $f(x)$ -et linearizáljuk az x_k pontban, azaz közelítjük az elsőfokú Taylor-polinomjával:

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Ezután az $f(x) = 0$ egyenletet helyettesítjük az

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

egyenlettel, amelynek gyöke közelíti az $f(x) = 0$ egyenlet gyökét.

A Newton-módszer tehát a következő. Adott egy $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdeti közelítés és képezzük az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

sorozatot. A Newton-módszer konvergenciájára az alábbi tételt ismertetjük:

Tétel

Ha az f függvényre teljesülnek a következők:

- (i) $f \in C^2[a, b]$ (kétszer folytonosan differenciálható $[a, b]$ -n),
- (ii) $f'(x), f''(x) \neq 0$, ha $x \in [a, b]$ (állandó előjelűek),
- (iii) f -nek van zérushelye (a, b) -n,
- (iv) $x_0 \in [a, b]$, valamint teljesül, hogy $f'(x_0)$ és $f''(x_0)$ azonos előjelű,

akkor az $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ sorozat konvergál az egyetlen $[a, b]$ -beli x^* megoldáshoz. Érvényes továbbá az alábbi hibabecslés:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{M}{2m} (x_k - x_{k-1})^2,$$

ahol $0 < m \leq |f'(x)|$ és $M \geq |f''(x)|$, azaz a deriváltak abszolút értékeinek alsó, illetve felső korlátjai $[a, b]$ -n.

Bizonyítás

A zérushely egyedüli volta az f szigorú monotonitásából következik ($f' \neq 0$). Az is világos, hogy ekkor az intervallum két végpontjában ellentétes az f előjele, következésképpen az egyik végpont mindig teljesíti a (iv) feltételt. Négy eset különböztethető meg, az $f'(x)$, és $f''(x)$ előjeleitől függően. Mind a négyre hasonló a bizonyítás, ezért csak az ábrán is látható $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ esetet mutatjuk meg. Ekkor az (iv) feltétel miatt $f(x_0)$ is pozitív, az $f'(x_0)$ pozitívitása és korlátossága miatt (zárt intervallumon folytonos függvény ott korlátos is) pedig $x_1 < x_0$.

Bizonyítás

Felírva a másodfokú, maradéktagos Taylor-polinomot

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\mu)}{2}(x_1 - x_0)^2 \quad (\mu \in [x_1, x_0]),$$

látható, hogy f az érintő fölött halad, így $f(x_1) > 0$ is fennáll.

A második lépésben az x_1 játssa az x_0 szerepét, tehát $x_2 < x_1$, és így tovább. Az $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat monoton csökkenő tehát, de korlátos is, mert minden érintő az f alatt marad az intervallumban. Következésképp az x^* egy alsó korlát.

Monoton korlátos sorozat konvergens is, legyen a határérték t .

Vegyük az $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ sorozat mindkét oldalán a $k \rightarrow \infty$ határátmenetet, a folytonosság miatt mindkét oldal határértéke ugyanaz a t , ami csak az $f(t) = 0$ mellett lehetséges, azaz $t = x^*$. A megoldáshoz való konvergenciát ezzel beláttuk.

Bizonyítás

A hibabecsléshez írjuk fel az elsőfokú maradéktagos Taylor-polinomot az x^* pontban, a másodfokút pedig az x_k -ben:

$$f(x_{k+1}) = f(x^*) + f'(\xi)(x_{k+1} - x^*),$$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x_{k+1} - x_k)^2,$$

ahol $\xi, \zeta \in [a, b]$. A két egyenlet baloldala egyenlő, így a jobboldalukon álló kifejezések is.

Bizonyítás

A elsőben $f(x^*) = 0$, a másodikban
 $f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$, így

$$f'(\xi)(x_{k+1} - x^*) = \frac{f''(\zeta)}{2} (x_{k+1} - x_k)^2.$$

Vegyük mindkét oldal abszolút értékét, k helyett írjunk $k - 1$ -et. Rendezzük át az egyenletet és vegyük figyelembe, hogy m az $|f'(\xi)|$ alsó, M pedig az $|f''(\zeta)|$ felső korlátja. Ezzel megkapjuk a hibabecslést.

Ez a hibabecslés mutatja, hogy a konvergencia sebesség másodrendű (négyzetes). Az is egyszerűen belátható, hogy a $k + 1$ -edik közelítés relatív hibája a k -adikénak a négyzete.

A Newton-módszer algoritmus

Input x_0, ε ($\varepsilon > 0$).

$k = 1, \quad x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

while kilépési feltétel=hamis

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

$$k = k + 1$$

A kilépési feltételek hasonlóak lehetnek, mint a fixpont iterációnál. Ha igazolni tudtuk a konvergenciát és becsülni az m, M értékeket, akkor az (A) egzakt hibabecslést végezhetünk, egyébként a (B) vagy/és a (C)-t (ez utóbbinál $|f(x_k)| < \varepsilon$).

Példa

Oldjuk meg az $f(x) = 4 - 4x^2 - e^x = 0$ egyenletet a $[0, 1]$ intervallumon, $\delta x_i = \varepsilon = 10^{-6}$ hibakorláttal, Newton-módszerrel. A számítások előtt igazoljuk a konvergenciát is.

Megoldás

Könnyen kiszámolható, hogy

$$f'(x) = -8x - e^x < 0 \quad \text{és} \quad f''(x) = -8 - e^x < 0.$$

Ezekből a deriváltakból azonnal látszik azok állandó előjele is az adott intervallumon; ezzel a konvergenciatétel első két feltételét igazoltuk.

Megoldás

Az $f(0) = 3$ és $f(1) = -e$ értékek ellentétes előjele egyben az (iii) feltétel teljesülését jelenti. Az $x_0 = 1$ választással pedig az utolsó feltétel is fennáll. Van tehát egyedüli x^* megoldás a $[0, 1]$ -n és az a Newton-módszerrel megközelíthető. Az egzakt hibabecsléshez szükséges konstansok is könnyen adódnak: mindkét derivált abszolút értéke szigorúan monoton nő, így az első a minimumát az a helyen, a második pedig a maximumát a b helyen veszi fel. Tehát $m = |f'(0)| = 1$ és $M = |f''(1)| = 10.72$. Itt is előre kiszámolhatjuk a példára nézve állandó $\beta = M/(2m) = 5.36$ értéket. Az iterációk eredményeit itt is táblázatba foglaltuk.

A Newton-módszer

i	x	$\delta x = \beta (x - x_{elozo})^2$
0	1	
1	0.74638828573	0.35
2	0.70459003270	0.94×10^{-2}
3	0.70344043705	0.71×10^{-5}
4	0.70343957116	0.41×10^{-11}

Az érintő parabola-módszer

Ennél a módszernél az érintő egyenesek helyett érintő parabolákat használunk.

Legyen adott egy $[a, b]$ intervallum, amelyben az $f(x) = 0$ egyenletnek van gyöke. Tegyük fel, hogy f differenciálható $[a, b]$ -n és $f(b) > 0$. (Ha nem teljesül, akkor a $-f(x) = 0$ egyenletet oldjuk meg). A $(b, f(b))$ pontba végtelen sok olyan érintőparabolát illeszthetünk, amely metszi az x tengelyt.

Ugyanis a

$$p(x) = f(b) + f'(b)(x - b) - M(x - b)^2, \quad M > 0$$

függvények bármelyikének a képe parabola, és $f(b) = p(b)$, $f'(b) = p'(b)$. Az $M > 0$ miatt az x tengelyt két pontban metszi mindegyik parabola.

Mivel az $[a, b]$ -ben keresünk gyököt, ezért a baloldali metszéspontot vesszük figyelembe. A $p(x) = 0$ egyenletből:

$$x = x_1 = b + \frac{f'(b)}{2M} - \frac{1}{2M} \sqrt{(f'(b))^2 + 4Mf(b)}.$$

Innen a módszer formulája (b helyére x_k -t, x_1 helyére x_{k+1} -et írva):

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f'(x_k)}{2M} - \frac{1}{2M} \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4Mf(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A következő tétel megadja, hogy milyen M értékeket érdemes használni.

Tétel

Az $f(x) = 0$ egyenlet esetén legyen $f \in C^2[a, b]$, legyen $f(b) > 0$ és tegyük fel, hogy

$$M \geq \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Ekkor az $x_0 = b$ választással a módszer konvergál a b ponthoz legközelebbi $[a, b]$ -beli gyökhöz (ha az $[a, b]$ intervallumban van gyök), ellenkező esetben véges sok lépés után $x_k < a$.