

4. előadás

Numerikus analízis

Bevezetés

Az

$$f(x) = 0 \quad (f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}),$$

alakú egyváltozós egyenletek, illetve az

$$F(x) = 0 \quad (F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 2),$$

alakú többváltozós egyenletrendszerek közelítő megoldási módszereit vizsgáljuk. Az egyenlet (egyenletrendszer) pontos megoldását következetesen x^* -gal jelöljük; $x^* \in \mathbb{R}$ (illetve $x^* \in \mathbb{R}^n$).

Bevezetés

Direkt módszerek, tehát amelyek véges sok lépés után legalább elméletileg adnák x^* -ot, itt még egyváltozós esetben sem igen konstruálhatók.

A gyakorlatban mindig elegendő tudni egy elméleti eredmény többé-kevésbé pontos közelítését, így az iterációs eljárások a legtöbb esetben szóba jöhetnek.

Egy-egy módszer csak speciális esetben alkalmazható. Különösen így van ez a nemlineáris egyenleteknél, egyenletrendszereknél. Nincs univerzális eljárás, ami minden egyenletnél megfelelő pontosságú közelítést garantálna és különösen nincs olyan, ami mindezt elég gyorsan is tenné.

Bevezetés

A továbbiakban minden esetben feltételezzük, hogy az f függvény folytonos. A konvergenciát garantáló feltételek között azonban többnyire még szigorúbb, differenciálhatósági megkötések is szerepelnek.

Az $f(x) = 0$ ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) alakú valós egyenletek megoldási módszerei egy, az x^* megoldáshoz konvergáló $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ sorozatot képeznek.

Az intervallumfelező eljárás

Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon és a végpontokban ellentétes a függvény előjele, azaz fennáll, hogy

$$f(a)f(b) < 0. \quad (1)$$

Ismert tétel, hogy zárt intervallumban folytonos függvénynek van az intervallumon legnagyobb és legkisebb értéke, továbbá a függvény e két szám közötti valamennyi értéket felvesz az intervallumban. Ebből azonnal következik, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek van legalább egy $x^* \in (a, b)$ gyöke.

Az intervallumfelező eljárás

Az intervallumfelező eljárás (amit szoktunk röviden csak felező eljárásnak is nevezni) lényege a nevében benne van. Az intervallum középpontja két részre, két félintervallumra osztja az eredeti intervallumot. Megnézzük, hogy közülük melyikben teljesül (1) és ott folytatjuk. Kicsit pontosabban megfogalmazva: legyen $c = (a + b) / 2$ és vizsgáljuk az $f(c)$ értékét. Ha annak előjele az a -beli előjellel ellentétes, azaz $f(a)f(c) < 0$, akkor az $[a, c]$ intervallumban van gyök. Egyébként a $[c, b]$ intervallum tartalmaz gyököt. Az új intervallumot újra megfelezzük és így tovább.

Az intervallumfelező eljárás

Az egymásba skatulyázott

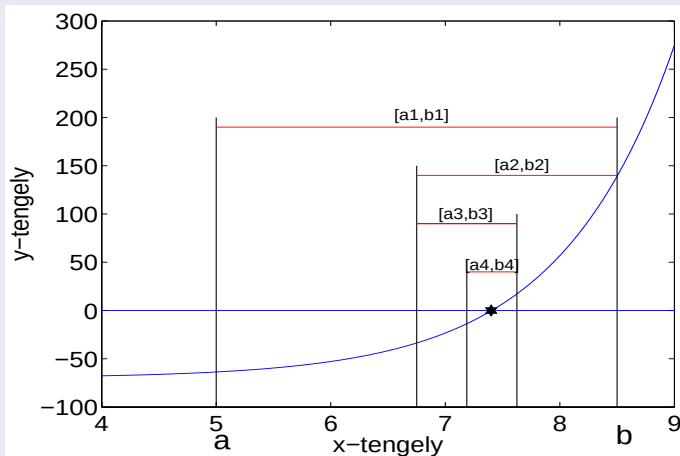
$$[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots [a_k, b_k] \supset \dots, \quad (2)$$

zárt intervallumok ráhúzódnak az egyenlet egy x^* gyökére.

Más formában is megadva: $[a_1, b_1] = [a, b]$, $c_i = (a_i + b_i) / 2$,

$$[a_{i+1}, b_{i+1}] = \begin{cases} [a_i, c_i], & \text{ha } f(a_i)f(c_i) < 0 \\ [c_i, b_i], & \text{egyébként} \end{cases}, \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Az intervallumfelező eljárás



Az intervallumfelező eljárás

Az is nyilvánvaló, hogy az i -edik intervallum hossza:
 $(b_i - a_i) = (b_{i-1} - a_{i-1})/2 = (b - a)/2^{i-1}$ szigorúan monoton csökkenő mértani sorozat és az x^* gyököt az $[a_i, b_i]$ intervallum tetszőleges y pontjával közelíthetjük. Az y közelítés hibája legfeljebb a két végponttól mért nagyobbik távolság lehet, azaz fennáll, hogy

$$|x^* - y| \leq \max\{y - a_i, b_i - y\}. \quad (3)$$

A $\max\{y - a_i, b_i - y\}$ korlát akkor a legkisebb, ha $y = \frac{a_i + b_i}{2}$.
Ezért az x^* gyök i -edik közelítéseként általában az $x_i = (a_i + b_i) / 2$ felezőpontot használjuk. A

Az intervallumfelező eljárás

z intervallumok hosszára tett megállapításból így egzakt hibabecslés is adódik:

$$|x^* - x_i| \leq \frac{b_i - a_i}{2} = \frac{b - a}{2^i} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Az algoritmust tehát akkor állítjuk le, ha a közelítés hibája kisebb, mint egy előre megadott $\varepsilon > 0$ hibakorlát. Ezért az intervallumfelező eljárás gyakorlati formája a következő.

Az intervallumfelező eljárás

Az intervallumfelező algoritmus

input $[a, b]$, $\varepsilon > 0$.

$fa = f(a)$

while $b - a > 2\varepsilon$

$x = (a + b) / 2$

if $fa * f(x) < 0$

$b = x$

else

$a = x$

end

end

$x = (a + b) / 2$

Az intervallumfelező eljárás

Tétel

Ha $f \in C[a, b]$ és $f(a)f(b) < 0$, akkor az az intervallumfelező eljárás során kapott $\{x_i\}$ sorozat konvergál az f valamely $[a, b]$ -beli gyökéhez és érvényes az (4) hibabecslés.

Ha az $[a, b]$ intervallum több gyököt is tartalmaz, az $\{x_i\}$ sorozat közülük egyikhez konvergál.

Megjegyzés

Az intervallumfelező módszer legnagyobb előnye, hogy nagyon enyhe (mondhatni, hogy csak a gyakorlatban szinte kötelezően elvárt) feltételek mellett biztosítja a megoldáshoz való konvergenciát. Előnye még az egyszerűsége is. Ugyanakkor hátránya a lassú konvergencia. A hibát a (4) szerint egy konvergens mértani sorozattal tudjuk becsülni. Az x_i hibakorlátja x_{i-1} hibájának a fele, így a konvergenciája lineáris vagy másképpen elsőrendű.

Példa

Oldjuk meg intervallumfelező eljárással az $f(x) = 4 - 4x^2 - e^x = 0$ egyenletet az $[a, b] = [0, 1]$ intervallumon $\delta x_i = \varepsilon = 10^{-6}$ hibakorláttal.

Megoldás. Az f függvény nyilvánvalóan folytonos, továbbá $f(a) = fa = f(0) = 3$ és $f(b) = f(1) = -e$ ellentétes előjelű, ezért alkalmazható a felező módszer. A $b - a = 1$ hosszú intervallumból indulva (4) alapján az $1/2^i \leq 10^{-6}$ egyenlőtlenségből $i \geq -\log \varepsilon / \log 2 \approx 19.93$, azaz $i = 20$ lépés szükséges. A lépéseket táblázatba foglaltuk, bekeretezve a végeredményt:

Példa

i	$[a, b]$	x	δx	$f(x) \approx$	
1	$[0, 1]$	0.5	0.5	1.35	$\rightarrow a = x$
2	$[0.5, 1]$	0.75	0.25	-0.4	$\rightarrow b = x$
3	$[0.5, 0.75]$	0.625	0.125	0.57	$\rightarrow a = x$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		
20		0.703439	0.95×10^{-6}		

(5)

A fixpont iterációs eljárás

A módszert az $f(x) = x - g(x) = 0$ alakú vagy ilyen alakra hozott egyenletek esetén alkalmazzuk. Az $f(x) = 0$ egyenlet ekvivalens az

$$x = g(x) \tag{6}$$

egyenlettel. A módszer elnevezésének az az alapja, hogy a megoldás egyben az $x \rightarrow g(x)$ leképezés fixpontja: a leképezés során helyben maradó pont.

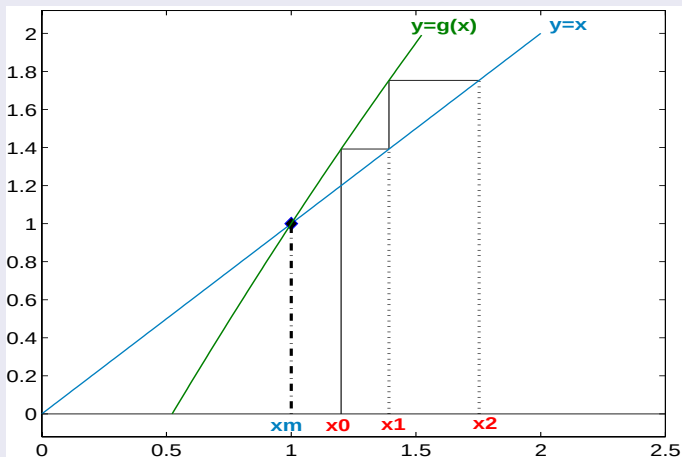
A fixpont iterációs eljárás

Választunk tehát egy x_0 kezdeti értéket, majd képezzük az

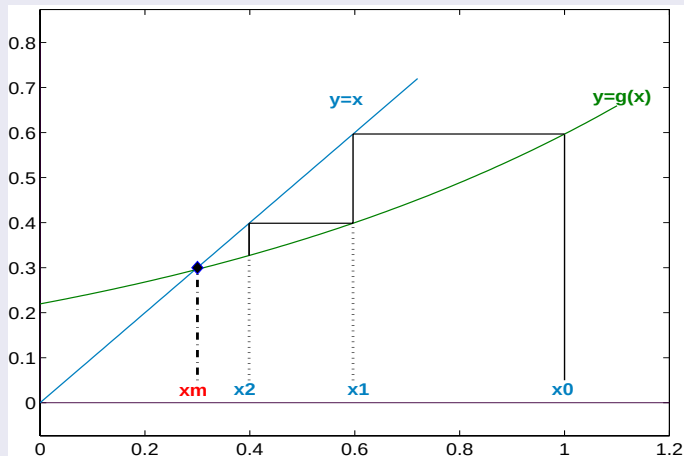
$$x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), \dots, x_{k+1} = g(x_k), \dots \quad (7)$$

sorozatot. Azt reméljük, hogy a sorozat az egyenlet x^* megoldásához (a leképezés fixpontjához) konvergál. További lényeges kérdés, hogy az iterációt az i -edik lépésben megállítva, legfeljebb mekkora távolságra vagyunk a megoldástól. A következő két ábrán geometriai szemléltetését adjuk az eljárásnak, ami önmagában is igazolja, hogy a fixpont akár egyértelmű létezése sem ad garanciát a konvergenciára.

A fixpont iterációs eljárás, tasztító gyök:



A fixpont iterációs eljárás vonzó gyök:



A fixpont iterációs eljárás

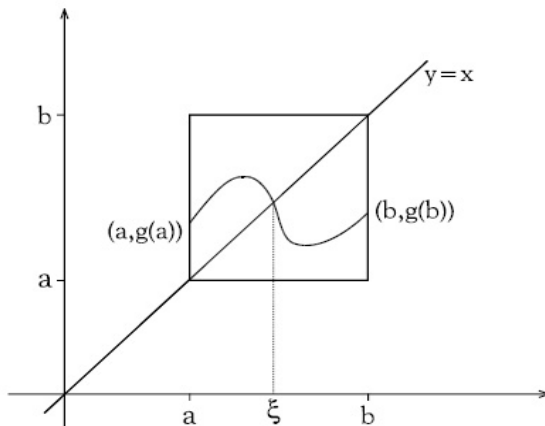
Tétel

Ha $g \in C[a, b]$ és $a \leq g(x) \leq b$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor a $g(x)$ függvénynek az $[a, b]$ intervallumon van fixpontja.

Bizonyítás

Feltehetjük, hogy $g(a) > a$ és $g(b) < b$. (Egyenlőség esetén maga az a , illetve b fixpont lenne.) Legyen $h(x) = g(x) - x$. Ekkor $h(x)$ folytonos $[a, b]$ -n, $h(a) > 0$ és $h(b) < 0$. Ezért a $h(x)$ függvénynek van $\xi \in (a, b)$ gyöke, azaz $h(\xi) = g(\xi) - \xi = 0$. ■

A fixpont iterációs eljárás vonzó gyök:



Definíció

A $g \in C[a, b]$ függvény kontrakció az $[a, b]$ intervallumon, ha létezik $0 \leq q < 1$ úgy, hogy

$$|g(x) - g(y)| \leq q|x - y|, \quad x, y \in [a, b]. \quad (8)$$

Példa

A $g(x) = x^2$ függvény kontrakció a $[0, \frac{1}{4}]$ intervallumon, de a $[0, 1]$ intervallumon már nem az.

$$|x^2 - y^2| = \underbrace{|x + y|}_{\leq 1/2} |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y|, \quad x, y \in \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

legyen például $x, y \in [\frac{3}{4}, 1]$, de $x \neq y$ Két ílymódon választott szám ellenpédát ad, ugyanis

$$|x^2 - y^2| = \underbrace{|x + y|}_{\geq 3/2} |x - y| \geq \frac{3}{2} |x - y| > |x - y| \quad (x \neq y)$$

Banach-féle fixponttétel

Ha $g \in C[a, b]$, $a \leq g(x) \leq b$ ($x \in [a, b]$) és $g(x)$ kontrakció $[a, b]$ -n, akkor pontosan egy fixpont létezik $[a, b]$ -ben.

Tétel

Legyen $g \in C[a, b]$ Ha teljesülnek a következők:

- (i) $a \leq g(x) \leq b$ minden $x \in [a, b]$ esetén,
- (ii) az $x \rightarrow g(x)$ kontrakció $[a, b]$ -n q kontrakciós tényezővel, akkor az (6) egyenletnek pontosan egy megoldása van $[a, b]$ -n és az (7) sorozat minden $x_0 \in [a, b]$ esetén az egyenlet egyetlen x^* megoldásához konvergál. Érvényes továbbá az alábbi hibabecslés:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1 - q} |x_k - x_{k-1}| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0|. \quad (9)$$