

3. előadás

Numerikus analízis

Érintőformula

Az érintőformula egy nyílt Newton-Cotes formula, amelyre:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Az érintőformula úgy is értelmezhető, hogy a függvényt az $[a, b]$ intervallum középpontjához húzott érintőegyenessel közelítjük, és az egyenes alatti területet vesszük. Ez mutatja, hogy legfeljebb elsőfokú polinomig pontos.

Érintőformula hibája

Tegyük fel, hogy $f \in C^2([a, b])$. Ekkor az érintő formulával

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3 \cdot f''(\xi)}{24}.$$

Így a kapott hibabecslés:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24}.$$

ahol $M_2 \geq |f''(x)|$ az $[a, b]$ intervallumon.

Érintőformula

A gyakorlatban ezt a formulát nem az egész $[a, b]$ intervallumra alkalmazzuk, hanem azt n részre osztjuk ($h = (b - a)/n$), és az egyes részintervallumokban az érintőformulával integrálunk.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a - \frac{h}{2} + ih\right).$$

Egyszerű Simpson formula

Legyen most $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ és $x_3 = b$. Alkalmazzuk a három pontra támaszkodó másodfokú Lagrange-féle interpolációs polinomot.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Vegyük észre, hogy az egyszerű Simpson formula egy zárt Newton-Cotes formula, amelyre $n = 2$ és $B_0^{(2)} = 1/6$, $B_1^{(2)} = 4/6$, $B_2^{(2)} = 1/6$.

Hibabecslés

Az egyszerű Simpson formula hibáját $f \in C^4[a, b]$ esetén a Lagrange-féle interpolációs polinom hibáját felhasználva kapjuk. Ekkor

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right) + f(b) \right] \right| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{90}$$

formulával becsülhetjük, ahol $M_4 \geq |f^{(4)}(x)|$ az $[a, b]$ -n.

Összetett Simpson formula, 1. változat

Tegyük fel, hogy n páros és az alappontok ekvidisztánsak, azaz $x_i = x_0 + i \cdot h$ (ahol $h = \frac{b-a}{n}$, és $i = 0, \dots, n$). Ekkor a képlet alakja

$$S_n(f) = \frac{2h}{6} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})) \\ + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})) + f(x_n)].$$

A képlet hibája:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \right| \leq \frac{M_4(b-a)}{90} h^4 = \frac{M_4(b-a)^5}{90n^4}.$$

Összetett Simpson formula, 2. változat

Ha az $[a, b]$ intervallumot itt is felosztjuk az

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

pontokkal n részintervallumra, akkor az összetett Simpson formula:

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right].$$

Összetett Simpson formula, 2. ekvidisztáns változat

Ha az alappontok ekvidisztánsak, azaz $x_i = x_0 + i \cdot h$ (ahol $h = \frac{b-a}{n}$ és $i = 0, \dots, n$), akkor a képlet alakja

$$S_n(f) = \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f(x_n) \right].$$

A képlet hibája pedig

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \right| \leq \frac{M_4(b-a)}{32 \cdot 90} h^4 = \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}.$$

Gauss-kvadratúrák

Az eddigi, interpolációból származtatott kvadratúra-formulák legfeljebb annyiad-fokú polinomra pontosak, ahányad fokú polinomból származtattuk őket. A Gauss-kvadratúrák abból az észrevételből származnak, hogy az alappontok speciális megválasztásával a kvadratúra-formula rendje növelhető. Ehhez szükségünk lesz az ortogonális polinomokra. A $\{p_k(x)\}$ egy ortogonális polinom rendszer, ha

$$\langle p_i, p_j \rangle = \int_a^b p_i(x) p_j(x) w(x) dx = 0 \quad (i \neq j)$$

Gauss-kvadratúrák

Tétel:

Legyen $\{(p_k(x))\}$ egy ortogonális polinom rendszer. Ekkor bármely n -re a $p_{n+1}(x)$ polinom gyökei valósak, egyszeresek és az $[a, b]$ intervallumban vannak, ahol $[a, b]$ a skalárszorzat integrálási tartománya.

Az $n + 1$ -pontos Gauss-kvadratúrát úgy kapjuk, hogy a $p_{n+1}(x)$ ortogonális polinom gyök-helyein készítjük az interpolációból származtatott kvadratúra-formulát.

Gauss-kvadratúrák

A séma a következő:

Legyen $f(x) = p(x) + R(x)$, ahol p a Lagrange interpolációs polinom, R a hiba. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)w(x)dx &= \int_a^b p(x)w(x)dx + \int_a^b R(x)w(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + R_n,\end{aligned}$$

$$\text{ahol } a_i = \int_a^b l_i(x)w(x)dx.$$

Tétel

Legyenek a $p_{n+1}(x)$ ortogonális polinom gyökei $x_0, x_1, \dots, x_n$ és legyen $a_i = \int_a^b l_i(x)w(x)dx$ ahol l_i az i -edik Lagrange alappolinom a fenti alappontokon. Ekkor a Gauss-kvadrátúra

$$G_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

pontos minden legfeljebb $2n + 1$ -edfokú polinomra, azaz, ha f egy legfeljebb $2n + 1$ -edfokú polinom, akkor

$$G_n(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx.$$

Tétel (A Gauss kvadrátúra hibaformulája)

Legyen $f \in C^{2n+2}[a, b]$ és $G_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$, ahol az alappontok a $p_{n+1}(x)$ ortogonális polinom gyökei. Ekkor

$$\int_a^b f(x)w(x)dx - G_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot \langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle,$$

ahol $p_{n+1}(x)$ egy 1-főegyütthatós ortogonális polinom.

Az a_i együtthatók pozitívak.

Az $f(x) = 1$ függvény integrálásával kapjuk a $\mu_0, \mu_1 \dots$ momentumokat:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \int_a^b w(x) dx =: \mu_0$$

$$\mu_i := \int_a^b x^i w(x) dx.$$

Legendre-polinom

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!^2} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-1)4(2n-3)} x^{n-4} \pm \dots \right]$$

$$[a, b] = [-1, 1]$$

$$w(x) = 1$$

$$\mu_0 = 2$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = 3/2(x^2 - 1/3)$$

Csebisev-polinom

Az n -edfokú Csebisev polinom a következő összefüggéssel adható meg:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

$$[a, b] = [-1, 1]$$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mu_0 = \pi$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2(x^2 - 1/2)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Laugerre-polinom

$$L_n(x) = \frac{2n-1-x}{n} L_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} L_{n-2}(x) \quad n > 1.$$

$$[a, b] = [0, \infty[$$

$$w(x) = e^{-x}$$

$$\mu_0 = 1$$

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -(x-1)$$

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2$$

Hermite-polinom

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \quad n > 1.$$

$$[a, b] =] - \infty, \infty[$$

$$w(x) = 1$$

$$\mu_0 = e^{-x^2}$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = 4(x^2 - 1/2)$$

Kvadraturaformulák hibáinak utólagos becslése

Elvégezzük a numerikus integrálást n és $2n$ részintervallum esetén. Ha fennáll, hogy

$$|T_n(f) - T_{2n}(f)| \leq \varepsilon,$$

akkor a $T_{2n}(f)$ közelítést ε pontosságúnak fogadjuk el. Ha

$$|T_n(f) - T_{2n}(f)| > \varepsilon,$$

akkor az n értékét tovább kell növelni. A hibabecslést az un. Runge-elv alapján lehet végrehajtani.

Hiba utólagos becslése trapéz-formula esetén

Ha $f''(x)$ előjele állandó, akkor az összetett trapézformula hibájára fennáll, hogy

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_{2n}(f) \right| \leq |T_n(f) - T_{2n}(f)|.$$

Hiba utólagos becslése Simpson-formula esetén

Ha $f^{(4)}(x)$ előjele állandó, akkor az összetett Simpson-formula hibakorlátja a következő:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_{2n}(f) \right| \leq |S_n(f) - S_{2n}(f)|.$$