

10. előadás: Implicit Euler módszer

A diszkrétizációs jelöléseket használva az **implicit Euler módszer** alakja:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(k+1)} := y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) \\ y_{n+1}^{(0)} \text{ adott, } (k = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

Motiváció: A derivált közelítésére gyakran használjuk a differencia hányadost:

$$y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}.$$

Felhasználva az egyenletben: $y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$.

Innen átrendezve

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h \cdot f(x_{n+1}, y(x_{n+1})),$$

vagyis egy implicit formulát kapunk. Ezt az implicit egyenletet kell megoldani egyszerű iterációval.

Megjegyzés.

1. Minden lépésben egy implicit egyenletet kell megoldani egyszerű iterációval. Az implicit módszert **korrektor módszernek**, az explicit módszert **prediktor módszernek** nevezzük. A korrektor módszerhez szükséges $y_{n+1}^{(0)}$ kezdőértéket egy prediktor módszerrel adjuk meg.

Általában azonos rendűeket szokás párban alkalmazni.

2. Az implicit módszer stabil a h -ra tett feltétel nélkül. (Pl. az explicit Euler módszernél $hL < 2$ feltételnek teljesülnie kell a stabilitáshoz.)

10.1 Módosított Euler módszer

A diszkrétizációs jelöléseket használva a **módosított Euler módszer** alakja:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right) \\ x_0, y_0 \text{ adott } (n = 0, 1, \dots, N-1) \end{cases}$$

Motiváció: Az explicit Euler módszerhez képest nem az x_n pontbeli $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$ meredekséggel lépünk tovább, hanem az $x_n + \frac{h}{2}$ pontbeli meredekséggel.

A Taylor formulát felhasználva $y\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \approx y(x_n) + \frac{h}{2} y'(x_n) = y(x_n) + \frac{h}{2} f(x_n, y(x_n))$,

így

$$y\left(x_n + \frac{h}{2}\right) = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) \approx f\left(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2} f(x_n, y(x_n))\right).$$

10.2. Tétel. A módosított Euler módszer lokális hibája $O(h^3)$, globális hibája $O(h^2)$.

10.2. Trapéz módszer

A diszkretizációs jelöléseket használva a **trapéz módszer** (implicit módszer) alakja:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(k+1)} := y_n + \frac{h}{2} \cdot (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})) \\ y_{n+1}^{(0)} \text{ adott, } (k = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

Motiváció: A differenciálegyenletet az $[x_n, x_{n+1}]$ intervallumon az

$$y(x) = y(x_n) + \int_{x_n}^x f(t, y(t)) dt$$

integrálegyenlettel helyettesítjük. Az $y(x_{n+1})$ számítására felírva az integrál közelítésnél tanult trapéz formulát, a következő implicit egyenletet kapjuk:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2} (f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))) .$$

3. Példa. A 2. Példában felírt KÉP-ra hasonlítsuk össze az explicit-, implicit-, módosított Euler és a trapéz módszer egy-egy lépését!

Megoldás.

a) Az explicit Euler módszerrel $y_0 = 0, \quad y_1 = y_0 + h(y_0 + 1) = h$.

A lokális hiba: $d_1 = y(x_1) - y_1 = (e^h - 1) - h = O(h^2)$.

b) A módosított Euler módszerrel $y_0 = 0, \quad y_1 = y_0 + h \left(y_0 + \frac{h}{2} (y_0 + 1) + 1 \right) = \frac{h^2}{2} + h$.

A lokális hiba: $d_1 = y(x_1) - y_1 = (e^h - 1) - \frac{h^2}{2} - h = O(h^3)$.

c) Az explicit Euler módszerrel kapott y_1 közelítésre alkalmazzuk az implicit Euler módszert, mint korrektor módszert.

$$y_1^{(0)} = y_1 = h, \quad y_1^{(1)} = y_0 + hf(x_1, y_1^{(0)}) = h(y_1^{(0)} + 1) = h(h + 1) = h^2 + h,$$

d) Az explicit Euler módszerrel kapott y_1 közelítésre alkalmazzuk a trapéz módszert, mint korrektor módszert.

$$y_1^{(0)} = y_1 = h, \quad y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})) = \frac{h}{2} (1 + y_1^{(0)} + 1) = \frac{h}{2} (h + 2) = \frac{h^2}{2} + h,$$

Láthatjuk, hogy egy lépés az explicit Euler módszerrel, majd utána a trapéz módszer egy lépését alkalmazva ugyanazt kaptuk, mint a módosított Euler módszerrel egy lépés után.

10.3. Runge-Kutta típusú egylépéses módszerek

A KÉP.-t integrálva az $[x_n, x_{n+1}]$ intervallumon és az $x := x_n + ht$ helyettesítést felhasználva

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx = h \cdot \int_0^1 f(x_n + ht, y(x_n + ht)) dt.$$

Az integrált egy kvadrátúra formulával közelítjük, ahol $b_j \in [0,1]$ -k az alappontok és c_j -k $j = 1, \dots, m$ -re a kvadrátúra formula együtthatói.

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{j=1}^m c_j f(x_n + hb_j, y(x_n + hb_j))$$

Mivel az $y(x_n + hb_j)$ értékeket nem ismerjük, ezeket $y_n, K_1, \dots, K_{j-1}$ -el közelítjük.

Megj.:

1. Az integrál közelítésére az érintő formulát használva a módosított Euler módszert kapjuk.
2. Az integrál közelítésére a trapéz formulát használva a trapéz módszert kapjuk.

Algebrai megközelítés:

Legyen $b_1 = 0$, ekkor $K_1 = f(x_n, y_n)$ ismert. A többi K_j -t az $y_n, K_1, \dots, K_{j-1}$ értékek lineáris kombinációból állítjuk elő. A következő alakú módszert keressük:

$$\begin{cases} K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + b_2 h, y_n + h \cdot a_{21} K_1) \\ K_3 = f(x_n + b_3 h, y_n + h \cdot a_{31} K_1 + h \cdot a_{32} K_2) \\ \vdots \\ K_m = f(x_n + b_m h, y_n + h \cdot a_{m1} K_1 + \dots + h \cdot a_{mm-1} K_{m-1}) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{j=1}^m c_j K_j$$

Definíció. Az $A = (a_{ji})_{j,i=1}^m$ mátrixot Runge-Kutta mátrixnak nevezzük. Ha $a_{ji} = 0 \quad i \leq j$ -re, akkor explicit Runge-Kutta módszert kapunk. A $\underline{c} = (c_1, \dots, c_m)^T$ vektor elemei a Runge-Kutta módszer súlyai, a $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ vektor elemei a Runge-Kutta módszer módusai és m a módszer szintje. Ha az A diagonálisában vagy felette vannak nem nulla elemek akkor implicit módszert kapunk, amikor fixpont iterációt kell végeznünk.

Jelölés. $\begin{array}{c|c} \underline{b} & A \\ \hline & \underline{c}^T \end{array}$

Megjegyzések.

1. Az $m = 1$ esetben $b_1 = 0$ és $c_1 = 1$ választással az explicit Euler módszert kapjuk.

2. Az $m = 2$ esetben $\begin{array}{c|c} \underline{b} & A \\ \hline & \underline{c}^T \end{array} = \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 \end{array}$ választás esetén

$$\begin{cases} K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_1\right) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + 0 \cdot h \cdot K_1 + 1 \cdot h \cdot K_2 = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}h \cdot f(x_n, y_n)\right),$$

Vagyis a módosított Euler módszert kaptuk.

3. Az $m = 4$ esetben a következő választással a negyedrendű klasszikus Runge-Kutta módszert kapjuk

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & & \\ \hline \frac{b}{c} & A & & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & 0 & \frac{1}{2} & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

A módszer alakja:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{array} \right\} \text{ és } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

4. Módszerek konstrukciójának menete: rögzített m esetén írjuk fel a lokális hibát, majd p -edrendű módszer esetén írjuk fel a paraméterekre azokat a feltételeket, amik a lokális hiba Taylor-sorának $O(h^p)$ -es tagjait kinullázzák.

Pl. $m = 2$ esetén

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \quad c_2 \in \mathbb{R} \text{ szabad paraméter.} \\ c_2 b_2 &= 1 \\ c_2 a_{21} &= 1 \end{aligned}$$

10.4. Algebrai lineáris többlépéses módszerek

A) Adams-Bashforth módszerek

Legyen $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. A KÉP.-t integrálva az $[x_n, x_{n+1}]$ intervallumon

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Jelölje $P_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}$ az $(x_{n-k+1}, f(x_{n-k+1}, y(x_{n-k+1}))), \dots, (x_n, f(x_n, y(x_n)))$ pontokon interpoláló polinomot.

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x) dx = \sum_{j=1}^k f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j})) \cdot \int_{x_n}^{x_{n+1}} l_j(x) dx$$

A kifejezésben szereplő integrál nem függ f -től, csak az alappontoktól. Legyen

$$\beta_j := \frac{1}{h} \cdot \int_{x_n}^{x_{n+1}} l_j(x) dx \text{ és}$$

$$f_{n-k+j} := f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j})) = f(x_{n-k+j}, y_{n-k+j}) .$$

Az $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ kezdeti értékek ismeretében a következő k -lépéses módszert kapjuk

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot f_{n-k+j}, \quad (n = k, \dots, N-1).$$

Megjegyzések.

1. A hiányzó $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ kezdeti értékeket például egy lépéses módszerrel határozhatjuk meg.

2. $k = 1$ esetén az explicit Euler módszert kapjuk.

10.5. Tétel. A k lépéses Adams-Bashforth módszer lokális hibája $O(h^{k+1})$, globális hibája $O(h^k)$, továbbá konvergens és a konvergencia rendje k .

B) Adams-Moulton módszerek

Az Adams-Bashforth módszerekhez képest az $(x_{n+1}, f(x_{n+1}, y(x_{n+1})))$ pontot is hozzáveszi az interpolációhoz, így k -adfokú polinommal közelíti a függvényt.

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_k(x) dx = \sum_{j=1}^{k+1} f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j})) \cdot \int_{x_n}^{x_{n+1}} l_j(x) dx$$

A kifejezésben szereplő integrál nem függ f -től, csak az alappontoktól. Legyen

$$\beta_j := \frac{1}{h} \cdot \int_{x_n}^{x_{n+1}} l_j(x) dx \text{ és}$$

$$f_{n-k+j} := f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j})) = f(x_{n-k+j}, y_{n-k+j}) .$$

Az $y_0, y_1, \dots, y_k$ kezdeti értékek ismeretében a következő implicit egyenletet kapjuk

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot f_{n-k+j} + h \cdot \beta_{k+1} \cdot f_{n+1} .$$

Megjegyzések.

1. Egy explicit módszer családot állítottunk elő a fenti konstrukcióval. Minden lépésben egy implicit egyenletet kell megoldani y_{n+1} -re. A hiányzó $y_{n-k+1}, \dots, y_n, y_{n+1}^{(0)}$ értékeket például egy lépéses módszerrel határozhatjuk meg.

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + h \cdot \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot f_{n-k+j} + h \cdot \beta_{k+1} \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

2. $k = 0$ esetén az implicit Euler módszert kapjuk. $k = 1$ esetén a trapéz módszert kapjuk.

10.6. Tétel. A k lépéses Adams-Moulton módszer lokális hibája $O(h^{k+2})$, globális hibája $O(h^{k+1})$, továbbá konvergens és a konvergencia rendje $k+1$.