

9. előadás: Közöséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

9.1. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Az $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható függvényekre vonatkozó

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in I)$$

egyenletet közöséges (elsőrendű explicit) differenciálegyenletnek nevezzük. Az

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & (x \in I) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

feladatot kezdeti érték problémának (KÉP) nevezzük.

9.2. Definíció: Az f függvény a második változójában teljesíti a Lipschitz-feltételt, ha $\forall K \subset \Omega$ kompakt halmazhoz $\exists L > 0$, melyre

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in K \text{ esetén.}$$

9.1. Tétel. (Picard-Lindelöf) Ha az $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény kielégíti a második változójában a Lipschitz-feltételt, akkor $\forall x_0 \in I$ és $\forall y_0 \in \Omega$ esetén a KÉP-nak létezik megoldása. Az

$$y_0(x) := y_0$$

$$y_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál a KÉP megoldásához. (Szukcesszív approximáció.)

Megjegyzés. A függvénysorozatban az integrálást koordinátánként, az $f = (f_1, \dots, f_n)$ koordináta függvényeire értjük. A továbbiakban csak az $n = 1$ esettel foglalkozunk.

9.1. Analitikus módszerek (Két példán, csak a legismertebbek.)

9.1.1. Példa. Szeparábilis (szétválaszható változójú) differenciálegyenlet.

$$\begin{cases} y' = 3x^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Megoldás. $\frac{y'}{y} = 3x^2$, $\ln'(y) = 3x^2$, $\ln(y) = \int 3x^2 dx = x^3 + c_1$. Innen $y(x) = e^{x^3} \cdot c_2$.

A kezdeti feltétel: $y(0) = e^0 \cdot c_2 = 1 \rightarrow c_2 = 1$. A KÉP megoldása: $y(x) = e^{x^3}$.

9.1.2. Példa. Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

$$\begin{cases} y' = 1 - x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Megoldás. A homogén egyenlet: $y' - y = 0$ vagyis $y' = y$. Szeparábilis egyenletként megoldva kapjuk, hogy az általános megoldása: $y(x) = e^x \cdot c$.

Az inhomogén egyenlet megoldása az állandók variálásának elvével történik.

A megoldást $c(x) \cdot e^x$ alakban keressük. Helyettesítsük be az inhomogén egyenletbe:

$$c'(x)e^x + c(x)e^x = 1 - x + c(x)e^x$$

$$c'(x)e^x = 1 - x$$

$$c'(x) = (1 - x)e^{-x}$$

Parciális integrálást alkalmazva:

$$\begin{aligned} c(x) &= \int (1 - x)e^{-x} dx = (1 - x)(-e^{-x}) - \int (-1)(-e^{-x}) dx = \\ &= (x - 1)e^{-x} + e^{-x} + c = xe^{-x} + c \end{aligned}$$

Tehát $y(x) = (xe^{-x} + c) \cdot e^x = x + c \cdot e^x$ alakú.

A kezdeti feltételből $y(0) = 0 + c \cdot e^0 = c = 1$, tehát a KÉP megoldása: $y(x) = x + e^x$.

9.2. Kvázi analitikus (vagy kvázi numerikus) módszerek

A) Picard iteráció. (Lásd 9.1. Tétel függvénytársozata.)

9.2.1. Példa. Alkalmazzuk a Picard iterációt az 9.1.1. Példa feladatára.

$$\begin{cases} y' = 3x^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Megoldás.

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 3t^2 \cdot 1 dt = 1 + x^3$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 3t^2 (1 + t^3) dt = 1 + x^3 + \frac{1}{2} x^6 \quad \text{stb.}$$

Látjuk, hogy minden lépésben a megoldás Taylor sorának újabb tagját kapjuk meg.

B) Taylor sor módszer. A megoldás Taylor sorát közelítjük az $y^{(k)}(x_0)$ értékek meghatározásával.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Az $y^{(k)}(x_0)$ derivált értékeket az egyenletből meghatározzuk.

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} y''(x_0) &= \partial_1 f(x_0, y_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) = \\ &= \partial_1 f(x_0, y_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) \quad \text{stb.} \end{aligned}$$

9.2.2. Példa. Alkalmazzuk a 9.1.2. Példa feladatára.

$$\begin{cases} y' = 1 - x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Megoldás.

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1 + 0 + y(0) = 2$$

$$y'' = -1 + y' \rightarrow y''(0) = -1 + y'(0) = -1 + 2 = 1$$

$$y''' = y'' \rightarrow y'''(0) = y''(0) = 1$$

Innen $k \geq 3$ -ra $y^{(k)} = y^{(k-1)} = \dots = y''$ és így $y^{(k)}(0) = 1$.

Tehát a megoldás: $y(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{k!}x^k + \dots = x + e^x$.

9.3. Numerikus módszerek

9.3.1. Definíció. Diszkrét módszernek nevezzük azt az eljárást, amely a differenciálegyenlet megoldását véges sok pontban állítja elő. A diszkrét módszert k **lépéses** ($k \in \mathbb{N}$)

módszernek nevezzük, ha az y megoldás x_n pontbeli y_n közelítő értékét az

$y_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots, y_{n-1}$ értékekből állítja elő.

A továbbiakban $y: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$) és $x^* \in I$ tetszőleges, $N \in \mathbb{N}$.

Jelölések: $h := \frac{x^* - x}{N}$, $x_n := x_0 + nh$ ($n = 0, \dots, N$),

$y_0 = y(x_0)$ kezdeti érték és y_n az $y(x_n)$ pontos megoldás közelítése.

9.3.2. Definíció. A numerikus módszer **konvergens**, ha $\forall x^* \in I, x^* > x_0$ esetén

$$\lim_{h \rightarrow +0} \left(\max_{n=0, \dots, N} |y(x_n) - y_n| \right) = 0.$$

A módszer p -**edrendben konvergens**, ha $\exists c, h_0 > 0$:

$$|y(x_n) - y_n| \leq c \cdot h^p \quad \forall h \leq h_0, (n = 0, 1, \dots, N).$$

9.3.3. Definíció. A numerikus módszer **lokális hibája** a módszerrel egy lépés alatt elkövetett hiba, ha pontos értékből indulunk, azaz

$$d_{n+1} := y(x_{n+1}) - y_{n+1} \quad \text{feltéve, hogy } y_n = y(x_n).$$

A numerikus módszer **globális hibája** a módszerrel több lépés után felhalmozódó hiba, azaz

$$e_n := y(x_n) - y_n \quad \text{feltéve, hogy } y_0 = y(x_0).$$

9.4. Explicit Euler módszer

A diszkretizációs jelöléseket használva az **explicit Euler módszer** alakja:

$$\begin{cases} y_{n+1} := y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \\ x_0, y_0 \text{ adott, } (n = 0, 1, \dots, N-1) \end{cases}$$

Motiváció: A derivált közelítésére gyakran használjuk a differencia hányadost:

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}.$$

Felhasználva az egyenletben: $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}.$

Innen átrendezve

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)).$$

9.4.1. Tétel. Az explicit Euler módszer lokális hibája:

$$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2) \quad (\text{azaz } \exists c > 0 : |d_{n+1}| \leq c \cdot h^2).$$

Bizonyítás. Az y pontos megoldásra írjuk fel a Taylor formulát:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot y'(x_n) + O(h^2) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)) + O(h^2).$$

Mivel $y(x_n) = y_n$,

$$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)) + O(h^2) - y_n - h \cdot f(x_n, y_n) = O(h^2).$$

9.4.2. Tétel. Ha az f függvény a második változójában teljesíti a Lipschitz-feltételt, akkor az explicit Euler módszer konvergens.

Bizonyítás. A Taylor formulából

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot y'(x_n) + O(h^2) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)) + O(h^2),$$

az Euler módszerből

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

A kifejezéseket kivonva

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= y(x_n) - y_n + h \cdot (f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)) + O(h^2) \end{aligned}$$

és abszolút értéket véve

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq |e_n| + h \cdot |f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)| + c \cdot h^2 \leq |e_n| + hL \cdot |e_n| + O(h^2) \\ &\leq (1 + hL) \cdot |e_n| + c \cdot h^2 \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned}$$

A továbbiakban teljes indukcióval belátjuk, hogy $|e_n| \leq \frac{c}{L} h \cdot ((1 + hL)^n - 1).$

$n = 0$ -ra $e_0 = y(x_0) - y_0 = 0$, igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy n -re igaz, bizonyítsuk $n + 1$ -re :

$$|e_{n+1}| \leq (1+hL) \frac{c}{L} h \left((1+hL)^n - 1 \right) + c \cdot h^2 = \\ = \frac{c}{L} h \left((1+hL)^{n+1} - (1+hL) + hL \right) = \frac{c}{L} h \left((1+hL)^{n+1} - 1 \right)$$

Mivel $(1+hL)^n = \left(1 + \frac{x^* - x_0}{N} L \right)^n \leq \left(1 + \frac{x^*}{N} L \right)^N \leq e^{x^* L}$, a módszer globális hibája

$$|e_{n+1}| \leq \frac{c}{L} h \left(e^{x^* L} - 1 \right) = O(h),$$

továbbá elsőrendben konvergens.

9.4.3. Tétel. Ha egy explicit egy lépéses módszer lokális hibájára $|d_n| \leq c \cdot h^{p+1}$ alakú becslés adható, és az f függvény a második változójában teljesíti a Lipschitz-feltételt, akkor a globális hibája p -edrendű, azaz $|e_n| \leq \tilde{c} \cdot h^p$.

Kidolgozott példák

1. Példa. Az $[1,2]$ intervallumon vizsgáljuk az explicit Euler módszert.

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Megoldás. A KÉP pontos megoldása az összehasonlításhoz: $y(x) = \frac{1}{x}$.

a) Például $N = 3$ esetén írjuk fel az Euler módszer közelítését.

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = 2, h = \frac{1}{3}, y_0 = 1.$$

$$y_1 = y_0 + h \left(-\frac{y_0}{x_0} \right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

$$y_2 = y_1 + h \left(-\frac{y_1}{x_1} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \approx y\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{5}$$

$$y_3 = y_2 + h \left(-\frac{y_2}{x_2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5} \approx y(2) = \frac{1}{2}$$

b) Vizsgáljuk az explicit Euler módszer lokális-, globális hibáját és konvergenciáját tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ esetén.

$$h := \frac{1}{N}, x_0 = 1, y_0 = 1, x_n = 1 + nh \quad (n = 0, 1, \dots, N), x_N = 2.$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h \cdot \frac{-y_n}{x_n} = y_n \left(1 - \frac{h}{x_n}\right) = y_n \cdot \frac{x_n - h}{x_n} = y_n \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

Lokális hibája: tegyük fel, hogy $y_n = \frac{1}{x_n}$ pontos,

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - y_{n+1} &= \frac{1}{x_{n+1}} - y_n \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{x_{n-1}}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1}}{x_{n+1}x_n^2} = \frac{x_n^2 - (x_n + h)(x_n - h)}{x_{n+1}x_n^2} = \\ &= \frac{h^2}{x_{n+1}x_n^2} < \frac{h^2}{1} = O(h^2) \end{aligned}$$

Globális hibája: tegyük fel, hogy $y_0 = 1$ pontos,

$$\begin{aligned} y_N &= y_{N-1} \cdot \frac{x_{N-2}}{x_{N-1}} = y_{N-2} \cdot \frac{x_{N-3}}{x_{N-2}} \cdot \frac{x_{N-2}}{x_{N-1}} = y_{N-2} \cdot \frac{x_{N-3}}{x_{N-1}} = \dots = y_0 \cdot \frac{x_{-1}}{x_{N-1}} = \\ &= y_0 \cdot \frac{x_0 - h}{x_N - h} = 1 \cdot \frac{1-h}{2-h} \end{aligned}$$

$$y(2) - y_N = \frac{1}{2} - \frac{1-h}{2-h} = \frac{2-h-2(1-h)}{2(2-h)} = \frac{h}{2(2-h)} \leq \frac{h}{2} = O(h).$$

Tehát az explicit Euler módszer elsőrendben konvergencia a megadott KÉP-ra.

2. Példa. A $[0,1]$ intervallumon vizsgáljuk az explicit Euler módszert.

$$\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Megoldás. A KÉP pontos megoldása az összehasonlításához: $y(x) = e^x - 1$.

a) Például $N = 3$ esetén írjuk fel az Euler módszer közelítését.

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1, h = \frac{1}{3}, y_0 = 0.$$

$$y_1 = y_0 + h(y_0 + 1) = \frac{1}{3} \approx y\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$y_2 = y_1 + h(y_1 + 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9} \approx y\left(\frac{2}{3}\right) = e^{\frac{2}{3}} - 1$$

$$y_3 = y_2 + h(y_2 + 1) = \frac{7}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9} + 1\right) = \frac{7}{9} + \frac{16}{27} = \frac{37}{27} \approx y(1) = e^1 - 1$$

b) Vizsgáljuk az explicit Euler módszer lokális-, globális hibáját és konvergenciáját tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ esetén.

$$h := \frac{1}{N}, x_0 = 0, y_0 = 0, x_n = nh \ (n = 0, 1, \dots, N), x_N = 1.$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(y_n + 1) = y_n(1+h) + h = (y_{n-1}(1+h) + h)(1+h) + h = \\ &= y_{n-1}(1+h)^2 + h((1+h) + h) = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n &= y_0(1+h)^n + h((1+h)^{n-1} + \dots + (1+h) + 1) = y_0(1+h)^n + (1+h)^n - 1 = \\ &= (1+h)^n - 1 \end{aligned}$$

Lokális hibája: $y_n = e^{x_n} - 1$ pontos,

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - y_{n+1} &= (e^{x_{n+1}} - 1) - ((e^{x_n} - 1) + h((e^{x_n} - 1) + 1)) = \\ &= e^{x_{n+1}} - e^{x_n} - h e^{x_n} - 1 + 1 + h - h = \frac{e^{x_n}}{2!} h^2 = O(h^2) \end{aligned}$$

Globális hibája: $y_0 = 0$ pontos,

$$y(1) - y_N = (e^1 - 1) - ((1 + h)^N - 1) = e - (1 + h)^N \leq e - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \leq \frac{3}{N} = 3h = O(h) \ .$$

Tehát az explicit Euler módszer elsőrendben konvergens a megadott KÉP-ra.