

9. előadás

Lineáris algebra numerikus módszerei

Bevezetés

Szükségünk van a komplex elemű mátrixok és vektorok bevezetésére.

A komplex elemű n -dimenziós oszlopvektorok halmazát $\mathbb{C}^n$ -el jelöljük.

Hasonlóképpen az $m \times n$ méretű komplex elemű mátrixok halmazát $\mathbb{C}^{m \times n}$ jelöli.

Nyilvánvalóan tekinthetjük úgy, hogy $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ és $\mathbb{R}^{m \times n} \subset \mathbb{C}^{m \times n}$.

A valós elemű vektorokra és mátrixokra bevezetett műveletek és a determináns értelmezése ugyanaz a komplex esetben is, mint valósban. A komplex vektorok és mátrixok normájának definíciója is változatlan marad. (Ezért kell a normák definíciójában négyzetek helyett (valós számok esetén feleslegesen) abszolút érték négyzeteket.

Definíció

Legyen $A \in C^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. A $\lambda \in C$ számot az A mátrix sajátértékének, az $x \in C^n$, ($x \neq 0$) vektort pedig a λ sajátértékhez tartozó (jobboldali) sajátvektornak nevezzük, ha

$$Ax = \lambda x. \quad (1)$$

A sajátvektor egy olyan vektor, amelyet az $x \rightarrow Ax$ leképezés a saját hatásvonalán hagy (irányítás, nagyság változhat). A sajátérték-feladat megoldása a sajátértékek és a hozzájuk tartozó sajátvektorok meghatározását jelenti.

Megjegyzés

Felhívjuk a figyelmet az $x \neq 0$ kikötésre, amiről a hallgatók többnyire elfeledkeznek. Pedig enélkül az egésznek semmi értelme, hiszen $A0 = \lambda 0$, ahol λ akármilyen lehetne.

A sajátérték-feladat tehát olyan λ (valós vagy komplex) szám(ok) keresését jelenti melyekre az (1) egyenletnek van nemtriviális megoldása.

Átrendezés után az eredeti egyenlettel ekvivalens $(A - \lambda I)x = 0$ alakot kapjuk. Ennek a homogén egyenletrendszernek keressük tehát a nemtriviális megoldásait, ami akkor és csak akkor létezik, ha $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definíció

A

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (2)$$

egyenletet az A mátrix **karakterisztikus egyenletének** nevezzük.
A determinánst kifejtve a λ változó n -ed fokú polinomját, azaz a

$$\phi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0 \quad (3)$$

karakterisztikus polinomot kapjuk.

Az algebra alaptétele szerint a multiplicitásokat is figyelembe véve egy n -ed fokú polinomnak a komplex számok körében pontosan n zérushelye van. (Ezért kellett tehát kilépnünk a valós számok köréből.) Egy λ_i gyök multiplicitásán azt értjük, hogy a polinom gyöktényezős alakjában a $(\lambda - \lambda_i)$ milyen hatványkitevővel szerepel.

Tétel

Egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixnak a multiplicitásokat is figyelembe véve pontosan n sajátértéke van.

Egy mátrix sajátértékeinek összességét a **mátrix spektrumának** nevezzük. A spektrumból a mátrixnak nagyon sok fontos tulajdonsága kiolvasható. Csupán kettőt említve:

- (i) Egy négyzetes mátrix akkor és csak akkor nonszinguláris ha egyik sajátértéke sem zérus.
- (ii) Egy mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha minden sajátértéke pozitív.

A sajátvektorok darabszámára már nem lehet olyan kijelentést tenni, mint a sajátértékekére. Néhány fontos tulajdonság felsorolásával jellemezhetjük a viszonyokat.

- Ha x a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, akkor bármilyen $t \in \mathbb{C}$ ($t \neq 0$) mellett tx is az. Ez a definíciós (1) egyenletbe való behelyettesítésből azonnal kiderül. Tehát az adott λ sajátérték esetén a hozzátartozó lineárisan független sajátvektorokat kell meghatározni, mert azok összes lineáris (de zérustól különböző) kombinációja adja meg a λ -hoz tartozó összes sajátvektort.

- Egy adott λ -hoz tartozó lineárisan független sajátvektorok száma legfeljebb annyi, mint a λ multiplicitása. (Ennek belátása nem egyszerű, itt mellőzzük az igazolását.)
- Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek. Ez a tény azonnal következik az első tulajdonságból. Ezek után tétel formában megemlítünk a sajátértékek tulajdonságai közül is néhányat, melyek a numerikus értékük meghatározásában, becslésében fontos szerepet játszanak.

Tétel

Ha λ az A mátrix sajátértéke és x egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor tetszőleges $\sigma \in \mathbb{C}$ esetén az $A - \sigma I$ mátrixnak sajátértéke a $\lambda - \sigma$ és ugyanaz az x egy hozzá tartozó sajátvektor.

Bizonyítás

$$(A - \sigma I)x = Ax - \sigma Ix = \lambda x - \sigma x = (\lambda - \sigma)x.$$

A -hoz a σI hozzáadását a spektrum eltolásának is nevezzük.

Tétel

Ha az A mátrix sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, akkor az A^k mátrix sajátértékei $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$.

Bizonyítás

Legyen λ akármelyik sajátérték. Ekkor

$$A^k x = A(\dots(A(A))\dots)x = A(\dots(A)\dots)(\lambda \cdot \lambda)x = \lambda^k x.$$

A tétel kiterjeszthető A tetszőleges polinomjára is.

Tétel

Ha az $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nonszinguláris mátrixnak λ sajátértéke és x egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor az A^{-1} -nek sajátértéke az $1/\lambda$ és x itt is hozzá tartozó sajátvektor.

Bizonyítás

$Ax = \lambda x \rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x \rightarrow x = A^{-1}\lambda x$. Osszuk át a nemzérus λ -val.

Tétel

Legyen λ az A mátrix akármelyik sajátértéke. Tetszőleges indukált mátrixnormában fennáll, hogy $|\lambda| \leq \|A\|$.

Bizonyítás

$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$,
ahonnan $x \neq 0$ miatt $|\lambda| \leq \|A\|$ adódik.

Bármely λ tehát egy olyan origó középpű körben helyezkedhet el, amelyik sugara egyetlen indukált normánál sem nagyobb.

A következő tétel egy még általánosabb tartományra, n darab körlap egyesítésére szűkíti a sajátértékek lehetséges előfordulását.

Gersgorin Tétel

Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, továbbá

$$r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, \dots, n)$$

az i -edik kör sugara. Legyen az i -edik körlap:

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ekkor az A mátrix minden λ sajátértékére fennáll, hogy

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Bizonyítás

Legyen $v = [v_1, \dots, v_n]^T$ az egyik, tetszőleges λ -hoz tartozó sajátvektor, i pedig az az index, amelyre fennáll, hogy $\|v\|_\infty = |v_i|$. ($|v_i|$ értéke $v \neq 0$ miatt nyilván nem zérus.) Az $Av = \lambda v$ egyenletrendszer i -edik egyenlete

$$\lambda v_i = a_{ii} v_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} v_j,$$

ahonnan átrendezéssel

$$|\lambda v_i - a_{ii} v_i| = |\lambda - a_{ii}| |v_i| = \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} v_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| |v_j|$$

adódik.

Bizonyítás

Mindkét oldalt $|v_i|$ -vel elosztva kapjuk, hogy

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i.$$

Tehát minden λ sajátérték benne van valamelyik D_i körlemezben, az összes sajátérték benne van az egyesítésükben.

Példa

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

- (i) Határozzuk meg a sajátértékeit, azok multiplicitását és a hozzájuk tartozó lineárisan független, végtelen normában egységnyi sajátvektorokat.
- (ii) Feltéve, hogy nem tudjuk az előző kérdésre a választ, de ismerjük az A tanult normáit, ábrázoljunk a komplex számsíkon minél szűkebb olyan tartományt, amelybe biztosan beleesik mindegyik sajátérték. ($\|A\|_2 = 7.47$ kerekítve.)

Megoldás

A karakterisztikus polinom, illetve egyenlet

$$\det \left(\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -5 & -1 & -4 - \lambda \end{bmatrix} \right) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0.$$

A gyöktényezős alak: $-(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0$. Vagyis a sajátértékek: $\lambda_1 = -2$, egyszeres és $\lambda_2 = 1$ kétszeres. Felírva a két sajátértékhez tartozó egyenletet:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Megoldás

Az első egyenletrendszerből független (például) az első kettő, ennek megoldása:

$$[-0.4t, 0, t]^T,$$

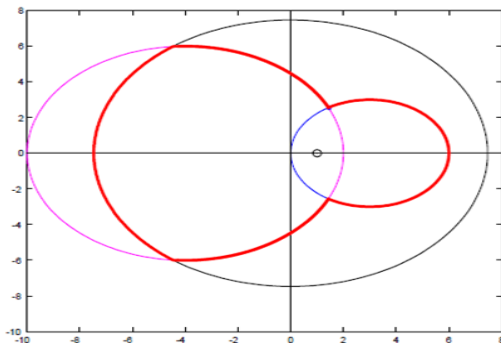
a másodiké:

$$[\tau, 0, -\tau]^T$$

($t, \tau \neq 0$, egyébként tetszőleges komplex számok). A feladat kívánalmának megfelelnek, ha $t, \tau = 1$.

Az A indukált normái: $\|A\|_1 = 8$, $\|A\|_\infty = 10$, $\|A\|_2 = 7.47$. Ezek közül a 7.47 a legkisebb, tehát a tétel szerint minden sajátérték benne van az origó közepű, ilyen sugarú körben. Írjuk fel a Gersgorin tételben szereplő körök egyenletét:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 3^2; \quad (x - 1)^2 + y^2 = 0^2; \quad (x + 4)^2 + y^2 = 6^2$$



Az ábrán jól láthatóak az egyes körlapok (a második egyetlen pont). A Gersgorin tételben szereplő körlapok uniójának és a tételben említett körlapnak a metszetét vastagabb piros vonallal határoltuk. Látható, hogy azért elég durva lehet ez a becslés.

A sajátérték-feladat megoldása elvileg is nehéz, numerikusan méginkább. A karakterisztikus egyenlet megoldása nagyobb dimenzióban, majd adott esetben az igen nagyméretű szinguláris mátrixú egyenlet megoldása komoly gondot jelenthet. Éppen ezért elméleti jelentősége mellett a gyakorlat számára is fontos kérdés, hogy adott mátrixhoz lehet-e olyan másikat találni, amelynek sajátértékei megegyeznek az eredetivel. Az új mátrix sajátértékei esetleg könnyebben meghatározhatók.

Definíció

Legyen $A \in C^{n \times n}$ tetszőleges mátrix és $T \in C^{n \times n}$ nonszinguláris. Ekkor az $A \rightarrow T^{-1}AT$ leképezést hasonlósági transzformációnak nevezzük, és ha $B = T^{-1}AT$, akkor azt mondjuk, hogy A és B hasonló.

Tétel

Ha A és B hasonlóak, azaz $B = T^{-1}AT$ valamely nonszinguláris T mátrixszal, akkor A és B sajátértékei megegyeznek. Továbbá, ha egy λ sajátértékhez az A mátrix x sajátvektora tartozik, akkor az $y = T^{-1}x$ a B sajátvektora.

Bizonyítás

Definíció szerint

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow T^{-1}Ax = \lambda T^{-1}x \Leftrightarrow T^{-1}AT(T^{-1}x) = \lambda(T^{-1}x) \Leftrightarrow By = \lambda y$$

ami bizonyítandó volt.

Vannak mátrixok, amelyek spektruma a mátrixból kiolvasható. Azonnal látszik, hogy a diagonálmátrixok sajátértékei a főátló elemei, de hasonlóképp rögtön látható, hogy ugyanez a helyzet a háromszögmátrixoknál is. Azoknál is a főátlóbeli elemek szorzata adja a determinánst és az $A - \lambda I$ olyan háromszögmátrix, melynek főátlóját az $a_{ii} - \lambda$ értékek alkotják. Felmerül tehát az ilyen alakú mátrixokra való hasonlósági transzformáció kérdése.

Definíció

Egy A mátrix diagonalizálható, ha van olyan T mátrix ($\det(T) \neq 0$), hogy a $T^{-1}AT$ hasonló mátrix diagonális.

Megjegyzés

A diagonalizálhatóság pontos feltételét meglehetősen bonyolult ellenőrizni, kivitelezése ugyancsak. Éppen ezért inkább elméleti jelentőségű. Háromszögmátrixra való hasonlósági transzformációt szintén nehéz találni. Viszont ismerünk olyan numerikus eljárást, amelyik hasonlósági transzformációk végtelen sorozatával "kinullázza" a főátló alatti elemeket, miközben a diagonális elemek is konvergálnak. Vagyis elég messze elmenve a sorozattal, a főátlóban lévő elemek az eredeti mátrix sajátértékeinek jó közelítései, függetlenül attól, hogy a főátló fölötti elemek konvergálnak-e vagy sem.

Fenti megjegyzésünkben szereplő eljárást nem ismertetjük. Ismertetjük viszont azt, amiből általánosítással származtatható az említett (a főátló alatt "nullázó") módszer.

Sok gyakorlati problémánál a legnagyobb abszolút értékű sajátértéknek döntő szerepe van, ezért azt domináns sajátértéknek nevezzük. A sajátértékek sorszámozása akaratlagos, de rendszerint úgy számozzuk, hogy teljesüljön a következő:

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Ekkor tehát a λ_1 a domináns. Általában mindegyik sajátértéket felsoroljuk. Valamely sajátérték multiplicitást úgy vesszük figyelembe, hogy annyszor szerepel, amennyi a multiplicitása. A sajátvektorok közül is megadunk minden felsorolt sajátértékhez egyet, tehát n darabot adunk meg: $x_1, x_2, \dots, x_n$ (akkor is, ha azok nem feltétlenül lineárisan függetlenek). A domináns sajátérték közelítő meghatározására szolgáló egyik módszer alap gondolata von Miseses-től származik, ezért szokás Miseses-módszernek is nevezni.

Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ valós mátrix sajátértékei is valósak, a domináns pedig egyedüli, azaz

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (4)$$

Tegyük továbbá fel, hogy a $v^{(0)}$ kezdővektort sikerült úgy megválasztani, hogy előállítható a sajátvektorok olyan lineáris kombinációjaként, amelyben x_1 szerepel, azaz alkalmas α_i konstansokkal: $v^{(0)} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, ahol $\alpha_1 \neq 0$.

Képezzük a $v^{(k)} = Av^{(k-1)} = A^k v^{(0)}$ ($k = 1, 2, \dots$) sorozatot. (Itt a zárójel nélküli felső index hatványkitevő; ez is magyarázza a módszer elnevezését.) A kiinduló feltevések miatt

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= Av^{(0)} = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} v^{(k)} &= Av^{(k-1)} = A(\alpha_1 \lambda_1^{k-1} x_1 + \alpha_2 \lambda_2^{k-1} x_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^{k-1} x_n) \\ &= \alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \alpha_2 \lambda_2^k x_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k x_n \\ &= \lambda_1^k \left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k x_n \right). \end{aligned}$$

Legyen $y \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges olyan vektor, amelyre $y^T v^{(k)} \neq 0$.

Ekkor

$$\frac{y^T A v^{(k)}}{y^T v^{(k)}} = \frac{y^T v^{(k+1)}}{y^T v^{(k)}} = \frac{\lambda_1^{k+1} \left(\alpha_1 y^T x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{k+1} y^T x_i \right)}{\lambda_1^k \left(\alpha_1 y^T x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k y^T x_i \right)} \rightarrow \lambda_1,$$

ha $k \rightarrow \infty$, mert (4) miatt $|\lambda_k/\lambda_1| \leq |\lambda_2/\lambda_1| < 1$ ($k \geq 2$).

Ugyanezért

$$\frac{v^{(k)}}{\lambda_1^k} \rightarrow \alpha_1 x_1.$$

A $v^{(k)}$ tehát egyre "párhuzamosabb" lesz x_1 -gyel, azaz maga is egyre jobb közelítése egy λ_1 -hez tartozó sajátvektornak. Gondot okoz viszont, hogy komponensei a λ_1 abszolút értékétől függően egyre nagyobb abszolút értékűek lehetnek, vagy gyorsan tarthatnak zérushoz. Mindkét eset numerikusan előbb utóbb kezelhetetlenné válik. Megoldást jelent viszont, ha időnként, leginkább minden lépésben osztjuk egy számmal (hisz a hossz változásával egy sajátvektor sajátvektor marad). Legkényelmesebb, ha normálunk, azaz a saját ∞ jelű normájával osztunk. Összefoglalva, az algoritmus a következő:

A hatványmódszer algoritmus

Input $v^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)

for $k = 1, 2, \dots$ $z^{(k)} = Av^{(k-1)}$

$\gamma_k = y^T z^{(k)} / y^T v^{(k-1)},$ ($y^T \in \mathbb{R}^n$, lépésenként változhat,
de $y^T v^{(k-1)} \neq 0$)

$v^{(k)} = z^{(k)} / \|z^{(k)}\|_\infty$

end

A fentiek alapján fennáll, hogy

$$v^{(k)} \rightarrow x_1, \quad \gamma_k \rightarrow \lambda_1.$$

A $v^{(k)} \rightarrow x_1$ konvergencián itt azt értjük, hogy $v^{(k)}$ hatásvonala tart x_1 hatásvonalához. A $v^{(k)}$ sorozat elemeinek komponensei váltakozó előjelűek, ha λ_1 negatív. Az y vektort általában egységvektornak választjuk úgy, hogy ha $|v_i^{(k-1)}| = \|v^{(k-1)}\|_\infty$, akkor legyen $y = e_i$. Ekkor tehát csupán két komponens hányadosát kell kiszámítani: $\gamma_k = z_i^{(k)} / v_i^{(k-1)}$; azt a kettőt, ahol a nevezőben szereplő $v^{(k-1)}$ legnagyobb abszolút értékeű komponense áll (amiről ráadásul azt is tudjuk, hogy 1 vagy -1). Az eljárás a $|\lambda_2 / \lambda_1|$ nagyságrendjétől függő konvergencia sebességgel rendelkezik. A módszer erősen érzékeny a $v^{(0)}$ kezdővektor megválasztására is.

Ha $\alpha_1 = 0$, akkor az eljárás nem konvergál a λ_1 domináns sajátértékhez. Bizonyos mátrixosztályok esetén igazolták, hogy véletlenül választott $v^{(0)}$ kezdővektorok mellett 1 valószínűséggel konvergál az eljárás. Komplex sajátértékek, illetve többszörös λ_1 esetén az eljárást módosítani kell. Az eljárás konvergenciáját gyorsítani lehet, ha az $A - \sigma I$ ún. eltolt mátrixra hajtjuk végre, ahol σ alkalmasan megválasztott szám. Az $A - \sigma I$ mátrix sajátértékei u_i . (mint azt a 8 tételben láttuk): $\lambda_1 - \sigma, \lambda_2 - \sigma, \dots, \lambda_n - \sigma$. A konvergenciát befolyásoló $|\lambda_2 - \sigma| / |\lambda_1 - \sigma|$ pedig a σ ügyes megválasztásával kisebbé tehető mint $|\lambda_2 / \lambda_1|$.

A hatványmódszert az

$$\frac{\|r_k\|_2}{\|v^{(k)}\|_2} = \frac{\|Av^{(k)} - \gamma_k v^{(k)}\|_2}{\|v^{(k)}\|_2} \leq \varepsilon \quad (5)$$

kilépési feltétellel szokás leállítani, ahol r_k a γ_k és $v^{(k)}$ (1)-hez tartozó reziduális hibája.

Példa

Keressük meg hatványmódszerrel az előző példában szereplő mátrix domináns sajátértékét és a hozzá tartozó sajátvektort.

Megoldás

Jó kezdővektort nem mindig sikerül találni, különösen ilyenkor, amikor nincs n darab független sajátvektor. Induljunk ki a $v^{(0)} = [2, 2, 2]^T$ -ből. A számítási eredményeket táblázatba foglaltuk.

Megoldás

z^T	γ	v^T	$\ r\ _\infty$
[12, 2, -20]	6	[0.6000, 0.1000, -1]	6.9
[-0.1000, 0.1000, 0.9000]	-0.9000	[-0.1111, 0.1111, 1]	2.6556
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
[-0.6754, 0.0088, 1.7982]	-1.7982	[-0.3756, 0.0049, 1]	0.3286
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
[0.8006, 0.0000, -2.0009]	-2.0009	[0.4001, 0.0000, -1]	0.0014

A $k = 1, 2, \dots, 6, \dots, 15$ lépéseket tüntettük fel. A konvergencia meglehetősen lassúnak bizonyult, mint láthatjuk. Most a $\sigma = 0.8$ eltolással, az $A - \sigma I$ -re végrehajtva az algoritmust, már $k = 4$ -nél elértük azt, amit az előbb a 15-ik lépésben. $k = 15$ -nél pedig megkaptuk az eredményeket a szabványos duplapontos aritmetikában elérhető maximális, azaz 16 decimális jegy pontossággal.



A hatványmódszert, amely igen előnyös lehet nagyméretű ritka mátrixok esetén, leginkább a legnagyobb, ill. a legkisebb abszolút értékű sajátértékek meghatározására használjuk. Ez utóbbi a következőképpen történhet. Az A^{-1} sajátértékei: $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$. Ezek közül a legnagyobb abszolút értékű sajátérték $\frac{1}{\lambda_n}$ lesz. Itt sem szokás invertálni, hanem a $z^{(k)} = A^{-1}v^{(k-1)}$ helyett az $Az^{(k)} = v^{(k-1)}$ egyenletrendszert megoldani; legkényelmesebben LU -módszerrel.

A (5)-ben szereplő r_k reziduális hiba (vagy a relatív hibája) kicsiségétől azt reméljük, hogy nagyságrendben valóban jól adja vissza a k -adik közelítések hibáját.

Sajnos ez nem mindig így van. Tekintsük az

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol $\varepsilon \approx 0$ kicsi. Az $A(\varepsilon)$ mátrix sajátértékei $1 \pm \sqrt{\varepsilon}$. Legyen $\gamma_k = 1$ és $x_k = [1, 0]^T$. Ekkor a közelítő sajátérték tényleges hibája $\pm\sqrt{\varepsilon}$ de

$$\|r\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right\|_2 = \varepsilon.$$

Ha most például $\varepsilon = 10^{-10}$, akkor a reziduális hiba öt nagyságrenddel pontosabbat mutat, mint a tényleges hiba.

Óvatosan kell tehát a (5) eredményét kezelni.

Végül megjegyezzük, hogy rangszámcsökkentő eljárásokkal és egyéb módosításokkal a Miseses eljárás alkalmassá tehető az összes sajátérték-sajátvektor meghatározására is.