

Numerikus módszerek (GEMAK631-BL)
Féléves óraszám: 8 elméleti és 8 gyakorlati óra
Tárgy kredit: 5

A tananyag leírása:

A klasszikus hibaszámítás alapjai.
Mátrixműveletek, speciális mátrixok.
Vektor- és mátrixnormák.
Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-módszerrel, LU-módszerrel, Jacobi- és Seidel iterációval.
Mátrixinvertálás.
Mátrix sajátértékei és sajátvektorai. A hatványmódszer.
Lineáris egyenletrendszerek hibaanalízise.
A legkisebb négyzetek módszere.
Függvényközelítés interpolációval: Lagrange interpoláció, spline interpoláció.
Numerikus deriválás és integrálás.
Egyismeretlenes egyenletek megoldási módszerei: Intervallumfelező eljárás, fixpontiteráció, Newton-módszer.
A fixpont-iteráció és a Newton módszer nemlineáris egyenletrendszerekre.
Differenciál-egyenletek közelítő megoldásai.

A tárgy lezárása: aláírás és gyakorlati jegy

A félév elismerésének feltételei:

Az előadások és a gyakorlatok rendszeres látogatása, valamint a zárthelyi dolgozat legalább elégséges szintű megírása.

Irodalom:

- Galántai Aurél - Jeney András: Numerikus módszerek, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc 2005.
- Dr. Jeney András: Bevezetés a numerikus módszerekbe, Elektronikus jegyzet, <http://www.gepesz.uni-miskolc.hu/hefop/>
- Gergő Lajos: Numerikus módszerek-Kidolgozott példák, feladatok, ELTE, Eötvös Kiadó Kft, 2010.
- Stoyan G. (szerk.): MATLAB, Typotex, 2005

Dr. Nagy Noémi

ME Matematikai Intézet

Név:

Alkalmazott Matematikai Int. Tsz.

Neptun-kód:

NUMERIKUS MÓDSZEREK

Minden számítást 4-tizedesjegy pontossággal végezzen!

Minden jól megoldott feladat egy pontot ér.

Feladatok

- 1.) Adja meg az alábbi A mátrix $\|A\|_1$, $\|A\|_F$, $\|A\|_\infty$ normáit, valamint a $v \cdot A^T$ vektor 1-es, 2-es és végtelen normáját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v = [1 \quad 1 \quad -1]$$

- 2.) Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval, részleges főelemkiválasztással!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- 3.) Intervallumfelező módszerrel adjon közelítést az alábbi függvény zérushelyére a $[0, 1]$ intervallumon! A közelítést $\varepsilon = 0.06$ pontossággal végezze! A módszer alkalmazása előtt ellenőrizze a feltételek teljesülését!

$$f(x) = e^x - 4x^2$$

- 4.) Közelítse az alábbi integrál értékét összetett Simpson formulával úgy, hogy az intervallumot nyolc részre bontja! Adja meg az így kapott közelítés hibáját!

$$\int_{0.5}^{4.5} \ln(2x) dx$$

- 5.) Határozza meg az alábbi pontokra illeszkedő harmadfokú Lagrange-interpolációs polinomot, és ennek segítségével közelítse az $f(0.2)$ értéket!

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

- 6.) Írja fel az abszolút és relatív hibakorlát képleteit a négy alapműveletre vonatkozóan! Milyen kapcsolat van az abszolút és relatív hibakorlát között? Határozza meg a $\Delta(a^2)$, azaz az a^2 abszolút hibakorlátjára vonatkozó képletet!

Regoldokulor

1. $\|A\|_1 = \max\{6; 1; 3\} = 6$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2 + 5^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max\{4; 6\} = 6$$

2. $v \cdot A^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\|v \cdot A^T\|_1 = |4| + |4| = 8$$

$$\|v \cdot A^T\|_2 = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5,6569$$

$$\|v \cdot A^T\|_\infty = \max\{|4|; |4|\} = 4$$

2.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

$$-4x_3 = 4$$

$$x_3 = -1$$

$$-2x_2 - 4x_3 = 2$$

$$-2x_2 + 4 = 2$$

$$-2x_2 = -2$$

$$x_2 = 1$$

$$2x_1 + 0x_2 + 4x_3 = -2$$

$$2x_1 + 0 \cdot 1 + 4(-1) = -2$$

$$2x_1 - 4 = -2$$

$$2x_1 = 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. $f(x)$ folytonos

$$f(0) = e^0 - 4 \cdot 0^2 = 1 > 0$$

$f(1) = e^1 - 4 \cdot 1^2 = -1,2817 < 0$ } a végpontokban az előjelek különböznek

$$c = 0,06$$

$$\frac{1-0}{2^k} < 0,06$$

$$\frac{1}{0,06} < 2^k$$

$$16,6667 < 2^k$$

$$4,0589 < k$$

$$\Rightarrow \boxed{k=5}$$

	+	-	x_k	$f(x_k)$ előjele
	alsó vp.	felső vp.	felosztáspont	
1	0	1	0,5	+ 0,5487
2	0,5	1	0,75	- 0,1330
3	0,5	0,75	0,625	+ 0,3057
4	0,625	0,75	0,6875	+ 0,0981
5	0,6875	0,75	0,7188	

$$4. \frac{4,5 - 0,5}{8} = 0,5$$

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
f(x)	0	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972

$$S_8 = \frac{9^5}{3} (0 + 4 \cdot 0,6931 + 2 \cdot 1,0986 + 4 \cdot 1,3863 + 2 \cdot 1,6094 + 4 \cdot 1,7918 + 2 \cdot 1,9459 + 4 \cdot 2,0794 + 2,1972) = \underline{\underline{5,1804}}$$

$$\text{közelítés hibájához } S_4 = \frac{1}{3} (0 + 4 \cdot 1,0986 + 2 \cdot 1,6094 + 4 \cdot 1,9459 + 2,1972) = \underline{\underline{5,8647}}$$

$$E = |5,1804 - 5,8647| = 0,3157$$

5. $g_1 = 0 \Rightarrow l_1$ értéket nem fontos meghatározni

$$l_2(x) = \frac{x - (-1)}{0 - (-1)} \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} \cdot \frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{1}{2} (x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

$g_3 = 0 \Rightarrow l_3$ értéket nem szükséges meghatározni

$$l_4(x) = \frac{x - (-1)}{2 - (-1)} \cdot \frac{x - 0}{2 - 0} \cdot \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{1}{6} (x^3 - x)$$

$$f(0,2) \approx p(0,2) = 0 \cdot l_1(0,2) + 1 \cdot l_2(0,2) + 0 \cdot l_3(0,2) + 2 \cdot l_4(0,2) \\ = 1 \cdot \frac{1}{2} (0,2^3 - 2 \cdot 0,2^2 - 0,2 + 2) + 2 \cdot \frac{1}{6} (0,2^3 - 0,2) = \underline{\underline{0,8}}$$

6. Abszolút hibakorlát:

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$$

$$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$$

$$\Delta(a \cdot b) = \Delta a \cdot |b| + \Delta b \cdot |a|$$

$$\Delta(a/b) = \frac{\Delta a \cdot |b| + \Delta b \cdot |a|}{b^2}$$

$$\text{Kapcsolat: } \delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} ; \Delta a = \delta a \cdot |a|$$

$$\Delta(a^2) = \Delta(a \cdot a) = \Delta a \cdot |a| + \Delta a \cdot |a| = 2|a| \cdot \Delta a$$

Relatív hibakorlát:

$$\delta(a+b) = \max\{\delta a, \delta b\}$$

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|}$$

$$\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b$$

$$\delta(a/b) = \delta a + \delta b$$