

HATVÁNYMÓDSZER a mátrix domináns (legnagyobb abszolút értékű)
sajátértékének a közelítésére

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \dots \geq |\lambda_n|$$

$\bar{u}^{(0)}$ (majdnem) tetszőleges kezdővektor

$$\bar{u}^{(1)} = A \bar{u}^{(0)} \quad \text{általában:} \quad \bar{u}^{(k)} = A \bar{u}^{(k-1)}$$

$$\frac{u_i^{(k+1)}}{u_i^{(k)}} \longrightarrow \lambda_1$$

INVERZ HATVÁNYMÓDSZER

Ha A^{-1} -re alkalmazunk a hatvány módszert, akkor az eredmény
reciprok A legkisebb sajátértéke.

$$A^{-1}: \frac{1}{|\lambda_n|} > \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} \dots > \frac{1}{|\lambda_1|}$$

$$A: |\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

DIFFERENCIALEGYENLETEK

2021. április 27., kedd 11:57

NUMERIKUS MEGOLDÁSA

Közönséges, elsőrendű diff. egyenletet vizsgálunk.

Általános alakjuk:

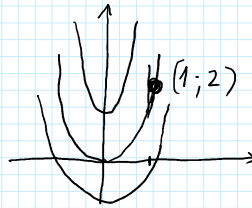
$$y' = f(x, y)$$

Az $y = y(x)$ függvényt kell meghatározni

A differenciálegyenlet általános megoldása tartalmaz egy additív C konstanszt.

A kezdeti érték feladat: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

$$y_d = x^2 + C$$



$$x_0 = 1 \quad y_0 = 2$$

$$2 = 1^2 + C \rightarrow C = 1$$

$$y_p = x^2 + 1$$

az a konkrét megoldás, amelyik átmegy a megadott $(1; 2)$ ponton.

A differenciálegyenlet numerikus megoldása az $[x_0; b]$ intervallumon

általában azt jelenti, hogy az $x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$ pontokban közelítő értéket adunk az ismeretlen y függvény értékeire. $h = \frac{b - x_0}{n}$ a lépésköz.

1) TAYLOR MÓDSZER

Az $y(x)$ függvény n -edfokú Taylor polinomját az x_0 pont körül:

$$y_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Példa

$$y' = 3x + y^2 ; \quad y(0) = 1$$

$$x_0 = 0, \quad y(x_0) = y_0 = 1$$

$n = 1$:

$$y'(x_0) = 3 \cdot x_0 + (y(x_0))^2 = 3 \cdot 0 + 1^2 = 1$$

$$y_1(x) = 1 + 1(x - 0) = 1 + x$$

$n = 2$:

$$y'' = (y')' = (3x + y^2)' = 3 + 2y \cdot y'$$

$$y''(x_0) = 3 + 2 \cdot y(x_0) \cdot y'(x_0) = 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

$$y_2(x) = 1 + x + \frac{5}{2}x^2$$

$n = 3$:

$$y''' = (y'')' = (3 + 2y \cdot y')' = 0 + 2(y' \cdot y' + y \cdot y'')$$

$$y'''(x_0) = 2(1 \cdot 1 + 1 \cdot 5) = 12$$

Ezt a függvényt használhatjuk arra, hogy pl 0,1-ben becslezzük y értéket:

$$y(0,1) \approx 1 + 0,1 + 2,5 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot 0,1^3 = 1,127$$

2) PICARD módszer

A keresett érték feladat egyszerűen az alábbi integrálegyenlettel:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du$$

Az integrálegyenlet megoldásához közelítő függvénysorozat:

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y_0(u)) du$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y_1(u)) du$$

;

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y_{n-1}(u)) du$$

PÉLDA

$$y' = y + x \quad y(0) = 0$$

$$y_0(x) = y_0 = 0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(u, \underbrace{y_0(u)}_0) du = y_0 + \int_0^x u + 0 du = y_0 + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^x = 0 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x f(u, \underbrace{y_1(u)}_{\frac{u^2}{2}}) du = 0 + \int_0^x u + \frac{u^2}{2} du = \left[\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_0^x f(u, y_2(u)) du = 0 + \int_0^x u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} du = \left[\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Az $y(x)$ fgv várhatóan: $y(x) \approx e^x - x - 1$

Ellenőrzés: $y' = e^x - 1$ (baloldallal)

$y + x \approx e^x - x - 1 + x = e^x - 1$ (jobb oldallal) ✓

Kerdesi érték: $y(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ ✓

3) EULER MÓDSZER

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

Az elsőfokú Taylor polinom:

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

Jelölje h az $x-x_0$ különbséget. Ekkor $x = x_0 + h$

$$y(x_0+h) \approx y(x_0) + h \underbrace{f(x_0, y_0)}_{y'(x_0)}$$

$$x_0 = x_0$$

$$y_0 = y(x_0)$$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$y_1 = y(x_1) = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

$$x_2 = x_1 + h$$

$$y_2 = y(x_2) = y_1 + h f(x_1, y_1)$$

:

$$x_{k+1} = x_k + h$$

$$y_{k+1} = y(x_{k+1}) = y_k + h f(x_k, y_k)$$

PÉLDA : $y' = x \cdot \sqrt[3]{y}$; $y(2) = 1$ legyen $h = 0,1$ a lépésköz.

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = y(2) = 1$$

$$x_1 = 2,1$$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{1} = 1,2$$

$$x_2 = 2,2$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1,2 + 0,1 \cdot 2,1 \cdot \sqrt[3]{1,2} = 1,4232$$

$$x_3 = 2,3$$

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = 1,4232 + 0,1 \cdot 2,2 \cdot \sqrt[3]{1,4232} = 1,6707$$

4) RUNGE - KUTTA típusú módszerek

Az Euler módszert szétbontva általánosítani, a $k+1$. iterált általános előállítása:

$$y_{k+1} = y_k + h (p_1 f_1 + p_2 f_2 + \dots + p_m f_m)$$

ahol az f_i függvények x_k, y_k és h -tól is függnek:

$$f_i = f(x_k + \alpha_{i-1} h, y_k + \alpha_{i-1} h f_{i-1})$$

itt az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ és $p_1, \dots, p_m$ konstansok adottak

m adja a módszer rendjét

$m=1$ esetén visszakapjuk az Euler módszert.

$m=4$: a leginkább használt módszer a negyedrendű Runge-Kutta módszer

A negyedrendű módszerben használt paraméterek:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} ; \alpha_3 = 1 ; p_1 = p_4 = \frac{h}{6} ; p_2 = p_3 = \frac{h}{3}$$

így

$$y_{k+1} = y_k + h \frac{f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4}{6}, \text{ ahol}$$

$$f_1 = f(x_k, y_k)$$

$$f_2 = f(x_k + 0,5h, y_k + 0,5h f_1)$$

$$f_3 = f(x_k + 0,5h, y_k + 0,5h f_2)$$

$$f_h = f(x_k + h, y_k + h f_3)$$

Példa

$$y' = 3x + y^2, \quad y(0) = 1; \quad h = 0,1, \quad y(0,1) = ?$$

$$f_1 = f(x_0, y_0) = 3 \cdot 0 + 1^2 = 1$$

$$f_2 = f(x_0 + 0,5h; y_0 + 0,5h f_1) = f(0,05; 1,05) = 3 \cdot 0,05 + 1,05^2 = 1,2525$$

$$f_3 = f(x_0 + 0,5h; y_0 + 0,5h f_2) = f(0,05; 1,062625) = 1,2792$$

$$f_4 = f(x_0 + h; y_0 + h f_3) = f(0,1; 1,12792) = 1,5722$$

$$y_1 = y(0,1) = 1 + 0,1 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 1,2525 + 2 \cdot 1,2792 + 1,5722}{6} = 1,1273$$