

NUMERIKUS INTEGRÁCIÓ

2021. március 30., kedd 7:56

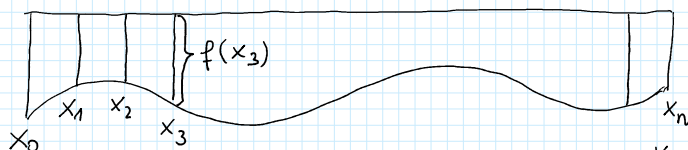
Határozott integrál kiszámítása

- egzakt módon: Newton-Leibniz képlet: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
ahol $F'(x) = f(x)$.

Problémák: 1) nem minden függvénynek létezik primitív függvénye

$\int e^{-x^2} dx = ? \rightarrow$ valószínűség-számításban a normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\rightarrow$ táblázatból nézzük ki az értékeit

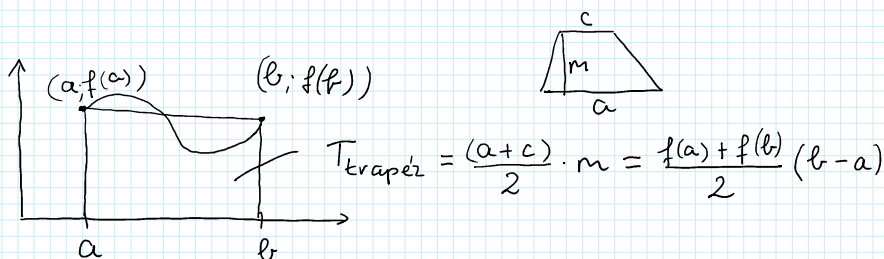
2) $f(x)$ képlete nem ismert, csak táblázatbeli értékeket használhatunk



x	x_0		x_n
$f(x)$	$f(x_0)$		$f(x_n)$

- numerikusan: alapműveletekkel közelítjük a határozott integrál értékeit
A táblázat alapján előállítjuk $f(x)$ interpoláló polinomját és azt integráljuk.

EGYSZERŰ TRAPÉZ FORMULA



$$T_p = (a+c) \cdot m$$

$$T_{\square} = (a+c) \cdot m$$

Az $(a; f(a))$ és $(b; f(b))$ pontokra

illeszkedő elsőfokú Lagrange polinom:

$$p(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

$p(a) = f(a)$ és $p(b) = f(b)$ miatt ez az interpoláló polinom

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \left(f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a} \right) dx \\ &= \left[f(a) \frac{(x-b)^2}{2(a-b)} + f(b) \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} \right]_a^b \\ &= \frac{f(b) \cdot (b-a)}{2} - \frac{f(a) \cdot (a-b)}{2} = \frac{b-a}{2} (f(b) + f(a)) \end{aligned}$$

A Lagrange polinom hibája: az $x_1 = a$ és $x_2 = b$ alappontok esetén:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_2}{2!} |(x-a)(x-b)|$$

Az integrál közelítésénél elkövetett hiba becslése:

Az integrál közelítésénél elővetett hiba becslése:

$$\int_a^b \underbrace{(x-a)(x-b)}_{x^2 - x(a+b) + ab} dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(a+b) + abx \right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{b^2}{2}(a+b) + ab^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}(a+b) - a^2b$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{a+b}{2}(b^2 - a^2) + ab(b-a) = (b-a) \left[\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2 - ab - \frac{1}{2}b^2 + ab \right]$$

$$= (b-a) \left[-\frac{1}{6}b^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{1}{6}a^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

Az egyszerű trapézformula hibája: $\frac{M_2}{12} (b-a)^3$

ÖSSZETETT TRAPÉZFORMULA (ekvidisztans alappontok esetén)

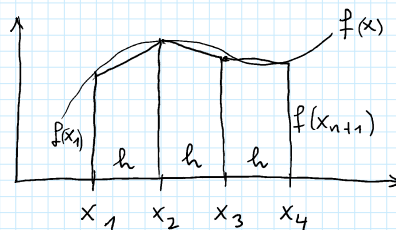
Az $[a, b]$ intervallumot felosztjuk n egyenlő részre:

$$a = x_1 < x_2 = x_1 + h < x_3 = x_2 + h < \dots < x_{n+1} = b$$

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{a lépéshossz,} \quad x_i = x_1 + (i-1)h$$

az i -edik pont

$$T_n(f) = \frac{h}{2} \left(f(x_1) + 2 \sum_{k=2}^n f(x_k) + f(x_{n+1}) \right)$$



A közelítés hibája:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| \leq \frac{M_2}{12} \cdot h^3 \cdot n = \frac{M_2}{12} \frac{(b-a)^3}{n^3} \cdot n = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

ÖSSZETETT SIMPSON FORMULA

Az $[a, b]$ intervallumot páros sok részintervallumra bontjuk.

Hárompontosként parabola illesztünk és a parabolák alatti területeket összeadjuk.



$$S_n(f) = \frac{h}{3} \left(f(x_1) + 4 \sum_{\substack{k \text{ páros} \\ k \geq 2}} f(x_k) + 2 \sum_{\substack{k \text{ páratlan} \\ k \geq 3}} f(x_k) + f(x_{n+1}) \right)$$

A közeli és távoli:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \right| \leq \frac{M_4 (b-a)^5}{180 n^4}, \text{ ahol } |f^{(4)}(x)| \leq M_4, \text{ ha } x \in [a; b]$$

UTÓLAGOS HIBABECSLÉS

n és $2n$ esetén is bizonyítható az integrál korlátosát

Ha a két eredmény eltérése ε , akkor a $2n$ -es tartomány közeli két ε ponton áthaladunk el.

TÉTEL a) Ha f'' előjele állandó, akkor

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_{2n}(f) \right| \leq |T_n(f) - T_{2n}(f)|$$

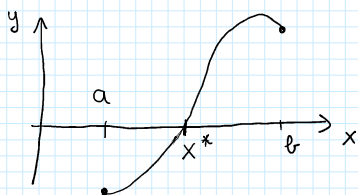
b) Ha $f^{(4)}$ előjele állandó, akkor

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_{2n}(f) \right| \leq |S_n(f) - S_{2n}(f)|$$

NEMLINEÁRIS EGYENLETEK MEGOLDÁSA

Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását keressük, ahol $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egyváltozós, valós, folytonos függvény az $[a; b]$ intervallumon.

Ha $f(a)$ és $f(b)$ előjele különbözik, akkor létezik megoldás a $f(x) = 0$ egyenletnek.



x^* az $f(x) = 0$ egyenlet pontos megoldás

Cél: az x^* -hoz konvergáló x_p sorozat leírása

1) INTERVALLUMFELEZŐ ELJÁRÁS

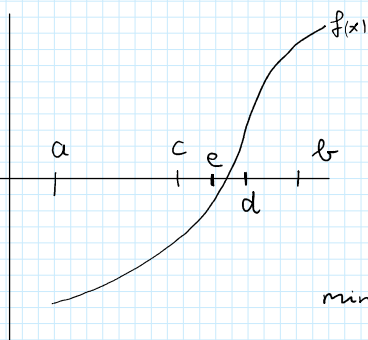
Tegyük fel, hogy f folytonos az $[a; b]$ intervallumon és $f(a) \cdot f(b) < 0$

Leggen $C = \frac{a+b}{2}$

Ha $f(a) \cdot f(c) < 0 \Rightarrow [a; c] - n$

Ha $f(c)f(b) < 0 \Rightarrow [c; b] - n$

folgtatjuk a keresést



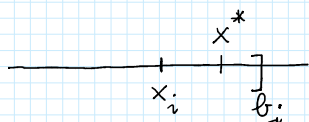
Kapunké egy egyenlő hosszúságú intervallum
sorozatot:

$$[a; b] = [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_k; b_k]$$

mindegyik intervallum tartalmára x^* -ot

A x^* -hoz közeledő sorozat i -edik eleme: $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$

Az x_i sorozatlem bubája: $|x^* - x_i| \leq \frac{b_i - a_i}{2} = \frac{b-a}{2^i}$



A módszer előnye: a konvergenciának enyhe az előfeltétele
 a hiba becsülő képlettel előre megmondható hány lépés szükséges a kívánt pontossághoz közelítés eléréséhez
 hátránya: lassú

PÉLDA $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ zérushelye az $[1; 2]$ intervallumon

FIBONACCI 1225-ben: $x \approx 1,368808107$

f folytonos $\mathbb{R}$ -en. $f(1) = -7$; $f(2) = 16$ ellentétes az előjel!

0,02 pontossággal adjuk meg az eredményt!

Hány lépésre van szükség? $|x^* - x_k| \leq \frac{b-a}{2^k} = \frac{2-1}{2^k} \leq 0,02$

$$\frac{1}{2^k} \leq \frac{2}{100} \rightarrow 2^k \geq 50 \rightarrow \lg 2^k \geq \lg 50 \rightarrow k \geq \frac{\lg 50}{\lg 2}$$

$k = 6$ esetén teljesül először

k	$\ominus$ a_k	$\oplus$ b_k	x_k	$f(x_k)$ előjele
1	1	2	1,5	+
2	1	1,5	1,25	-
3	1,25	1,5	1,375	+
4	1,25	1,375	1,3125	-
5	1,3125	1,375	1,34375	-
6	1,34375	1,375	1,359375 = x_6	a kívánt pontossághoz közelítés