Numerikus módszerek
Bevezetés a numerikus módszerekbe

Előadás jegyzet – 2020. november 24.

készítette: dr. Nagy Noémi

Közönséges differenciálegyenletek

Egy ismeretlen egyváltozós $y(x)$ függvényt keresünk, egy olyan egyenlet alapján, melyben az x változó az y függvény és az $y', y'', \dots, y^{(n)}$ deriváltak fordulhatnak elő.

Példa: $y' = \cos x$. Mivel $\int \cos x \, \mathrm{d}x = y = \sin x + c$ végtelen sok megoldást adna attól függően, hogy c milyen értéket vesz fel.
Azonban ha van kezdeti érték feltétel is, mint például $y(\pi) = 1$, akkor $\sin \pi + c = 1$, azaz $c = 1$, ami miatt az egyenlet megoldása: $y(x) = \sin x + 1$.

Tehát általánosan a differenciálegyenlet megoldása nem egyértelmű. Ahányad rendű differenciálegyenletről beszélünk, annyiféle konstans jelenik meg a megoldásban. Ezért partikuláris megoldást keresünk, azaz egy adott ponton átmenő megoldást. Ez azt jelenti, hogy kezdeti érték feltétel is megadásra kerül.

Példa (Az információ terjedésének modellezése): Tegyük fel, hogy egy új információt ismerők aránya (valószínűsége) y. A hír terjedéséhez a hírt nem ismerő emberekkel kell találkozni. Ezek aránya $1 - y$.
A találkozás valószínűsége: $y(1 - y)$.
A sikeres információátadás egy pozitív α szorzóval jellemezhető.
Minél több idő áll rendelkezésre, annál elterjedtebbnek vehetjük a hírt (a Δt idővel mondjuk lineárisan).
Ha a t időpontban $y(t)$ a hírt ismerők aránya, akkor a $t + \Delta t$ időpontban:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \, \alpha \, y(t) \, (1 - y(t)).$$

Némiképp átrendezve ez:

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \alpha \, y(t) \, (1 - y(t)).$$

Ha vesszük a $\lim_{\Delta t \to 0}$ határértéket, az egyenlet a következő alakba írható át:

$$y'(t) = \alpha \, y(t) \, (1 - y(t)).$$

Röviden

$$y' = \alpha \, y \, (1 - y).$$

Az egyenlet egzakt megoldása:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha\, y\,(1-y)$$

$$\frac{1}{y\,(1-y)}\mathrm{d}y = \alpha\,\mathrm{d}t$$

Mindkét oldal integrálját véve:

$$\int \frac{1}{y\,(1-y)}\mathrm{d}y = \int \alpha\,\mathrm{d}t,$$

melyből

$$\frac{1}{y\,(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

miatt kapjuk, hogy

$$\ln|y| - \ln|1-y| = \alpha t + c.$$

Tovább alakítva:

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \alpha\, t + c,$$

Minkét oldalt e kitevőjeként beírva:

$$\frac{y}{1-y} = \mathrm{e}^{\alpha\, t + c} = c_2\,\mathrm{e}^{\alpha\, t}.$$

Ezt tovább számolva:

$$\frac{1-y}{y} = \frac{1}{c_2\,\mathrm{e}^{\alpha\, t}}$$

$$\frac{1}{y} - 1 = \frac{1}{c_2\,\mathrm{e}^{\alpha\, t}}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{c_2\,\mathrm{e}^{\alpha\, t}} + 1 = c^*\mathrm{e}^{-\alpha\, t} + 1$$

$$y = \frac{1}{c^*\mathrm{e}^{-\alpha\, t} + 1} = \frac{1}{1 + c^*\mathrm{e}^{-\alpha\, t}}.$$

Kezdeti érték feltétel: 0 időpontban.

Ha adott $y(0)$ kezdeti érték, akkor az általános megoldásból a c^* kifejezhető:

$$y(0) = \frac{1}{1 + c^*\mathrm{e}^{-\alpha\, 0}} = \frac{1}{1 + c^*}.$$

Eszerint

$$c^* = \frac{1}{y(0)} - 1.$$

Tétel: Az $y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$ kezdeti érték feladat egyértelműen megoldható, ha

a) f folytonos az első változójában

b) f eleget tesz a Lipschitz feltételnek a második változójában, azaz

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$$

valamely L konstanssal.

A példa feladat esetén $f(t, y) = \alpha\, y\,(1-y)$, melyre

a) teljesül

b) $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |\alpha\, y_1\,(1-y_1) - \alpha\, y_2\,(1-y_2)| = |\alpha\, y_1 - \alpha y_1^2 - \alpha\, y_2 + \alpha y_2^2| = |\alpha\,(y_1 - y_1^2 - y_2 + y_2^2)| = \alpha\,|(y_1-y_2) - (y_1^2 - y_2^2)| = \alpha\,|(y_1-y_2) - (y_1-y_2)(y_1+y_2)| = \alpha\,|(y_1-y_2)(1-(y_1+y_2))| \leq \alpha\,|y_1-y_2| \cdot |1-y_1-y_2|$.
Mivel $y_1, y_2 \in [0,1]$, hiszen valószínűségek, ezért $|1-y_1-y_2| \leq 1$.
Ezért $\alpha\,|y_1-y_2| \cdot |1-y_1-y_2| \leq \alpha\,|y_1-y_2|$.

Differenciálegyenletek közelítő megoldása

$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$.
Cél: az $x_0 + h$ pontban az y függvényérték becslése (h nem nagy).

1. Taylor módszer (hatványsorok módszere)

$$y(x+h) \approx y(x) + h\,y'(x) + \frac{1}{2}h^2\,y''(x) + \frac{1}{3!}h^3\,y'''(x) + \ldots + \frac{1}{n!}h^n\,y^{(n)}(x)$$

Példa: $y' = -xy^2$ ($y'(x) = -xy^2(x)$) és $y(0) = 2$. Ennek ismeretében határozzuk meg $y(0.1)$ értékét!

Megoldás: Ahhoz, hogy $y(0.1)$ értékét közelítsük, először is meghatározzuk a h-t: $0.1 - 0 = 0.1$. Tehát $h = 0.1$.
A Taylor módszer szerint, ha legalább az első négy taggal szeretnénk közelíteni $y(0.1)$ értékét, akkor meg kell határoznunk y első három deriváltját, melyből az első a feladat megadásakor meg lett adva. Így mindössze a második és harmadik deriváltat kell kiszámolnunk:
$y'' = \left(-xy^2\right)' = -y^2 - x\,2y\,y' = -y^2 - x\,2y\left(-xy^2\right) = -y^2 + 2x^2\,y^3$
$y''' = \left(-y^2 + 2x^2\,y^3\right)' = -2y\,y' + 4x\,y^3 + 2x^2\,3y^2\,y' = -2y\left(-xy^2\right) + 4x\,y^3 + 2x^2\,3y^2\left(-xy^2\right) = 2xy^3 + 4x\,y^3 - 6x^3\,y^4 = 6xy^3 - 6x^3\,y^4$
Ezeket figyelembe véve
$y(0) = 2$
$y'(0) = -0\,y^2(0) = 0$
$y''(0) = -y^2(0) + 2 \cdot 0^2\,y^3(0) = -y^2(0) = -2^2 = -4$
$y'''(0) = 6 \cdot 0\,y^3(0) - 6 \cdot 0^3\,y^4(0) = 0$
A kapott értékeket visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$y(0.1) \approx 2 + 0.1 \cdot 0 + \frac{1}{2}0.1^2 \cdot (-4) + \frac{1}{6}0.1^3 \cdot 0 = 2 + \frac{0.1^2(-4)}{2} = 1.98$$

Ehhez képest a pontos megoldás (mivel tudjuk, hogy $y = \frac{2}{1+x^2}$):

$$y(0.1) = \frac{2}{1+0.1^2} = \frac{2}{1.01} = 1.9802.$$

Általában azonban nem tudhatjuk, hogy mennyire dolgoztunk jól.

2. Euler módszer (érintők módszere)

Felhasználjuk, hogy tg$\alpha = \frac{d}{h}$, melyből $d =$ tg$\alpha \cdot h$ adódik. Egyúttal a tangens függvény definíció szerint az x_0 pontbeli érintő meredekségét, és így deriváltját is megadja: tg$\alpha = y'(x_0)$. A kettő együttesen azt mutatja, hogy
$d = h \cdot y'(x_0)$ és mivel $y' = f(x, y(x))$, ezért $d = h \cdot f(x_0, y(x_0))$.
Az $y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + d = y_0 + h \cdot f(x_0, y(x_0))$, melyet ha iterálunk:
$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y(x_n))$, ahol $y(x_n) = y_n$.
Az x_n az x_0-tól nh távolságra van, azaz $x_n = x_0 + nh$

Példa: $y' = 3x + y^2,\ y(0) = 1,\ h = 0.05,\ y(0.1) =?$

Megoldás: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ értékek leolvashatók.
$y_1 = y(0.05) = 1 + 0.05 \cdot (3 \cdot 0 + 1^2) = 1.05$
$y_2 = y(0.1) = 1.05 + 0.05 \cdot (3 \cdot 0.05 + 1.05^2) = 1.112625$
A sort bármeddig tudnánk folytatni.

3. Runge-Kutta típusú módszerek

$r = 1$-rendű eset: maga az Euler-módszer
$\vdots$
$r = 4$-edrendű eset képlete: $y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, ahol
$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0)$
$k_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$
$k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$
$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3)$

Példa: $y' = 3x + y^2,\ y(0) = 1,\ h = 0.1,\ y(0.1) =?$

Megoldás: A képletek szerint
$k_1 = 0.1 \cdot (3 \cdot 0 + 1^2) = 0.1$
$k_2 = 0.1 \cdot f(0.05, 1 + \frac{0.1}{2}) = 0.1 \cdot f(0.05, 1.05) = 0.1 \cdot (3 \cdot 0.05 + 1.05^2) = 0.12525$
$k_3 = 0.1 \cdot f(0.05, 1 + \frac{0.12525}{2}) = 0.1 \cdot f(0.05, 1.062625) = 0.1 \cdot (3 \cdot 0.05 + 1.062625^2) = 0.12792$
$k_4 = 0.1 \cdot f(0.1, 1.12792) = 0.1 \cdot (3 \cdot 0.1 + 1.12792^2) = 0.15722$ A $k_1, \ldots, k_4$ értékeket felhasználva azt látjuk, hogy $y_1 = y(0.1) = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 2 \cdot 0.12525 + 2 \cdot 0.12792 + 0.15722) = 1.12726$