

OPTIMALIZÁLÁS

KÉSZÍTETTE: DR. NAGY NOÉMI

1. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA PIVOTÁLÁSSAL

Az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer pivotálással történő megoldása során az egyenletrendszert táblázatos formába rendezzük és minden egyes egyenlethez hozzárendelünk egy-egy e_i -t (bázis). Így a táblázatunk felső sorában az x_i ismeretlenek, az első oszlopban pedig az e_i -k fognak szerepelni.

A módszer során báziscseréket fogunk alkalmazni. A báziscsere a következő lépésekből áll:

- a pivotelem (p) kiválasztása (nem nulla érték)
- a pivotelem helyére a reciprokét írjuk ($1/p$)
- a pivotelem sorában osztunk p -vel
- a pivotelem oszlopában $-p$ -vel osztunk
- a többi elem helyén a téglalapszabályt alkalmazzuk: x helyére $x - \frac{a \cdot b}{p}$ kerül, ahol a a pivotelem sorának és x oszlopának metszetében lévő elem, b pedig a pivotelem oszlopának és x sorának metszetében lévő elem.

Az algoritmust addig folytatjuk, amíg már több e_i -t nem tudunk az első oszlopból kivinni.

Megjegyezzük, hogy amennyiben kézzel oldjuk meg a feladatot, érdemes 1-et vagy -1 -et választani pivotelemnek, mivel így a következő pivottáblában sem fog tört megjelenni.

1.1. Példa. Adott az alábbi $Ax = b$ egyenletrendszer. Oldjuk meg az egyenletrendszert pivotálással, valamint határozzuk meg az együtthatómátrix determinánsát és inverzét!

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 0x_3 &= -5 \\ -10x_1 + 5x_2 - x_3 &= -23 \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Megoldás. Első lépésként írjuk át az egyenletrendszert mátrixos alakba:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -10 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -23 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ezt követően készítsük el az induló pivottáblánkat:

	x_1	x_2	x_3	b
e_1	-2	1	0	-5
e_2	-10	5	-1	-23
e_3	0	1	-2	5

1

Legyen az első pivotelemünk az $e_3 - x_2$ metszetében lévő elem (1) és a báziscsere után írjuk be ennek reciprokát:

	x_1	e_3	x_3	b
e_1				
e_2				
x_2		1/1		

A sorában a pivotelemmel, az oszlopában a (-1) -szeresével osztunk:

	x_1	e_3	x_3	b		x_1	e_3	x_3	b
e_1		1/(-1)			$\Rightarrow$	e_1	-1		
e_2		5/(-1)				e_2	-5		
x_2	0/1	1	-2/1	5/1		x_2	0	1	5

Majd a többi értéket számoljuk ki a "téglalapszabály" segítségével:

	x_1	e_3	x_3	b		x_1	e_3	x_3	b
e_1	$2 - \frac{0 \cdot 1}{1}$	-1	$0 - \frac{-2 \cdot 1}{1}$	$-5 - \frac{5 \cdot 1}{1}$	$\Rightarrow$	e_1	-2	-1	-10
e_2	$-10 - \frac{0 \cdot 5}{1}$	-5	$-1 - \frac{-2 \cdot 5}{1}$	$-23 - \frac{5 \cdot 5}{1}$		e_2	-10	-5	-48
x_2	0	1	-2	5		x_2	0	1	5

Majd újabb pivotelemet választunk. Azonban most már figyelniünk kell, hogy a pivotelem csak e_i sorából és x_j oszlopokból választható.

Megjegyezzük továbbá, hogy amennyiben az együtthatómátrix inverzét nem kérné a feladat, az e_i oszlopot törölhetnénk is.

Legyen a következő pivotelem az $e_1 - x_3$ metszetében álló 2:

	x_1	e_3	e_1	b		x_1	e_3	e_1	b
x_3			1/2		$\Rightarrow$	x_3	-2/2	-1/2	1/2
e_2						e_2		9/(-2)	
x_2						x_2		-2/(-2)	

	x_1	e_3	e_1	b
x_3	-1	-1/2	1/2	-5
e_2			-9/2	
x_2			1	

A többi értéket a "téglalapszabály" segítségével számoljuk:

	x_1	e_3	e_1	b		x_1	e_3	e_1	b
x_3	-1	-1/2	1/2	-5	$\Rightarrow$	x_3	-1	-1/2	1/2
e_2	$-10 - \frac{9 \cdot (-2)}{2}$	$-5 - \frac{9 \cdot (-1)}{2}$	-9/2	$-48 - \frac{9 \cdot (-10)}{2}$		e_2	-1	-1/2	-9/2
x_2	$0 - \frac{(-2) \cdot (-2)}{2}$	$1 - \frac{(-1) \cdot (-2)}{2}$	1	$5 - \frac{(-10) \cdot (-2)}{2}$		x_2	-2	0	1

Az utolsó pivotelemünk az $e_2 - x_1$ metszetében található: -1

$$\begin{array}{c|ccc|c} & e_2 & e_3 & e_1 & b \\ \hline x_3 & & & & \\ x_1 & 1/(-1) & & & \\ x_2 & & & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & e_2 & e_3 & e_1 & b \\ \hline x_3 & (-1)/1 & & & \\ x_1 & -1 & (-1/2)/(-1) & (-9/2)/(-1) & (-3)/(-1) \\ x_2 & (-2)/1 & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & e_2 & e_3 & e_1 & b \\ \hline x_3 & -1 & \frac{-1}{2} - \frac{(-1) \cdot (-1/2)}{-1} & \frac{1}{2} - \frac{(-1) \cdot (-9/2)}{-1} & -5 - \frac{(-1) \cdot (-3)}{-1} \\ x_1 & -1 & 1/2 & 9/2 & 3 \\ x_2 & -2 & 0 - \frac{(-2) \cdot (-1/2)}{-1} & 1 - \frac{(-2) \cdot (-9/2)}{-1} & -5 - \frac{(-2) \cdot (-3)}{-1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & e_2 & e_3 & e_1 & b \\ \hline x_3 & -1 & 0 & 5 & -2 \\ x_1 & -1 & 1/2 & 9/2 & 3 \\ x_2 & -2 & 1 & 10 & 1 \end{array}$$

Miután a bázis már "tele van" x -ekkel, eljutottunk a megoldáshoz, már csak annyi dolgunk van, hogy leolvassuk azt:

A megoldást az első és utolsó oszlopból olvashatjuk le:

$$\begin{array}{c|cc} & \dots & b \\ \hline x_3 & \dots & -2 \\ x_1 & \dots & 3 \\ x_2 & \dots & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{array}$$

Az együtthatómátrix determinánsa a következő képlettel adódik:

$$\det(A) = \text{pivotelemek szorzata} \cdot (-1)^{\text{cserék száma}}$$

A cserék száma úgy értendő, hogy megnézzük az utolsó kapott táblában az indexet az első sorban (2, 3, 1) vagy első oszlopban (3, 1, 2) és megszámláljuk, hogy hány szomszédos elem cseréjével tudjuk ezeket sorba rakni, azaz (1, 2, 3) sorrendbe rendezni.

Pl: (2, 3, 1) $\rightarrow$ (2, 1, 3) $\rightarrow$ (1, 2, 3) két cserét jelent.

Ugyanígy a (3, 1, 2) $\rightarrow$ (1, 3, 2) $\rightarrow$ (1, 2, 3) szintén két csere.

Tehát az együtthatómátrix determinánsa: $\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1)^2 = -2$.

A mátrix inverzének meghatározásához az utolsó pivottábla sorait és oszlopait kell rendezni (e_1 , e_2 , e_3 és x_1 , x_2 , x_3 a megfelelő sorrendbe tételével):

$$\begin{array}{c|ccc} & e_2 & e_3 & e_1 \\ \hline x_3 & -1 & 0 & 5 \\ x_1 & -1 & 1/2 & 9/2 \\ x_2 & -2 & 1 & 10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline x_1 & 9/2 & -1 & 1/2 \\ x_2 & 10 & -2 & 1 \\ x_3 & 5 & -1 & 0 \end{array}$$

Tehát az A mátrix inverze:

$$\text{inv}(A) = A^{-1} = \begin{bmatrix} 9/2 & -1 & 1/2 \\ 10 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Akár egy egyszerű szorzással ellenőrizhetnénk is, hogy a kapott mátrix tényleg A inverze-e (hiszen $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$), de ezt most mellőzzük.

1.2. **Példa.** Pivotálással határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer bázismegoldásait!

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = -2$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$-4x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 8$$

Megoldás. A bázismegoldások valójában azt jelentik, hogy minden lehetséges változatban be kell vinnünk az ismeretlenjeinket a bázisba. Azonban első fázisban elegendő, ha egy bázismegoldáshoz eljutunk (amennyi x -et csak tudunk, beviszünk a bázisba), majd ennek segítségével (ezt továbbszámolva) tudjuk a további bázismegoldásainkat meghatározni.

Mivel látjuk, hogy a feladat mindössze a bázismegoldásokat kéri, ezért majd amint kikerült a bázisból valamelyik e_i , annak oszlopát elhagyhatjuk.

A feladat megoldásához először készítsük el a pivottáblánkat és töltsük fel a megfelelő értékekkel:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
e_1	2	5	-1	3	-2
e_2	-1	2	1	0	3
e_3	-4	-1	3	-3	8

Legyen a pivotelemünk a táblázat egyetlen egyese ($e_2 - x_3$ metszete) és számoljuk ki a következő táblát (a lépéseit most már nem írom le részletesen):

	x_1	x_2	e_2	x_4	b
e_1	1	7	1	3	1
x_3	-1	2	1	0	3
e_3	-1	-7	-3	-3	-1

Ahogy az előjáróban felvázoltuk, elhagyhatjuk e_2 oszlopát és tovább számolhatunk a következő pivotelemmel (mondjuk az $e_1 - x_1$ metszetében lévő 1-gyel):

	x_1	x_2	x_4	b			e_1	x_2	x_4	b
e_1	1	7	3	1	$\Rightarrow$	x_1	1	7	3	1
x_3	-1	2	0	3		x_3	1	9	3	4
e_3	-1	-7	-3	-1		e_3	1	0	0	0

Ismét elhagyjuk az e_1 oszlopát és azt látjuk, hogy az e_3 sorában kizárólag 0 értékek szerepelnek.

	x_2	x_4	b
x_1	7	3	1
x_3	9	3	4
e_3	0	0	0

Ez azt jelenti, hogy ha visszaírnánk az utolsó egyenletet, akkor az a következőképpen nézne ki: $0x_2 + 0x_4 = 0$, azaz $0 = 0$. Tehát az utolsó sor is elhagyható:

	x_2	x_4	b
x_1	7	3	1
x_3	9	3	4

Megjegyezzük, hogy amennyiben valamelyik sorban azt látjuk, hogy az x -ek oszlopaiban 0, b oszlopában pedig 0-tól különböző érték szerepelne, akkor az azt jelenti, hogy az egyenletrendszer ellentmondásos, így nincs megoldása.

Azonban ez a helyzet itt nem áll fenn, leolvasható az egyenletrendszer egyik bázismegoldása: Amennyiben valamelyik változó a bázisban szerepel, annak értéke a b oszlopában látható, amennyiben a bázison kívül szerepel, az értéke 0 lesz.

Ez tehát az első esetben azt jelenti, hogy az első bázismegoldásunk:

	x_2	x_4	b	
x_1	7	3	1	$x_1 = 1$
x_3	9	3	4	$x_2 = 0$
				$x_3 = 4$
				$x_4 = 0$

A további bázismegoldások száma a következő képlettel határozható meg:

$$\binom{\text{bázisban szereplő elemek száma}}{\text{ismeretlenek száma}}$$

Jelen esetben ez $\binom{4}{2} = 6$. A bázismegoldások úgy kaphatók meg, hogy a fenti táblázat minden elemét pivotelemnek választjuk (ez 4 új táblát jelent), az utolsó elem pedig az lesz, ahol x_2 -t és x_4 -et írjuk a bázisba.

- $x_1 - x_2$ cseréje:

	x_1	x_4	b	
x_2	1/7	3/7	1/7	$x_1 = 0$
x_3	-9/7	-6/7	19/7	$x_2 = 1/7$
				$x_3 = 19/7$
				$x_4 = 0$

- $x_1 - x_4$ cseréje:

	x_2	x_1	b	
x_4	7/3	1/3	1/3	$x_1 = 0$
x_3	2	-1	3	$x_2 = 0$
				$x_3 = 3$
				$x_4 = 1/3$

- $x_3 - x_2$ cseréje:

	x_3	x_4	b	
x_1	-7/9	6/9	-19/9	$x_1 = -19/9$
x_2	1/9	3/9	4/9	$x_2 = 4/9$
				$x_3 = 0$
				$x_4 = 0$

- $x_3 - x_4$ cseréje:

	x_2	x_3	b	$x_1 = -3$
x_1	-2	-1	-3	$x_2 = 0$
x_4	3	$1/3$	$4/3$	$x_3 = 0$
				$x_4 = 4/3$

- utolsó tábla (pl az előző táblában az $x_1 - x_2$ cseréjével):

	x_1	x_3	b	$x_1 = 0$
x_2	$-1/2$	$1/2$	$3/2$	$x_2 = 3/2$
x_4	$3/2$	$-7/6$	$-19/6$	$x_3 = 0$
				$x_4 = -19/6$

Leellenőrizhető, hogy ezek mind megoldásai a feladatban szereplő egyenletrendszernek.

2. ÁLTALÁNOS ALAKÚ LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT STANDARD ALAKÚRA HOZÁSA

A lineáris programozási feladat során bizonyos lineáris feltételek teljesülése mellett kell egy lineáris függvény szélsőértékét (minimumát vagy maximumát) meghatároznunk, azaz megtalálnunk azokat az x_i ismeretleneket, melyek eleget tesznek a feltételeknek és eközben a célfüggvény felveszi - a feladat típusától függően - a maximumát vagy minimumát.

Egy általános alakú lineáris programozási feladat a következőképpen néz ki:

- a feltételeink lineáris egyenlőtlenségek, azaz " $\leq$ ", " $\geq$ " vagy " $=$ " állhat a két oldal között, egyéb megkötés nincs
- az ismeretlenekre nem feltétlenül van korlátozó feltétel (esetleg pozitívnak vagy negatívnak írjuk elő őket)
- a célfüggvényünk maximumát és minimumát is kereshetjük.

Ez sajnálatos módon megnehezíti az optimális érték meghatározását, ezért ha ilyen feladattal találkozunk, érdemes elsőként a feladatot standardizálni (standard alakra hozni).

A standard alakú lineáris programozási feladat a következőképpen néz ki:

- $A \cdot x = b$ ($b \geq 0$)
- $x \geq 0$
- $c^T x \rightarrow \max$

Ezek a feltételek már jóval áttekinthetőbbé teszik a feladatot és ebben az alakban már a megoldásuk is könnyebb (a módszert maga később kerül ismertetésre).

A standard alakra hozás lépéseit a következő példa során írjuk le:

2.1. Példa. Hozza standard alakúra a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned}
 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 2 \\
 -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -5 \\
 x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq -3 \\
 x_1 \leq 0, \quad x_2 &\text{ előjelkötetlen}, \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

Megoldás. Amint látjuk, a feladat nem standard alakú, hiszen a feltételeink némelyike nem egyenlőség, az egyenletek és egyenlőtlenségek jobboldalán helyenként negatív értéket látunk, az x -ekre vonatkozó előírások sem mindig " ≥ 0 "-k, valamint a célfüggvény minimumát keressük.

- Az első lépésben azokat az egyenleteket szorozzuk (-1) -gyel, ahol a jobboldalon negatív értékek szerepelnek. Ugyanezt tesszük a célfüggvénnyel is, ha annak minimumát keressük:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 3 \\ x_1 &\leq 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_3 \geq 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

- A következő lépésben az ismeretleneket vesszük kezelésbe:

Amennyiben valamelyik x_i ismeretlenre az a feltétel, hogy " ≤ 0 ", ott bevezetünk egy $\bar{x}_i = -x_i$ változót, mely már ≥ 0 ,

valamint ha valamely x_j értékre nincs feltételünk, azaz előjelkötetlen, két új változót (x'_j, x''_j) vezetünk be és x_j helyére az $x'_j - x''_j$ kifejezést írjuk, ahol $x'_j, x''_j \geq 0$, hiszen bármely szám előállítható két pozitív szám különbségeként.

Itt most az első és második változó helyett kell új változókat bevezetnünk: $\bar{x}_1 = -x_1, \quad x_2 = x'_2 - x''_2$

$$\begin{aligned} 5(-\bar{x}_1) + 2(x'_2 - x''_2) + 3x_3 &\geq 2 \\ -\bar{x}_1 - 5(x'_2 - x''_2) - 2x_3 &= 5 \\ -(-\bar{x}_1) + 2(x'_2 - x''_2) - x_3 &\leq 3 \\ \bar{x}_1, x'_2, x''_2, x_3 &\geq 0 \\ -2(-\bar{x}_1) + 2(x'_2 - x''_2) - x_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

A zárójelek felbontása után:

$$\begin{aligned} -5\bar{x}_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + 3x_3 &\geq 2 \\ -\bar{x}_1 - 5x'_2 + 5x''_2 - 2x_3 &= 5 \\ \bar{x}_1 + 2(x'_2 - 2x''_2) - x_3 &\leq 3 \\ \bar{x}_1, x'_2, x''_2, x_3 &\geq 0 \\ 2\bar{x}_1 + 2x'_2 - 2x''_2 - x_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

- Végül a feltételeket kell átalakítanunk, hiszen a standard alakú lineáris programozási feladat feltételei egyenlőségek:

A " $\leq$ " feltételek esetén hozzá kell adnunk egy-egy új ismeretlent: $+u_i$

A " $\geq$ " feltételek esetén ki kell vonnunk egy-egy új ismeretlent: $-v_j$

hogy az egyenlőtlenségeinkből egyenlőségek legyenek. Természetesen az u és v változók nemnegatívak. Így a következő lépésben már a standard alakra hozott lineáris programozási

feladatot látjuk:

$$\begin{aligned} -5\bar{x}_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + 3x_3 - v_1 &= 2 \\ -\bar{x}_1 - 5x'_2 + 5x''_2 - 2x_3 &= 5 \\ \bar{x}_1 + 2(x'_2 - 2x''_2 - x_3 + u_3) &= 3 \\ \bar{x}_1, x'_2, x''_2, x_3, v_1, u_3 &\geq 0 \\ 2\bar{x}_1 + 2x'_2 - 2x''_2 - x_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

3. LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT MEGOLDÁSA SZIMPLEX MÓDSZERREL

Amint az előző rész végén láttuk, a feltételrendszer már lineáris egyenletekből áll, melyet pivotálással könnyen meg tudnánk oldani. Ezzel azonban mindössze az egyenletrendszer bázismegoldásait tudnánk leolvasni, figyelmen kívül hagyva a maximalizálandó függvényt és az ismeretlenekre vonatkozó nemnegativitási feltételeket.

Azonban a megoldást úgy is megkaphatjuk, ha a feltételrendszerünket ábrázolni tudjuk (azaz két ismeretlennel dolgozunk, hiszen az két dimenzióban még ábrázolható).

3.1. Példa. Egy anya kétféle szendvicset készít a gyermeke születésnap bulijára. Egy szalámis szendvicshöz 3 gramm vajra, 3 szelet tojásra és 2 szelet szalámira van szükség. Egy sonkás szendvicshöz 4 gramm vaj, 2 szelet tojás és egy szelet sonka van. A szendvicskészítés során rendelkezésre áll 100 szelet szalámi, 40 szelet sonka, 170 szelet tojás és 220 gramm vaj. Melyik szendviczből hány darabot készítsünk ahhoz, hogy a szendvicsek száma a lehető legtöbb legyen?

Megoldás. A feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 220 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 170 \\ 2x_1 &\leq 100 \\ x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Megoldás grafikusan. Elsőként még nézzük meg, hogyan oldható meg a feladat grafikusan.

Ehhez elsőként ábrázoljuk a feltételeket. A feltételek által meghatározott terület a lehetséges halmaz, amelyen az optimális értéket (jelen esetben a célfüggvény maximumát) keressük.

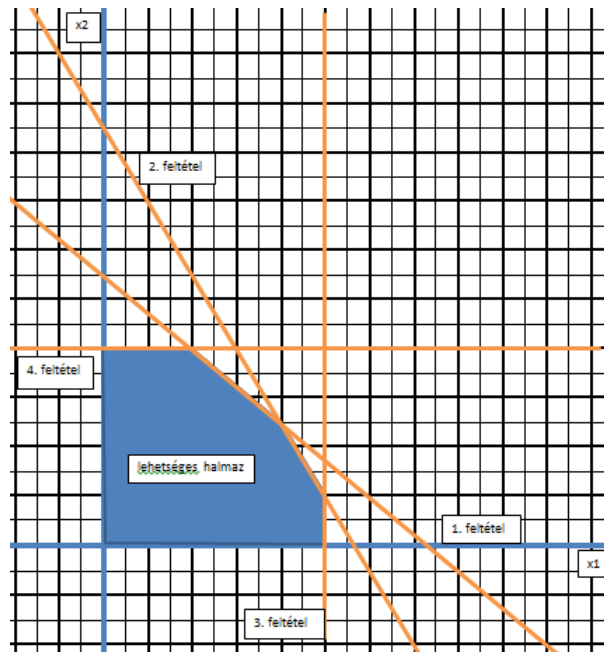
A következő oldalon lévő ábrán 1 négyzetrács 5 egységet jelent és a narancssárga vonalak jelölik a feltételeket határoló egyeneseket. A feltételek által meghatározott területeket kék színnel jelöltük.

A feladat optimális értéke a lehetséges halmaz szélén (valamely csúcspontján vagy valamely határoló szakaszon) található. Ehhez célszerű meghatározni (leolvasni) a csúcspontokat és kiszámítani a célfüggvény értékét az adott csúcspontban.

A másik lehetőség, hogy a célfüggvény együtthatóiból készítünk egy vektort. Ez jelen esetben az $(1, 1)$ vektor lesz. Erre merőleges egyenest állítunk és maximalizálás esetén ezt az úgynevezett "célegyenest" felfelé toljuk a lehetséges halmaz határához, minimalizálás esetén pedig lefelé tolnánk. Ahol

ez az egyenes eléri a lehetséges halmaz határát - függetlenül attól, hogy a feladatban minimalizálunk vagy maximalizálunk -, az érintett pont lesz az optimális megoldás.

Jelen esetben ez körülbelül az $x_1 = 40$, $x_2 = 25$ pontban van (lehet).



Megoldás szimplex módszerrel. A feladat szimplex módszerrel is megoldható. Itt elsőként a teendőnk, hogy a " $\leq$ " feltételeket egyenlősséggé alakítsuk, azaz a baloldalon szereplő értékek mindegyikéhez hozzáadjuk u_i nemnegatív értékeket:

$$3x_1 + 4x_2 + u_1 = 220$$

$$3x_1 + 2x_2 + u_2 = 170$$

$$2x_1 + u_3 = 100$$

$$x_2 + u_4 = 40$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

A korábban leírt pivotáláshoz képest a szimplex módszer annyiban tér el, hogy itt már célfüggvényünk is van:

Ha a célfüggvény maximumot keres, a célfüggvénynek "fenntartott" sorban $-z$, a célfüggvényben szereplő együtthatók, b oszlopába pedig 0 írandó.

Minimumfeladat esetén a célfüggvény sorában z , az együtthatók (-1) -szerese és b oszlopában 0 lesz.

A bevezetett u_i -k rögtön a bázisba kerülhetnek a pivottáblában:

	x_1	x_2	b
u_1	3	4	220
u_2	3	2	170
u_3	2	0	100
u_4	0	1	40
$-z$	1	1	0

A pivotelem választása némiképpen bonyolultabb, mint korábban, ahol mindössze annyi volt a kikötés, hogy $p \neq 0$.

A nemnegatív (!!!) pivotelemet itt az oszlopokból választhatjuk, ahol az z (vagy $-z$) sorában nemnegatív elem van és kiszámoljuk a b oszlop és az aktuális oszlop hányadosát. Ahol az adott oszlopban ez a hányados a legkisebb, ott lehet a pivotelemünk. Minden nemnegatív oszlophoz tartozik egy-egy pivotelem. Ezek közül azzal a pivotellel számolunk, amelyik szimpatikusabb számunkra (például ha van 1 a lehetőségek között, nyilván azzal érdemes továbbszámolni).

	x_1	x_2	b			x_1	x_2	b
u_1	220/3	220/4	220	$\Rightarrow$	u_1	--	--	220
u_2	170/3	170/2	170		u_2	--	--	170
u_3	100/2	--	100		u_3	X	--	100
u_4	--	40/1	40		u_4	--	X	40
$-z$	1	1	0		$-z$	1	1	0

Tehát azt látjuk, hogy az $u_3 - x_1$ metszetében lévő 2 vagy az $u_4 - x_2$ metszetében lévő 1 lehet a pivotelem. Legyen tehát a pivotelem az utóbbi. A korábban tanult pivotálással kapjuk meg a következő pivottáblát:

	x_1	u_4	b
u_1	3	-4	60
u_2	3	-2	90
u_3	2	0	100
x_2	0	1	40
$-z$	1	-1	-40

A következő pivotelem (tekintve, hogy csak az első oszlop utolsó eleme nemnegatív), az első oszlopból kerül ki, ezért itt kiszámoljuk a pozitív értékeknél a hányadosokat és kiválasztjuk közülük a legkisebbet:

	x_1	u_4	b			x_1	u_4	b
u_1	60/3	--	60	$\Rightarrow$	u_1	X	--	60
u_2	90/3	--	90		u_2	--	--	90
u_3	100/2	--	100		u_3	--	--	100
x_2	--	--	40		x_2	--	--	40
$-z$	1	-1	-40		$-z$	1	-1	-40

A következő pivotelem tehát az $u_1 - x_1$ metszetében álló 3:

	u_1	u_4	b
x_1	1/3	-4/3	20
u_2	-1	2	30
u_3	-2/3	8/3	60
x_2	0	1	40
$-z$	-1/3	1/3	-60

Mivel ismét felbukkant az utolsó sorban pozitív elem, ezért újabb pivotelemet választunk.

Az algoritmust addig folytatjuk, amíg az utolsó sorban nem lesz pozitív érték (a b oszlopa ebből a szempontból nem releváns).

	u_1	u_4	b		u_1	u_4	b
x_1	--	--	20	$\Rightarrow$	x_1	--	20
u_2	--	$30/2$	30		u_2	--	X
u_3	--	$60/(8/3)$	60		u_3	--	60
x_2	--	$40/1$	40		x_2	--	40
$-z$	$-1/3$	$1/3$	-60		$-z$	$-1/3$	$1/3$

A következő lépésben tehát az $u_2 - u_4$ metszetében lévő 2 lesz a pivotelemünk:

	u_1	u_2	b
x_1	$-1/3$	$2/3$	40
u_4	$-1/2$	$1/2$	15
u_3	$2/3$	$-4/3$	20
x_2	$1/2$	$-1/2$	25
$-z$	$-1/6$	$-1/6$	-65

Amint látjuk a z sorából, ez már az optimális tábla, melynek értékei a korábban tanult módon leolvashatók: az első és utolsó oszlopban szereplő értékeket kell összevetni.

Figyelni kell arra, hogy amennyiben a bázisban valamely x_i érték nem szerepel, annak értéke 0 lesz.

A feladat megoldása tehát: $x_1 = 40$, $x_2 = 25$ és a célfüggvény értéke a $-z = -65$ alapján $z = 65$.

4. LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT MEGOLDÁSA KÉTFÁZISÚ SZIMPLEX MÓDSZERREL

4.1. Példa. Valaki egy diéta során a vas és C-vitamin szükségletét citromból és almából kívánja fedezni. A napi C-vitamin szükséglet legalább 500 egység, és minimum 1.2 mg vasra van szüksége a szervezetének. 100 gramm citrom 300 egység C-vitamuint és 0.2 mg vasat tartalmaz. 100 gramm almában 100 egység C-vitamin és 0.5 mg vas van. Az illető ezekből legfeljebb 400 kalóriát szeretne bevinni. 100 gramm citromban 50 kalória van, 100 gramm almában pedig 80. A zöldségesnél 1 kg citrom 600 forintba kerül, 1 kg alma pedig 400 forintba. Melyikből mennyit vásároljon, ha nem akarja az előírt kalóriát túllépni és a kiadást minimalizálni szeretné?

Megoldás. A feladat matematikai modellje:

$$0.2x_1 + 0.5x_2 \geq 1.2$$

$$300x_1 + 100x_2 \geq 500$$

$$50x_1 + 80x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

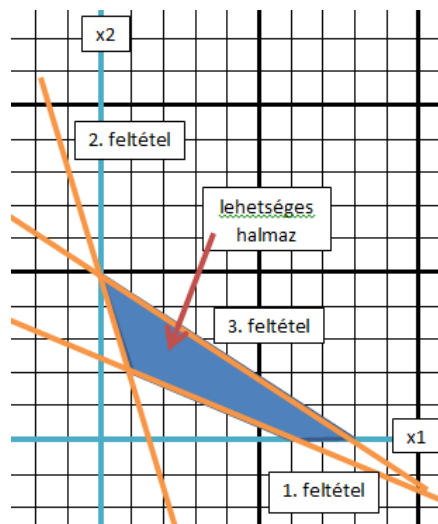
$$50x_1 + 40x_2 \rightarrow \min$$

A számolás megkönnyítése érdekében a feltételeket egyszerűsíthetjük (pl. az első feltételt végigsorozhatjuk 10-zel, a másodikat oszthatjuk 100-zal, a harmadikat pedig 10-zel). Ezzel a feltételrendszer nem változik, de az egyszerűsítés hatására a számolás során valamivel könnyebb dolgunk lesz:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\geq 12 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 5 \\ 5x_1 + 8x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ 50x_1 + 40x_2 &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Megoldás grafikusán. Az alábbi ábrán 1 rács 1 egységet jelöl.

A feltételek által meghatározott közös részt kékkel jelöljük, majd a célfüggvényből készítünk egy vektort (50,40) és az erre merőleges célfüggvény egyenest lefelé toljuk a lehetséges halmaz határához. Amennyiben az ábránk kellően pontos, leolvashatjuk az optimális megoldást, mely várhatóan az $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ pontban lesz, és értéke $50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 130$.



Megoldás kétfázisú szimplex módszerrel. A feladat megoldásához első lépésben a feltételrendszerből egyenletrendszert kell csinálnunk a következő módon:

- $\leq$ esetén a baloldalhoz u -t adunk
- $=$ esetén a baloldalhoz u^* -ot adunk
- $\geq$ esetén a baloldalhoz $-v + u^*$ -ot adunk

hogy egyenleteket kapjunk (ezekre az új változókra szintén fennáll a nemnegativitási feltétel):

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - v_1 + u_1^* &= 12 \\ 3x_1 + x_2 - v_2 + u_2^* &= 5 \\ 5x_1 + 8x_2 + u_3 &= 40 \\ x_1, x_2, v_1, u_1^*, v_2, u_2^*, u_3 &\geq 0 \\ 50x_1 + 40x_2 &\rightarrow \min \end{aligned}$$

A következő lépésben elkészítjük a pivottáblánkat. Itt a bázisba írjuk az u -kat és u^* -okat, a többi elem a bázison kívül helyezkedik el.

Amennyiben a táblában u^* szerepel, a táblánk egy új sorral, az úgynevezett másodlagos célfüggvény sorával egészül ki, ami az u^* sorok összegeként áll elő.

Mivel a feladat minimalizál, ezért a célfüggvény sorába z kerül és a célfüggvényegyütthatók (-1) -szeresei.

	x_1	x_2	v_1	v_2	b			x_1	x_2	v_1	v_2	b
u_1^*	2	5	-1	0	12	$\Rightarrow$	u_1^*	2	5	-1	0	12
u_2^*	3	1	0	-1	5		u_2^*	3	1	0	-1	5
u_3	5	8	0	0	40		u_3	5	8	0	0	40
z	-50	-40	0	0	0		z	-50	-40	0	0	0
z^*	$2 + 3$	$5 + 1$	$-1 + 0$	$0 + (-1)$	$12 + 5$		z^*	5	6	-1	-1	17

A pivotelemet a korábbiakhoz hasonlóan a nemnegatív oszlopokból választjuk, azzal a különbséggel, hogy az első fázis végéig a z^* sorát nézzük. Tehát jelen esetben az első két oszlopból kerülhet ki a pivotelem.

Ezek az $u_2^* - x_1$ metszetében álló 3, valamint az $u_1^* - x_2$ metszetében szereplő 5 lehetnek. Az utóbbi választásával a következő pivottáblához jutunk:

A továbbiakban a lehetséges pivotelemeket megvastagítjuk, a választott pivotelem pedig kék színnel lesz jelölve.

	x_1	u_1^*	v_1	v_2	b
x_2	2/5	1/5	-1/5	0	12/5
u_2^*	13/5	-1/5	1/5	-1	13/5
u_3	9/5	-8/5	8/5	0	104/5
z	-34	8	-8	0	96
z^*	13/5	-6/5	1/5	-1	13/5

Az u^* oszlopot is elhagyhatjuk a következő tábla számítása előtt:

	x_1	u_2^*	v_2	b
x_2	3	1	-1	5
v_1	13	5	-5	13
u_3	-19	-8	8	0
z	70	40	-40	200
z^*	0	-1	0	0

A következő tábla számítása előtt újabb u^* oszlopot hagyhatunk el. Továbbá azt is észrevehetjük, hogy a z^* sorának végén az érték 0-ra redukálódott, ami azt jelenti, hogy az első fázis véget ért. Most már a következő pivotelem meghatározásakor a z sorát kell figyelembe vennünk, z^* sora el is hagyható:

	x_1	v_2	b			x_1	v_2	b			v_1	v_2	b
x_2	3	-1	5	$\implies$	x_2	3	-1	5	$\implies$	x_2	-3/13	2/13	2
v_1	13	-5	13		v_1	13	-5	13		x_1	1/13	-5/13	1
u_3	-19	8	0		u_3	-19	8	0		u_3	19/13	9/13	19
z	70	-40	200		z	70	-40	200		z	-70/13	-170/13	130

Amint látható, az utolsó tábla már optimális, melyből leolvasható az x -ek és a célfüggvény optimális értéke: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $z = 130$.

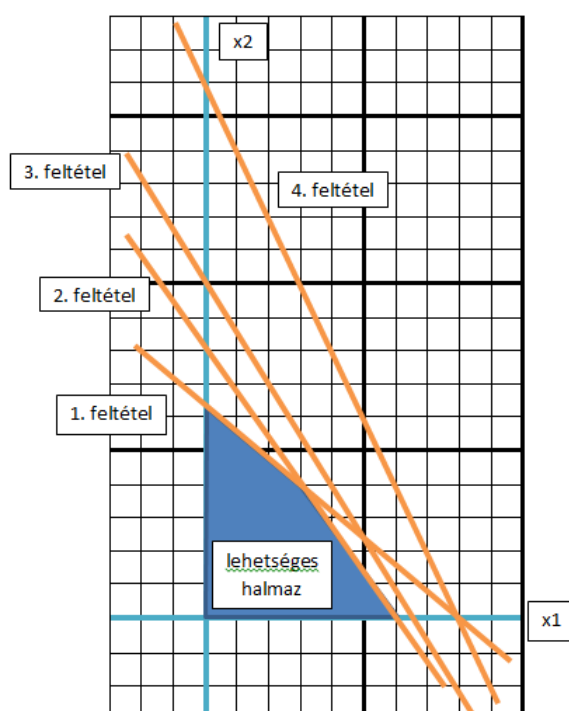
5. SPECIÁLIS LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADATOK

5.1. Példa. Egy építő cég kétféle (A és B típusú) épületet gyárt. Az A típusú épületen a nyereség 4000 és 5000 dollár. Az A épülethez 4000 m² lemez, 4 tonna acél, 300 m² tetőanyag és 200 m³ beton szükséges, a B épülethez pedig 5000 m² lemez, 3 tonna acél, 200 m² tetőanyag és 100 m³ beton. Azonban mindössze 32000 m² lemez, 24 tonna acél, 2000 m² tetőanyag és 1600 m³ beton áll rendelkezésre évente. Milyen összetételben érdemes gyártani az épületeket ahhoz, hogy maximalizáljuk a nyereséget?

Megoldás. A feladat matematikai modellje:

$$\begin{array}{ll}
 4000x_1 + 5000x_2 \leq 32000 & 4x_1 + 5x_2 \leq 32 \\
 4x_1 + 3x_2 \leq 24 & 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
 300x_1 + 200x_2 \leq 2000 & 3x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
 200x_1 + 100x_2 \leq 1600 & 2x_1 + 1x_2 \leq 16 \\
 x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2 \geq 0 \\
 4000x_1 + 5000x_2 \rightarrow \max & 4000x_1 + 5000x_2 \rightarrow \max
 \end{array}
 \Rightarrow$$

Megoldás grafikusán. Az ábrán (1 rács 1 egységet jelöl) látjuk a feltételek által meghatározott lehetséges halmazt. Azonban ha felírjuk a célfüggvény együtthatóiból a vektorunkat és arra merőlegest állítunk, azt figyelhetjük meg, hogy a lehetséges halmaz szélének nem egy pontját, hanem egy egész szakaszát fogja érinteni, hiszen két csúcspontban is felveszi az optimális értékét: $x_1 = 0$, $x_2 = 6.4$ és $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ esetében is a célfüggvény értéke 32000.



Ugyanis ha behelyettesítjük a két pontot $4000 \cdot 0 + 5000 \cdot 6.4 = 32000$ és $4000 \cdot 3 + 5000 \cdot 4 = 32000$ ugyanazt az eredményt adja. Ebből következően a köztük lévő szakasz is megoldása a feladatnak, hiszen a szakasz minden pontján felveszi az optimális értékét.

Általánosan az ilyen feladatok megoldását $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n$ alakban írhatjuk le, ahol a λ értékekre vonatkozó kikötéseink a következők: $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$.

Ez a három feltétel együttesen a pontok konvex kombinációit írja le.

Megoldás szimplex módszerrel. Nézzük meg, hogy ez hogyan jelenik meg a szimplex módszerrel történő megoldás esetén.

Elsőként a feltételrendszerbe vezessük be az új ismeretleneket, melyekkel egyenlőségrendszert kapunk, majd írjuk fel az induló pivottáblát.

$$\begin{array}{lcl}
 4x_1 + 5x_2 + u_1 = 32 \\
 4x_1 + 3x_2 + u_2 = 24 \\
 3x_1 + 2x_2 + u_3 = 20 \\
 2x_1 + 1x_2 + u_4 = 16 \\
 x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \\
 4000x_1 + 5000x_2 \rightarrow \max
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|ccc}
 & x_1 & x_2 & b \\
 \hline
 u_1 & 4 & 5 & 32 \\
 u_2 & 4 & 3 & 24 \\
 u_3 & 3 & 2 & 20 \\
 u_4 & 2 & 1 & 16 \\
 -z & 4000 & 5000 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|ccc}
 & x_1 & u_1 & b \\
 \hline
 x_2 & 4/5 & 1/5 & 32/5 \\
 u_2 & 8/5 & -3/5 & 24/5 \\
 u_3 & 7/5 & -2/5 & 36/5 \\
 u_4 & 6/5 & -1/5 & 48/5 \\
 -z & 0 & -1000 & -32000
 \end{array}$$

Amint az utolsó sorból látszik, ez már az optimális tábla, hiszen az utolsó sorban már nem szerepel pozitív szám. Ha leolvassuk a megoldást: $x_1 = 0$, $x_2 = 32/5$, $-z = -32000$, azaz $z = 32000$.

Azonban az utolsó sorban szereplő 0 utal arra, hogy nem ez az egyetlen megoldás. Ha tovább számolunk az $u_2 - x_1$ metszetében szereplő pivotelemmel, a következő táblához jutunk:

	u_2	u_1	b
x_2	$-1/2$	$1/2$	4
x_1	$5/8$	$-3/8$	3
u_3	$-7/8$	$1/8$	3
u_4	$-3/4$	$1/4$	6
$-z$	0	-1000	-32000

Ez a pivottábla is optimális, melyből leolvassva a megoldást $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $-z = -32000$, azaz $z = 32000$.

A következő lépésben ha pivotelemet választanánk, ugyancsak az $x_1 - u_2$ metszetét tudnánk választani, melynek következtében innentől kezdve már csak az utolsó két tábla között "ugrálunk".

5.2. Példa. Egy szabóságban ingeket és szoknyákat varrnak. Egy ingen 4, egy szoknyán 3 dollár nyeresége van a vezetőknek. Egy ing 3 m anyagból 5 óra alatt, egy szoknya 4 m anyagból 2 óra alatt készül el. A cég vezetője azt várja el az alkalmazottaktól, hogy a napi 10 órás munkaidő alatt legalább 4 ruhadarabot készítsenek el legfeljebb 12 m anyag felhasználásával. Hány ing és hány szoknya megvarrásával érhető el egy alkalmazottnál a maximális profit?

Megoldás. A feladat matematikai modellje:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

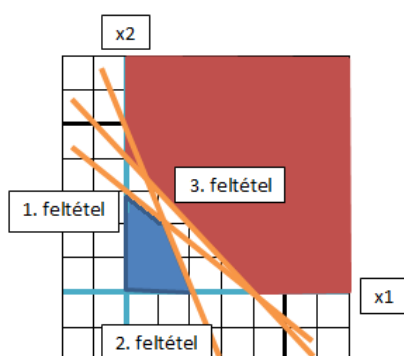
$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Megoldás grafikusan. Az alábbi ábrán kézzel az 1. és 2. feltétel által meghatározott terület látható a pozitív síknegyedben, vörös színnel pedig a 3. feltételt teljesítő, pozitív síknegyedbeli pontok láthatók. 1 rács 1 egységet jelöl.

Amint azt észrevehetjük, a két területnek nincs közös része, tehát a lehetséges halmaz üres.



Megoldás kétfázisú szimplex módszerrel. Nézzük meg, ez az eset a szimplex módszerrel hogyan tűnik fel.

Első lépésként írjuk át a feltételrendszerünket, bevezetve a szükséges, új változókat, majd készítsük el az induló pivottáblát:

$$3x_1 + 4x_2 + u_1 = 12$$

$$5x_1 + 2x_2 + u_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 - v_3 + u_3^* = 4 \quad \Rightarrow$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, v_3, u_3^* \geq 0$$

$$4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

	x_1	x_2	v_3	b
u_1	3	4	0	12
u_2	5	2	0	10
u_3^*	1	1	-1	4
$-z$	4	3	0	0
z^*	1	1	-1	4

$\Rightarrow$

	x_1	u_1	v_3	b
x_2	3/4	1/4	0	3
u_2	7/2	-1/2	0	4
u_3^*	1/4	-1/4	-1	1
$-z$	7/4	-3/4	0	-9
z^*	1/4	-1/4	-1	1

$\Rightarrow$

	u_2	u_1	v_3	b
x_2	-3/14	5/14	0	15/7
x_1	2/7	-1/7	0	8/7
u_3^*	-1/14	-3/14	-1	5/7
$-z$	-1/2	-1/2	0	-11
z^*	-1/14	-3/14	-1	5/7

Azt látjuk, hogy a z^* sorának utolsó értéke még nem nulla, tehát az első fázisnak nincs vége, azonban az utolsó sorban már csak negatív elemek szerepelnek, tehát nem tudunk pivotelemet választani.

5.3. Példa. Az előző feladatban a szabóság vezetője jutányos áron hatalmas mennyiségű anyagot szerzett be, ezért eltörli az anyagfelhasználásra vonatkozó limitet és emellett minden dolgozótól megköveteli, hogy legalább 10 órát dolgozzon (felső határ a csillagos ég). A legalább 4 ruhadarabra vonatkozó előírás megmaradt. Milyen összetétel esetén érhető így el a maximális nyereség?

Megoldás. A feladat matematikai modellje:

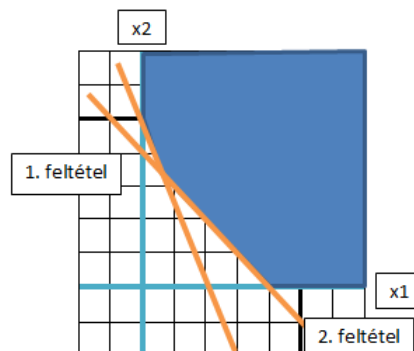
$$5x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Megoldás grafikusan. Az alábbi ábrában egy rács 1 egységet jelöl, kékkel jelöltük a feltételek által meghatározott területet. Azt látjuk, hogy a célfüggvény által meghatározott "célegyenest" a maximalizálás miatt felfelé kellene tolnunk a lehetséges halmaz határához, azonban mivel a lehetséges halmaz felülről nem korlátos, nem lesz a feladatnak megoldása.



Megoldás kétfázisú szimplex módszerrel. Szimplex módszer esetén elsőként a feladat feltételrendszerét írjuk át egy kissé, majd ennek segítségével elkészítjük az induló pivottáblát:

$$5x_1 + 2x_2 - v_1 + u_1^* = 10$$

$$x_1 + x_2 - v_2 + u_2^* = 4$$

$$x_1, x_2, v_1, u_1^*, v_2, u_2^* \geq 0$$

$$4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\Rightarrow$$

	x_1	x_2	v_1	v_2	b
u_1^*	5	2	-1	0	10
u_2^*	1	1	0	-1	4
$-z$	4	3	0	0	0
z^*	6	3	-1	-1	14

$$\Rightarrow$$

	x_1	u_2^*	v_1	v_2	b
u_1^*	3	-2	-1	2	2
x_2	1	1	0	-1	4
$-z$	1	-3	0	3	-12
z^*	3	-3	-1	2	2

Elhagyjuk az u_2^* oszlopát és kiszámoljuk a következő pivottáblát:

	x_1	v_1	u_1^*	b
v_2	$3/2$	$-1/2$	$1/2$	1
x_2	$5/2$	$-1/2$	$1/2$	5
$-z$	$-7/2$	$3/2$	$-3/2$	-15
z^*	0	0	-1	0

A z^* sorának utolsó eleme 0, tehát az első fázis véget ért, a továbbiakban z^* sora elhagyható, valamint u_1^* oszlopát is elhagyhatjuk. Azaz a pivottáblánk a következő táblává egyszerűsödik:

	x_1	v_1	b
v_2	$3/2$	$-1/2$	1
x_2	$5/2$	$-1/2$	5
$-z$	$-7/2$	$3/2$	-15

Az utolsó pivottáblánk $-z$ sora azt mutatja, hogy a második oszlopból még választanunk kellene pivotelemet, mivel a második érték pozitív. Azonban az oszlopban csak negatív értékek szerepelnek, tehát pivotelem mégsem választható.

Az utolsó sorban szereplő pozitív elem annak a jele, hogy még nem jutottunk el az optimális megoldáshoz, az aktuális érték még nem optimum, azonban az, hogy mégsem tudunk pivotelemet választani, annak a jele, hogy a lehetséges halmaz nem korlátos.

6. LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT DUÁLISA ÉS ÉRZÉKENYSÉGVIZSGÁLAT

A lineáris programozási feladat duálisa a következő táblázat segítségével írható fel:

	MAX	MIN	
változók	≥ 0	$\geq$	feltételek
	előjelkötetlen	$=$	
	≤ 0	$\leq$	
feltételek	$\geq$	≤ 0	változók
	$=$	előjelkötetlen	
	$\leq$	≥ 0	

A táblázat szerint egy lineáris programozási feladat duálisának célfüggvénye ellentétes irányú, azaz ha az úgynevezett primál feladat maximumot keres, annak duálisa minimalizál és fordítva.

Nagyjából ez úgy képzelhető el, mint egy kétszemélyes játékelméleti feladat: A két játékos egymással egy játékot - akár egy kő-papír-olló(-gyík-Spocko)t - játszik. Az egyszerűség kedvéért amennyiben ugyanazt mutatják, egyikük sem nyer, egyébként a nyertes 1000 Ft-ot nyer a másik játéktól. Nyilvánvalóan mindkét játékos célja, hogy minél többet nyerjen el a másiktól, de erre úgy is gondolhatunk, hogy az egyik játékos helyébe képzeljük magunkat és amellet, hogy a saját nyereményünket maximalizáljuk, egyúttal az ellenfél nyereményét minimalizálni akarjuk. A feladatot tovább bonyolíthatja, ha a különböző párok különböző értékűek. Ebben az esetben is az első játékos stratégiájára válaszul

a második játékosnak is meg kell határoznia a saját stratégiáját. Ehhez a különböző nyeremények szerinti feltételeket tudnak a játékosok felírni. A végeredmény mindkét játékosnál egy-egy stratégia lesz, azaz megkapják, hogy melyik jelet milyen gyakorisággal érdemes mutatni ahhoz, hogy a nyereményük minél nagyobb, illetve hogy a veszteségük minél kisebb legyen.

Nézzünk most egy konkrét példát:

6.1. Példa. Írja fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq -3 \\ x_1 \leq 0, \ x_2 \text{ előjelkötetlen}, \ x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Megoldás. A feladat duálisának felírásához minden változóból feltétel lesz és minden feltétel változóvá válik. Ez azt jelenti, hogy

- x_1 együtthatói és a rá vonatkozó előjel szerinti előírás fogják meghatározni az első feltételt, az x_2 együtthatói és előjele mutatja majd a második feltételt, stb.
- Az eredetileg a célfüggvényben szereplő együtthatók a duál feltételek jobb oldalán lévő értékek lesznek.
- A különböző feltételekhez y_i változókat kell bevezetnünk. A feltételekben szereplő megkötések ($\geq$, $=$, $\leq$) határozzák majd meg az adott y_i előjelét.
- Az új célfüggvény együtthatói a primál feladat feltételeinek jobb oldalán szereplő értékekből adódnak.

Tehát a duál feladat:

$$\begin{aligned} 5y_1 - y_2 + y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + 5y_2 - 2y_3 &= -2 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\leq 1 \\ y_1 \geq 0, \ y_2 \text{ előjelkötetlen}, \ y_3 &\geq 0 \\ 2y_1 - 5y_2 - 3y_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Miután a duál feladat felírására már ismerjük a módszert, nézzük meg, hogyan történik egy duál feladat megoldásának leolvasása az optimális táblából, valamint végezzünk érzékenységvizsgálatot a kapacitásokra és a célfüggvény-együtthatókra. Továbbá vizsgáljuk meg, hogyan a simplex módszer hogyan reagál arra, ha a kapacitások vagy célfüggvény-együtthatók együttesen változnak.

Ehhez felírjuk a feladat szövegét, a matematikai modellt és az optimális táblát is, hogy a lényegre koncentrálhassunk.

Megjegyezzük továbbá, hogy az optimális táblában szükség van (lehet) a törölt u^* oszlopokra is, ezeket a b oszlop mögé írjuk fel.

6.2. Példa. A távoli jövőben a vizsgákra különböző ízesítésű tudástabletták bevételével is fel lehet készülni. Egy spenótos tabletta elfogyasztása 10%-kal, egy eperízű tabletta elfogyasztása 7%-kal növeli a hallgató tudását. (Tehát 4 spenótos és 5 eper tabletta esetén a tananyag 75%-ának lennénk

a birtokában.) Egy spenótos tabletta 2000, egy eperízű tabletta 1500 forintba kerül. A túladagolás elkerülése érdekében a két tablettából összesen legfeljebb 8 darab vehető be, és arra is ügyelnünk kell, hogy legalább annyi eprest vegyünk be, mint spenótost (az utóbbi nem túl kellemes íze miatt). Milyen összetételben vásároljuk a tablettákból, ha a lehető legkevesebbet szeretnénk költeni és 51% a sikeres vizsga teljesítésének feltétele?

A matematikai modell:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq 0 \\x_1 + x_2 &\leq 8 \\10x_1 + 7x_2 &\geq 51 \\x_1, x_2 &\geq 0 \\2000x_1 + 1500x_2 &\rightarrow \min\end{aligned}$$

Optimális tábla:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	7/17	-1/17	3	1/17
u_2	3/17	2/17	2	-2/17
x_2	-10/17	-1/17	3	1/17
z	-1000/17	-3500/17	10500	3500/17

- Írja fel a feladat duálisát és határozza meg annak megoldását!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot az első kapacitásra (spenótos és eper tabletta számának különbsége)!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot a második kapacitásra (bevehető tabletták darabszáma)!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot a harmadik kapacitásra (sikeres teljesítés százaléka)!
- Mennyivel kellene a sikeres teljesítés százalékát módosítani, hogy az elköltött összeg 17%-kal csökkenjen?
- Mennyire változhatna a sikeres teljesítés százaléka, ha az eredetihez képest 40%-kal többet költ-hetnénk?
- Legfeljebb hány százalékkal növekedhet az elköltött összeg a sikeres teljesítés százalékának meg-változtatásával?
- Végezzen érzékenységvizsgálatot a spenótos tabletta árára!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot az eper tabletta árára!
- Hogyan változik az optimális tábla, ha a kapacitások (0, 8, 51)-ről (1, 10, 61)-re változnak?
- Hogyan változik az optimális tábla, ha a célfüggvény-együtthatók (2000, 1500)-ról (2035, 1535)-ra változnak?

a) **megoldása.** A feladat duálisa:

$$\begin{aligned}y_1 + y_2 + 10y_3 &\leq 2000 \\-y_1 + y_2 + 7y_3 &\leq 1500 \\y_1, y_2 &\leq 0, y_3 \geq 0 \\0y_1 + 8y_2 + 51y_3 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

A duál feladat megoldása is leolvasható az optimális táblából azzal, hogy itt nem a b oszlopból olvas-suk le az x -ek értékeit, hanem z (vagy $-z$) sorából, nagyon ügyelve rá, hogy ott z vagy $-z$ szerepel-e, hiszen ettől függ, az érték (-1) -szeresét kell-e vennünk. ($-z$ esetén vesszük az értékek (-1) -szeresét, z esetén már maga az érték látszik.) Továbbá megjegyezzük, hogy a táblázatban szereplő u -k megfelel-nek a duál feladatban szereplő y -oknak:

$y_1(=u_1) = -1000/17$, $y_2(=u_2) = 0$, $y_3(=u_3^*) = 3500/17$. A célfüggvény optimális értéke: 10500. y_2 értéke azért 0, mert u_2 az első oszlopban van, mi pedig most z sorából olvastuk le az értékeket.

b) megoldása. Az első kapacitásra vonatkozó érzékenységvizsgálat előzetesen annyit jelent, hogy az első feltételben 0 helyett $0 + \lambda$ szerepel.

Ez az optimális táblában mindössze annyit fog jelenteni, hogy b oszlopának helyére $b + \lambda \cdot u_1$ fog kerülni, azaz:

	u_1	v_1	$b + \lambda \cdot u_1$	u_3^*
x_1	7/17	-1/17	$3 + \lambda \cdot 7/17$	1/17
u_2	3/17	2/17	$2 + \lambda \cdot 3/17$	-2/17
x_2	-10/17	-1/17	$3 + \lambda \cdot (-10/17)$	1/17
z	-1000/17	-3500/17	$10500 + \lambda \cdot (-1000/17)$	3500/17

Azonban ebben a táblában is teljesülnie kell, hogy a b oszlopában negatív érték nem szerepelhet, vagyis:

$$3 + \lambda \cdot 7/17 \geq 0,$$

$$2 + \lambda \cdot 3/17 \geq 0, \text{ és}$$

$$3 + \lambda \cdot (-10/17) \geq 0.$$

Megoldva az egyenlőtlenségeket, a következő feltételeket kapjuk a λ -ra vonatkozóan:

$$\lambda \geq -51/7,$$

$$\lambda \geq -34/3,$$

$$21/10 \geq \lambda.$$

Ezek együttesen a $\lambda \in [-51/7, 21/7]$ intervallumon teljesülnek.

Ekkor $z = 10500 - 1000/17 \cdot \lambda$. (Ez szerepel ugyanis $z - b$ metszetében.)

c) megoldása. Amennyiben a második kapacitásra (8 értékére) szeretnénk érzékenységvizsgálatot végezni, a $b + \lambda \cdot u_2$ oszlopot kellene elkészítenünk, de amint látható u_2 oszlopunk nincsen, hiszen u_2 a bázisban szerepel. Viszont el tudjuk készíteni az u_2 oszlopát, még hozzá úgy, hogy az u_2 értéke mindenütt 0 lesz, kivéve ott, ahol u_2 sorát nézzük. Azon a helyen az érték 1:

	u_1	v_1	b	u_3^*	u_2
x_1	7/17	-1/17	3	1/17	0
u_2	3/17	2/17	2	-2/17	1
x_2	-10/17	-1/17	3	1/17	0
z	-1000/17	-3500/17	10500	3500/17	0

Így már el tudjuk készíteni a $b + \lambda \cdot u_2$ oszlopot:

	u_1	v_1	$b + \lambda \cdot u_2$	u_3^*	u_2
x_1	7/17	-1/17	$3 + \lambda \cdot 0$	1/17	0
u_2	3/17	2/17	$2 + \lambda \cdot 1$	-2/17	1
x_2	-10/17	-1/17	$3 + \lambda \cdot 0$	1/17	0
z	-1000/17	-3500/17	$10500 + \lambda \cdot 0$	3500/17	0

A b oszlopban továbbra sem szerepelhetnek negatív értékek (z sorát kivéve), így továbbra is fennállnak a feltételek, melyek megoldásai:

$$3 + \lambda \cdot 0 \geq 0 \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2 + \lambda \cdot 1 \geq 0 \implies \lambda \geq -2$$

$$3 + \lambda \cdot 0 \geq 0 \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

A három feltétel közös része: $\lambda \geq -2$, ahol $z = 10500 + \lambda \cdot 0 = 10500$.

Ez azt jelenti, hogy ha legfeljebb 2-vel csökkentjük a 8 értékét (vagy tovább növeljük azt) a második feltételben, akkor az optimális érték 10500 marad.

d) megoldása. A harmadik kapacitás megváltoztatása azt jelenti, hogy 51 helyett $51 + \lambda$ lesz, azaz az optimális táblában b helyén $b + \lambda \cdot u_3^*$ lesz:

	u_1	v_1	$b + \lambda \cdot u_3^*$	u_3^*
x_1	7/17	-1/17	$3 + \lambda \cdot 1/17$	1/17
u_2	3/17	2/17	$2 + \lambda \cdot (-2/17)$	-2/17
x_2	-10/17	-1/17	$3 + \lambda \cdot 1/17$	1/17
z	-1000/17	-3500/17	$10500 + \lambda \cdot 3500/17$	3500/17

Továbbra is teljesül, hogy a b oszlopában nem szerepelhet negatív érték:

$$3 + \lambda \cdot 1/17 \geq 0 \implies \lambda \geq -51$$

$$2 + \lambda \cdot (-2/17) \geq 0 \implies 17 \geq \lambda$$

$$3 + \lambda \cdot 1/17 \geq 0 \implies \lambda \geq -51$$

A feltételek közös része: $\lambda \in [-51, 17]$, amikor $z = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$.

e) megoldása. Amennyiben a teljesítés százalékát kívánjuk vizsgálni, akkor erre a kapacitásra kell elvégeznünk az érzékenységvizsgálatot. Amint látjuk, a d) pontban ezt a kérdést már megválaszoltuk: $\lambda \in [-51, 17]$, $z = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$. Az elköltött összeg 17%-kal történő csökkentése azt jelenti, hogy a fenti z értéknek az optimális érték 83%-ával kell megegyeznie:

$$10500 \cdot 0.83 = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$$

$$8715 = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$$

$$-1785 = \lambda \cdot 3500/17$$

$$-8.67 = \lambda$$

Azt kaptuk eredményül, hogy ha 17%-kal csökkentjük az optimális értéket, azaz a tablettákra szánt összeget, akkor az 51%-os követelményt 8.67%-kal kellene csökkenteni.

Mivel a kapott érték benne van a $[-51, 17]$ intervallumban, ezért ez a lehetőség kivitelezhető.

f) megoldása. Ebben az esetben is a sikeres teljesítés és az optimális érték kapcsolatát vizsgáljuk, ezért szükség van az érzékenységvizsgálat során kapott eredményre: $\lambda \in [-51, 17]$, $z = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$ és az optimális értékre: 10500.

Ha a keretünk 40%-kal nagyobb, az azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 10500 \cdot 1.4 &= 10500 + \lambda \cdot 3500/17 \\ 14700 &= 10500 + \lambda \cdot 3500/17 \\ 4200 &= \lambda \cdot 3500/17 \\ 20.4 &= \lambda \end{aligned}$$

Sajnos a kapott érték nem esik bele a $[-51, 17]$ intervallumba, ezért az optimális érték ilyen mértékű megváltoztatása kizárólag a harmadik kapacitás megváltoztatásával nem kivitelezhető.

g) megoldása. A kérdést a következőképpen kell értelmeznünk:

$$\begin{aligned} 10500 \cdot (1 + a/100) &= 10500 + \lambda \cdot 3500/17 & \lambda \in [-51, 17] \\ \text{a baloldal akkor a legnagyobb, ha } \lambda &= 17 \\ 10500 \cdot (1 + a/100) &= 10500 + 17 \cdot 3500/17 \\ 10500 \cdot (1 + a/100) &= 14000 \\ 1 + a/100 &= 4/3 \quad a = 100/3 \end{aligned}$$

Az elköltött összeg legfeljebb 33.3333%-kal növekedhet, ha a teljesítési feltételt a lehető legmagasabbra növelik.

h) megoldása. Amennyiben a célfüggvény együtthatóját változtatjuk, az a célfüggvény (z vagy $-z$) sorában fog megjelenni a következőképpen:

Amennyiben valamelyik x_i együtthatóját λ -val változtatjuk, a célfüggvény sora $z + \lambda \cdot x_i$ lesz. Ez azt jelenti, hogy ha z szerepelt a sor elején, akkor $z + \lambda \cdot x_i$ lesz helyette, $-z$ esetén pedig $-(z + \lambda \cdot x_i) = -z - \lambda \cdot x_i$. (Tehát az előjelre nagyon oda kell figyelni.)

A spenótos tabletta árára vonatkozóan tehát az alábbi táblát kapjuk:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	$7/17$	$-1/17$	3	$1/17$
u_2	$3/17$	$2/17$	2	$-2/17$
x_2	$-10/17$	$-1/17$	3	$1/17$
$z + \lambda \cdot x_1$	$-1000/17 + \lambda \cdot 7/17$	$-3500/17 + \lambda \cdot (-1/17)$	$10500 + \lambda \cdot 3$	$3500/17 + \lambda \cdot 1/17$

Az utolsó sorban szereplő értékekre továbbra is fennáll, hogy nem pozitívak, különben tovább kellene számolni a táblázatot:

$$-1000/17 + \lambda \cdot 7/17 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \leq 1000/7$$

$$-3500/17 + \lambda \cdot (-1/17) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -3500 \leq \lambda$$

Így $\lambda \in [-3500, 1000/7]$ esetén a $10500 + \lambda \cdot 3$ lesz az optimális érték.

i) megoldása. Itt a $z + \lambda \cdot x_2$ sor kerül a z helyére:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	$7/17$	$-1/17$	3	$1/17$
u_2	$3/17$	$2/17$	2	$-2/17$
x_2	$-10/17$	$-1/17$	3	$1/17$
$z + \lambda \cdot x_2$	$-1000/17 + \lambda \cdot (-10/17)$	$-3500/17 + \lambda \cdot (-1/17)$	$10500 + \lambda \cdot 3$	$3500/17 + \lambda \cdot 1/17$

A feltételek tehát:

$$-1000/17 + \lambda \cdot (-10/17) \leq 0 \implies -100 \leq \lambda$$

$$-3500/17 + \lambda \cdot (-1/17) \leq 0 \implies -3500 \leq \lambda$$

A két feltétel által meghatározott közös feltétel $-100 \leq \lambda$, amikor $z = 10500 + \lambda \cdot 3$.

j) megoldása. Amikor a kapacitások együttesen változnak, az is könnyen megvalósítható az optimális tábla ismeretében. A változás itt is csak a b oszlopban fog megjelenni:

Az u sorok és oszlopok elé írjuk le az új értékeket, a többi változó elé 0-kat. b értékei a következőképpen kaphatók meg:

	1	0	b	u_3^*
	u_1	v_1		
0 x_1	$7/17$	$-1/17$	$0 + 7/17 \cdot 1 + (-1/17) \cdot 0 + 1/17 \cdot 61$	$1/17$
10 u_2	$3/17$	$2/17$	$10 + 3/17 \cdot 1 + 2/17 \cdot 0 + (-2/17) \cdot 61$	$-2/17$
0 x_2	$-10/17$	$-1/17$	$0 + (-10/17) \cdot 1 + (-1/17) \cdot 0 + 1/17 \cdot 61$	$1/17$
z	$-1000/17$	$-3500/17$	$-1000/17 \cdot 1 + (-3500/17) \cdot 0 + 3500/17 \cdot 61$	$3500/17$

Kiszámítva b értékeit:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	$7/17$	$-1/17$	4	$1/17$
u_2	$3/17$	$2/17$	3	$-2/17$
x_2	$-10/17$	$-1/17$	3	$1/17$
z	$-1000/17$	$-3500/17$	12500	$3500/17$

k) megoldása. A számítás a kapacitásértékek változásához hasonló. A legfőbb különbség, hogy a változások a z (vagy $-z$) sorában jelennek meg. Éppen ezért oda kell figyelni, hogy éppen z vagy $-z$ szerepel az utolsó sorban.

Az új tábla kiszámításánál az x sorai elé beírjuk az új együtthatókat, x oszlopai elé pedig az új együtthatók (-1) -szereseit. Majd a következőképpen határozzuk meg a z új értékeit:

	0	0		0
	u_1	v_1	b	u_3^*
2035 x_1	$7/17$	$-1/17$	3	$1/17$
0 u_2	$3/17$	$2/17$	2	$-2/17$
1535 x_2	$-10/17$	$-1/17$	3	$1/17$
z	z_1	z_2	z_3	z_4

$$z_1 = 0 + 7/17 \cdot 2035 + 3/17 \cdot 0 + (-10/17) \cdot 1535 = -65$$

$$z_2 = 0 + (-1/17) \cdot 2035 + 2/17 \cdot 0 + (-1/17) \cdot 1535 = -210$$

$$z_3 = 3 \cdot 2035 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1535 = 10710$$

$$z_4 = 0 + 1/17 \cdot 2035 + (-2/17) \cdot 0 + 1/17 \cdot 1535 = 210$$

Tehát az új táblázat:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	7/17	-1/17	3	1/17
u_2	3/17	2/17	2	-2/17
x_2	-10/17	-1/17	3	1/17
z	-65	-210	10710	210

Ismételten felhívjuk a figyelmet, hogy az utolsó sorban a z és $-z$ közötti különbség a sor minden értékében megjelenik, hiszen z esetén a fenti számolással megkapjuk a sorbeli értékeket, azonban $-z$ esetén a fenti módon megkapott eredmények (-1) -szeresei kerülnek a $-z$ sorába.

Továbbá megjegyezzük, hogy az utolsó két részfeladat alkalmas arra is, hogy a kapott b oszlopában és/vagy z vagy $-z$ sorában lévő értékeket ellenőrizzük.

6.3. Példa. Adott az alábbi táblázat

	szerelési költség	eladási ár	anyagköltség
T_1	1	2	1
T_2	4	3	5
T_3	8	8	2

Mennyit gyártsunk az egyes termékekből, ha a szerelési költséget minimálissá szeretnénk tenni, de a bevétel legyen legalább 360 pénzegység úgy, hogy az anyagköltség éppen 100 egység legyen?

A matematikai modell:

$$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 360$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 8x_3 \rightarrow \min$$

Duális feladat:

$$2y_1 + y_2 \leq 1$$

$$3y_1 + 5y_2 \leq 4$$

$$8y_1 + 2y_2 \leq 8$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \text{ előjelkötetlen}$$

$$360y_1 + 100y_2 \rightarrow \max$$

Optimális tábla:

	x_2	c_1	b	u_1^*	u_2^*
x_3	-7/4	-1/4	40	1/4	-1/2
x_1	17/2	1/2	20	-1/2	2
z	-19/2	-3/2	340	3/2	-2

Primál optimális megoldás: Duál optimális megoldás:

$$x_1 = 20, x_2 = 0, x_3 = 40$$

$$z = 340$$

$$y_1 = 3/2, y_2 = -2$$

$$z = 340$$

- Végezzen érzékenységvizsgálatot az eladási árra!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot az anyagmennyiségre!
- Hogyan változtassuk meg a felhasználható anyagmennyiséget, hogy a szerelési költség 5%-kal csökkenjen?
- Végezzen érzékenységvizsgálatot az első termék szerelési költségére!

a) megoldása.

	x_2	c_1	$b + \lambda \cdot u_1^*$	u_1^*	u_2^*
x_3	$-7/4$	$-1/4$	$40 + \lambda \cdot 1/4$	$1/4$	$-1/2$
x_1	$17/2$	$1/2$	$20 + \lambda \cdot (-1/2)$	$-1/2$	2
z	$-19/2$	$-3/2$	$340 + \lambda \cdot 3/2$	$3/2$	-2

$$40 + \lambda \cdot 1/4 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq -160$$

$$\lambda \in [-160, 40], z = 340 + 1/2 \cdot \lambda$$

$$20 + \lambda \cdot (-1/2) \geq 0 \Rightarrow 40 \geq \lambda$$

Ekkor $x_1 = 40 - 1/2 \cdot \lambda$, $x_2 = 0$, $x_3 = 40 + 1/4 \cdot \lambda$

Például $\lambda = 20$ esetén: $x_1 = 30$, $x_2 = 0$, $x_3 = 45$, $z = 350$

b) megoldása.

	x_2	c_1	$b + \lambda \cdot u_2^*$	u_1^*	u_2^*
x_3	$-7/4$	$-1/4$	$40 + \lambda \cdot (-1/2)$	$1/4$	$-1/2$
x_1	$17/2$	$1/2$	$20 + \lambda \cdot 2$	$-1/2$	2
z	$-19/2$	$-3/2$	$340 + \lambda \cdot (-2)$	$3/2$	-2

$$40 + \lambda \cdot (-1/2) \geq 0 \Rightarrow 80 \geq \lambda$$

$$\lambda \in [-10, 80], z = 340 - 2\lambda$$

$$20 + \lambda \cdot 2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq -10$$

Ekkor $x_1 = 20 + 2\lambda$, $x_2 = 0$, $x_3 = 40 - 1/2 \cdot \lambda$

c) megoldása. A szerelési költség jelenleg 340, melynek 95%-a (5%-kal csökkentett érték) $340 \cdot 0.95 = 323$.

Másrészt b) részfeladatban meghatároztuk, hogy $z = 340 - 2\lambda$, ezért

$$340 - 2\lambda = 323$$

$$2\lambda = 17$$

$$\lambda = 8.5$$

A kapott érték beleesik a fenti intervallumba, tehát 8.5-tel kell az anyagmennyiséget növelni.

d) megoldása.

	x_2	c_1	b	u_1^*	u_2^*
x_3	$-7/4$	$-1/4$	40	$1/4$	$-1/2$
x_1	$17/2$	$1/2$	20	$-1/2$	2
$z + \lambda \cdot x_1$	$-19/2 + \lambda \cdot 17/2$	$-3/2 + \lambda \cdot 1/2$	$340 + \lambda \cdot 20$	$3/2 + \lambda \cdot (-1/2)$	$-2 + \lambda \cdot 2$

$$-19/2 + \lambda \cdot 17/2 \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq 19/17$$

$$\lambda \leq 19/17, z = 340 + 20\lambda$$

$$-3/2 + \lambda \cdot 1/2 \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq 3$$

Ekkor $x_1 = 20$, $x_2 = 0$, $x_3 = 40$

7. HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁS

Hiperbolikus programozási feladat esetén az eredeti feladatunk feltételeit " $\leq$ " és " $=$ " alakba rendezzük és egy

$$\frac{c^T x + d}{e^T x + f}$$

alakú hányados szélsőértékét keressük az $x_i \geq 0$ feltételek mellett.

Tehát a hiperbolikus programozási feladat általánosan a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned} Gx &\leq h \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ \frac{c^T x + d}{e^T x + f} &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Nyilván természetesen adódó feltétel még, hogy a célfüggvény nevezőjében pozitív érték szerepel.

A hiperbolikus programozási feladatok átírása lineáris programozási feladattá történő átírása a következőképpen történik:

Első lépésként új változókat vezetünk be:

$$y_i = \frac{x_i}{e^T x + f} \qquad t = \frac{1}{e^T x + f}$$

Ezek segítségével a következő lineáris programozási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} Gy - ht &\leq 0 \\ Ay - bt &= 0 \\ e^T y + ft &= 1 \\ y &\geq 0, \quad t > 0 \\ c^T y + dt &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Az átírás érvényessége a célfüggvény esetén könnyen látszik, hiszen $\frac{c^T x + d}{e^T x + f} = c^T \frac{x}{e^T x + f} + d \frac{1}{e^T x + f} = c^T y + dt$.

Az új feltételek úgy adódnak, hogy az eredeti $Gx \leq h$ és $Ax = b$ feltételeket osztjuk az eredeti célfüggvény nevezőjével, majd behelyettesítünk és átrendezzük az egyenletet vagy egyenlőtlenséget. Az $e^T y + ft = 1$ feltétel érvényessége onnan látható, hogy ugyancsak helyettesítjük az y_i és t értékeit, így $e^T y + ft = e^T \frac{x}{e^T x + f} + f \frac{1}{e^T x + f} = \frac{e^T x + f}{e^T x + f} = 1$.

Másrészt a bevezetett y_i ismeretlenek és a t érték között felírható az $x_i = y_i/t$ kapcsolat, így az eredeti hiperbolikus programozási feladat megoldását egyszerű hányadosként megkaphatjuk.

Nézzünk erre konkrét példát:

7.1. Példa. Oldjuk meg a következő hiperbolikus programozási feladatot:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 18 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{2x_1+x_2+3x_3+2}{-2x_2-2} \rightarrow \min$$

Megoldás. A megoldás első lépéseként a " $\geq$ " feltételeket és amennyiben a feladat minimum keresésére szolgál, a célfüggvényt szorozzuk be (-1) -gyel:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -4$$

$$x_1 + x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\frac{2x_1+x_2+3x_3+2}{2x_2+2} \rightarrow \max$$

Ezt követően átírjuk a feladatot lineáris programozási feladattá:

$$y_1 - 2y_2 - y_3 + 4t \leq 0$$

$$y_1 + y_3 - 6t = 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 - 18t \leq 0$$

$$2y_2 + 2t = 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0, t > 0$$

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 + 2t \rightarrow \max$$

A kapott feladatot szimplex módszerrel megoldjuk (a lehetséges pivotelem vastag, a kiválasztott kék):

	y_1	y_2	y_3	t	b			y_1	y_2	u_2^*	t	b			y_1	y_2	t	b
u_1	1	-2	-1	4	0		u_1	2	-2	1	-2	0		u_1	2	-2	-2	0
u_2^*	1	0	1	-6	0		y_3	1	0	1	-6	0		y_3	1	0	-6	0
u_3	1	1	1	-18	0	$\Rightarrow$	u_3	0	1	-1	-12	0	$\Rightarrow$	u_3	0	1	-12	0
u_4^*	0	2	0	2	1		u_4^*	0	2	0	2	1		u_4^*	0	2	2	1
$-z$	2	1	3	2	0		$-z$	-1	1	-3	20	0		$-z$	-1	1	20	0
z^*	1	2	1	-4	1		z^*	0	2	-1	2	1		z^*	0	2	2	1

	y_1	y_2	u_4^*	b			y_1	y_2	b
u_1	2	0	1	1		u_1	2	0	1
y_3	1	6	3	3		y_3	1	6	3
u_3	0	13	6	6	$\Rightarrow$	u_3	0	13	6
t	0	1	1/2	1/2		t	0	1	1/2
$-z$	-1	-20	-10	-10		$-z$	-1	-20	-10
z^*	0	0	-1	0					

Ez már az optimális tábla, így leolvasható a bevezetett y -ok és t értéke, valamint az optimális érték:

$$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 3, t = 1/2, -z = -10 \Rightarrow z = 10.$$

Így az eredeti feladat optimális értékei:

$$x_1 = y_1/t = 0/(1/2) = 0, x_2 = y_2/t = 0/(1/2) = 0, x_3 = y_3/t = 3/(1/2) = 6.$$

Az optimális érték a megoldás elején látott célfüggvény (-1) -gyel történő szorzása miatt előjelet vált:

$$z = -10.$$

Amennyiben szeretnénk, behelyettesítéssel ellenőrizhetjük is, hogy ez a megoldás valóban eleget tesz a feltételeknek, valamint a -10 értéket kapjuk vissza a célfüggvényben: $\frac{2 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot 6 + 2}{-2 \cdot 0 - 2} = \frac{20}{-2} = -10$.

Megjegyezzük, hogy a feladat elején azért írtuk át a feladatot maximumfeladatra, mert a nevezőben minden tag együtthatója negatív volt.

Továbbá megjegyezzük azt is, hogy az ilyen típusú feladatok megoldása esetén a lehetőségekhez mérten érdemes az u^* sorokból pivotalemet választani.

7.2. Példa. Oldjuk meg az alábbi hiperbolikus programozási feladatot:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 16 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \leq 0 \\ \frac{x_1 - 2x_2 - 4}{2x_1 - 2x_2 + 4} &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Megoldás. Elsőként az $x_2 \leq 0$ feltétel miatt x_2 helyére új változót vezetünk be: $x'_2 = -x_2 \geq 0$. Így a feladat:

$$\begin{aligned} x_1 + x'_2 &= 16 \\ x_1, x'_2 &\geq 0 \\ \frac{x_1 + 2x'_2 - 4}{2x_1 + 2x'_2 + 4} &\rightarrow \min \end{aligned}$$

A feladat lineáris programozási feladattá átvált változata:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 - 16t &= 0 \\ 2y_1 + 2y_2 + 4t &= 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0, \quad t > 0 \\ y_1 + 2y_2 - 4t &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Oldjuk meg szimplex módszerrel ezt a feladatot:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & y_2 & t & b \\ \hline u_1^* & \mathbf{1} & \mathbf{1} & -16 & 0 \\ u_2^* & 2 & 2 & \mathbf{4} & 1 \\ \hline z & -1 & -2 & 4 & 0 \\ z^* & 3 & 3 & -12 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & u_1^* & y_2 & t & b \\ \hline y_1 & 1 & 1 & -16 & 0 \\ u_2^* & -2 & 0 & 36 & 1 \\ \hline z & 1 & -1 & -12 & 0 \\ z^* & -3 & 0 & 36 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & y_2 & t & b \\ \hline y_1 & \mathbf{1} & -16 & 0 \\ u_2^* & 0 & \mathbf{36} & 1 \\ \hline z & -1 & -12 & 0 \\ z^* & 0 & 36 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & y_2 & u_2^* & b \\ \hline y_1 & 1 & 16/36 & 16/36 \\ t & 0 & 1/36 & 1/36 \\ \hline z & -1 & 12/36 & 12/36 \\ z^* & 0 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} & y_2 & b \\ \hline y_1 & 1 & 4/9 \\ t & 0 & 1/36 \\ \hline z & -1 & 1/3 \end{array}$$

Az utolsó tábla már az optimális eredményt adja:

$y_1 = 4/9$, $y_2 = 0$, $t = 1/36$, $z = 1/3$ Tehát az eredeti feladat megoldása:

$$x_1 = y_1/t = (4/9)/(1/36) = 16, \quad x'_2 = y_2/t = 0/(1/36) = 0 \Rightarrow x_2 = -x'_2 = 0.$$

Az optimális érték – mivel a célfüggvényt nem változtattuk – továbbra is $z = 1/3$.

Egyszerűbb megoldás. Az eredeti

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= 16 \\x_1 &\geq 0, \quad x_2 \leq 0 \\ \frac{x_1 - 2x_2 - 4}{2x_1 - 2x_2 + 4} &\rightarrow \min\end{aligned}$$

feladat első feltételéből $x_1 = 16 + x_2$, melyet visszaírhatunk a minimalizálandó hányadosba:

$$\frac{x_1 - 2x_2 - 4}{2x_1 - 2x_2 + 4} = \frac{16 + x_2 - 2x_2 - 4}{2(16 + x_2) - 2x_2 + 4} = \frac{12 - x_2}{36} \rightarrow \min$$

Felhasználva, hogy $x_2 \leq 0$, a nevező legkisebb értéke $x_2 = 0$ -nél lesz. Így $x_1 = 16 + 0 = 16$, ahol a célfüggvény értéke $\frac{12-0}{36} = 1/3$.

8. SZÁLLÍTÁSI FELADAT

A szállítási feladat egy speciális lineáris programozási feladat, ezért szimplex módszerrel is megoldható lenne, azonban annak egy módosított változatát fogjuk használni.

A feladat során m darab raktárunk van (R_i) és n darab bolt (B_j). A raktárakban r_i egységnyi mennyiségű termék áll rendelkezésre, a boltokban pedig b_j egységnyi mennyiségű termékigény van. Amennyiben a két összeg nem egyezik meg, azaz $\sum r_i \neq \sum b_j$, fiktív raktárat vagy fiktív boltot kell létrehozni, melynek kapacitása vagy igénye a két összeg különbségével egyezik meg, valamint a szállítási költség itt természetesen 0.

(Ha valamelyik raktárból valamelyik boltba nem tudunk szállítani, ott hagyományosan egy M írandó, amivel azt fejezzük ki, hogy a kettő között végtelen nagy lenne a szállítási költség. Egy másik lehetőség, hogy a kettő között egy nagyságrendekkel nagyobb szállítási költséget írunk, mint a többi.)

Adottak továbbá a szállítás költségei, azaz hogy az i -edik raktárból a j -edik boltba mennyibe kerül (vagy milyen távolságra van, stb.) a szállítás: c_{ij} . A feladat során meg kell határoznunk azt a szállítási tervet, ahol az összköltség minimális. A feladat matematikai modellje a következő:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_{ij} &= b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &= r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min\end{aligned}$$

Az i -edik raktárból a j -edik boltba szállított mennyiségeket x_{ij} -vel jelöljük.

Természetesen felmerülhet olyan probléma is, ahol az összértéket maximalizálni szeretnénk. Erre is fogunk példát látni.

A feladat megoldásában nagy segítségünkre lesz a feladat duálisa: Az első m feltételhez vezessük be az u_i változókat, a maradék n feltételhez pedig a v_j változókat. Ezek előjelére vonatkozóan nincs megkötésünk, hiszen minden feltétel egyenlőség. A szállítási feladat duálisa tehát a következő:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m r_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max$$

Nézzünk most két konkrét példát és érdekességképpen írjuk fel a feladatot lineáris programozási feladatként, valamint a feladat duálisát is:

8.1. Példa. Három borászat három üzletet lát el borral. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az egyes borászatokból az egyes üzletekbe mekkora a szállítási költség, valamint hogy hány egységnyi bor áll rendelkezésre (kapacitás), valamint hogy az üzleteknek mekkora mennyiségre van szükségük (igény):

	igény	120	90	50
kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃
100	B ₁	50	10	20
80	B ₂	40	30	10
110	B ₃	5	80	70

Továbbá a harmadik borászat teljes kapacitással működik.

Megoldás. Mivel azt látjuk, hogy a borászatok kapacitása és az üzletek igénye nem egyezik meg ($100 + 80 + 110 = 290$, $120 + 90 + 50 = 260$), ezért $290 - 260 = 30$ kapacitással létrehozunk egy újabb, fiktív üzletet, melyben természetesen a szállítási költség 0 lesz, hiszen az ide szállított termékeket valójában nem mozgatjuk. A példa utolsó mondata azt jelenti, hogy a fiktív üzlet és a harmadik borászat között nem lesz szállítás, így oda szállítási költségként "M" kerül:

	igény	120	90	50	30
kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃	Ü ₄ *
100	B ₁	50	10	20	0
80	B ₂	40	30	10	0
110	B ₃	5	80	70	M

Most már felírhatjuk a feladatot lineáris programozási feladatként:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 80$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 110$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

$$50x_{11} + 10x_{12} + 20x_{13} + 0x_{14} + 40x_{21} + 30x_{22} + 10x_{23} + 0x_{24} + 5x_{31} + 80x_{32} + 70x_{33} + Mx_{34} \rightarrow \min$$

Az első három feltételhez az u_i , a második négyhez a v_j változókat bevezetve a feladat duálisa a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned}
u_1 + v_1 &\leq 50 & u_1 + v_2 &\leq 10 & u_1 + v_3 &\leq 20 & u_1 + v_4 &\leq 0 \\
u_2 + v_1 &\leq 40 & u_2 + v_2 &\leq 30 & u_2 + v_3 &\leq 10 & u_2 + v_4 &\leq 0 \\
u_3 + v_1 &\leq 5 & u_3 + v_2 &\leq 80 & u_3 + v_3 &\leq 70 & u_3 + v_4 &\leq M \\
100u_1 + 80u_2 + 110u_3 + 120v_1 + 90v_2 + 50v_3 + 30v_4 &\rightarrow \max
\end{aligned}$$

Ennek a feladat megoldása során még hasznát fogjuk venni.

Miután létrehoztuk fiktív üzletünket és beírtuk az M-t, ahová szükséges, a következő lépés az induló tábla meghatározása. Erre három módszert fogok megmutatni:

8.1.1. *Észak-nyugati sarok módszer:* Ennél a módszernél az észak-nyugati (bal-felső) sarokból indulunk és beírjuk a legnagyobb értéket, amit tudunk, azaz a rendelkezésre álló kapacitás és az üzlet igényének minimumát. Ez azt jelenti, hogy ennyivel csökken mind a két érték:

	igény	120	90	50	30			igény	20	90	50	30	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
100	B ₁	100				$\Rightarrow$		0	B ₁	100	–	–	–
80	B ₂							80	B ₂				
110	B ₃							110	B ₃				

A módszert addig folytatjuk, míg a felhasználható kapacitások és igények nullára nem redukálódnak:

	igény	20	90	50	30			igény	0	90	50	30	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	100	–	–	–	$\Rightarrow$		0	B ₁	100	–	–	–
80	B ₂	20						60	B ₂	20			
110	B ₃							110	B ₃	–			

		igény	0	90	50	30			igény	0	30	50	30
	kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–	$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–
	60	B ₂	20	60				0	B ₂	20	60	–	–
	110	B ₃	–					110	B ₃	–			

		igény	0	30	50	30			igény	0	0	50	30
	kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–	$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–
	0	B ₂	20	60	–	–		0	B ₂	20	60	–	–
	110	B ₃	–	30				80	B ₃	–	30		

		igény	0	0	50	30			igény	0	0	0	30
	kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–	$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–
	0	B ₂	20	60	–	–		0	B ₂	20	60	–	–
	80	B ₃	–	30	50			30	B ₃	–	30	50	

		igény	0	0	0	30			igény	0	0	0	0
	kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–	$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–
	0	B ₂	20	60	–	–		0	B ₂	20	60	–	–
	30	B ₃	–	30	50	30		0	B ₃	–	30	50	30

Ez lesz az észak-nyugati sarok módszerrel kapott induló táblánk.

8.1.2. *Minimális költségek módszere.* Ennél a módszernél a szállítási költségekre is szükségünk lesz. A módszer lényege, hogy mindig a legkisebb költségűhöz írjuk be a lehető legnagyobb mennyiséget:

szállítási költségek:

	igény	120	90	50	30
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
100	B ₁	50	10	20	0
80	B ₂	40	30	10	0
110	B ₃	5	80	70	M

induló tábla:

	igény	120	90	50	30
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
100	B ₁				30
80	B ₂				
110	B ₃				

	igény	120	90	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
70	B ₁	50	10	20	–
80	B ₂	40	30	10	–
110	B ₃	5	80	70	–

	igény	120	90	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
70	B ₁				30
80	B ₂				–
110	B ₃	110			–

	igény	10	90	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
70	B ₁	50	10	20	–
80	B ₂	40	30	10	–
0	B ₃	–	–	–	–

	igény	10	90	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
70	B ₁		70		30
80	B ₂				–
0	B ₃	110	–	–	–

	igény	10	20	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	–	–	–
80	B ₂	40	30	10	–
0	B ₃	–	–	–	–

	igény	10	20	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	70	–	30
80	B ₂			50	–
0	B ₃	110	–	–	–

	igény	10	20	0	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	–	–	–
30	B ₂	40	30	–	–
0	B ₃	–	–	–	–

	igény	10	20	0	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	70	–	30
30	B ₂		20	50	–
0	B ₃	110	–	–	–

	igény	10	0	0	0			igény	10	0	0	0	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	–	–	–	$\Rightarrow$		0	B ₁	–	70	–	30
10	B ₂	40	–	–	–			10	B ₂	10	20	50	–
0	B ₃	–	–	–	–			0	B ₃	110	–	–	–

	igény	0	0	0	0			igény	0	0	0	0	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	–	–	–	$\Rightarrow$		0	B ₁	–	70	–	30
0	B ₂	–	–	–	–			0	B ₂	10	20	50	–
0	B ₃	–	–	–	–			0	B ₃	110	–	–	–

Tehát minimális költségek módszerével
ez lesz az induló táblánk.

8.1.3. *Vogel-Korda módszer.* Ennél a módszernél minden egyes lépésben meghatározzuk minden sorban és oszlopban a két legkisebb szállítási költségű érték különbségét. Ahol ez az érték legnagyobb, oda fogjuk beírni a lehető legtöbb szállítást a kisebb értékhez:

szállítási költségek:

	igény	120	90	50	30	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$	
100	B ₁	50	10	20	0	10-0=10
80	B ₂	40	30	10	0	10-0=10
110	B ₃	5	80	70	M	70-5=65
		40-5=35	30-10=20	20-10=10	0-0=0	

induló tábla:

	igény	120	90	50	30
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
100	B ₁				
80	B ₂				
110	B ₃	110			

szállítási költségek:

	igény	10	90	50	30	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$	
100	B ₁	50	10	20	0	10-0=10
80	B ₂	40	30	10	0	10-0=10
0	B ₃	–	–	–	–	–
		50-40=10	30-10=20	20-10=10	0-0=0	

induló tábla:

$$\Rightarrow$$

	igény	10	90	50	30
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
100	B_1		90		
80	B_2				
0	B_3	110	–	–	–

szállítási költségek:

	igény	10	0	50	30	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$	
10	B_1	50	–	20	0	20-0=20
80	B_2	40	–	10	0	10-0=10
0	B_3	–	–	–	–	–
		50-40=10	–	20-10=10	0-0=0	

induló tábla:

$$\Rightarrow$$

	igény	10	0	50	30
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
10	B_1		90		10
80	B_2		–		
0	B_3	110	–	–	–

szállítási költségek:

	igény	10	0	50	20	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$	
0	B_1	–	–	–	–	–
80	B_2	40	–	10	0	10-0=0
0	B_3	–	–	–	–	–
		?	–	?	?	

induló tábla:

	igény	10	0	50	20
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B_1	–	90	–	10
80	B_2	10	–	50	20
0	B_3	110	–	–	–

Az utolsó lépésben az oszlopok közül már túl sok választási lehetőségünk nincsen, ezért az üres helyekre beírjuk a fennmaradó kapacitásokat.

Általánosságban elmondható, hogy a Vogel-Korda módszer - bár némiképp bonyolultabb a többinél - a legjobb, hiszen általában ez már pár lépésen belül a minimális összköltségű eredményt adja.

A megoldás folytatása. A módszer ismertetéséhez szükségünk lesz a szállítási költségek táblázatára és egy induló táblára. Utóbbi legyen az észak-nyugati sarok módszerrel kapott induló tábla:

szállítási költségek:					induló tábla:				
	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B_1	50	10	20	0	B_1	100	–	–	–
B_2	40	30	10	0	B_2	20	60	–	–
B_3	5	80	70	M	B_3	–	30	50	30

Induláskor a szállítási költség:

$$50 \cdot 100 + 40 \cdot 20 + 30 \cdot 60 + 80 \cdot 30 + 70 \cdot 50 + M \cdot 30 = 13500 + 30M$$

A szállítási feladat megoldásához mindkét táblára szükségünk lesz. Első körben a szállítási költségek táblával foglalkozunk: felhasználjuk, amit a duál feladat során felírtunk. Bevezetünk u és v változókat, melyek összegének értéke azokon a helyeken egyezik meg a szállítási költségekkel, ahol az induló tábla szerint történik szállítás:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = 50$	10	20	0
u_2	$u_2 + v_1 = 40$	$u_2 + v_2 = 30$	10	0
u_3	5	$u_3 + v_2 = 80$	$u_3 + v_3 = 70$	$u_3 + v_4 = M$

A következő lépésben $u_1 = 0$ választás mellett meghatározzuk az u -k és v -k értékét. Ahogy az alábbi táblázatban látjuk, a sorok és oszlopok elején lévő értékek összege éppen a kék színű számokkal egyezik meg.

	$v_1 = 50$	$v_2 = 40$	$v_3 = 30$	$v_4 = M - 40$
$u_1 = 0$	50	10	20	0
$u_2 = -10$	40	30	10	0
$u_3 = 40$	5	80	70	M

A többi helyen kiszámoljuk a $c_{ij} - u_i - v_j$ értéket. Az algoritmus akkor ér véget, ha ezek között nem fog negatív szám megjelenni.

	$v_1 = 50$	$v_2 = 40$	$v_3 = 30$	$v_4 = M - 40$
$u_1 = 0$	50	$10 - 0 - 40 = -30$	$20 - 0 - 30 = -10$	$0 - 0 - (M - 40) = -M + 40$
$u_2 = -10$	40	30	$10 - (-10) - 30 = -10$	$0 - (-10) - (M - 40) = -M + 50$
$u_3 = 40$	$5 - 40 - 50 = -85$	80	70	M

Ha ezen értékek között találunk negatív értéket, akkor javítható az optimális érték. Célszerű azt a szállítást választani, ahol ez a negatív érték a legkisebb (ezt meg is vastagítottuk). Így tehát az első borászat és a fiktív üzlet között történnie kell szállításnak. Így a szállítási táblában ide elsőként x -et írunk és elkezdődik a hurokmódszer:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B_1	100	–	–	x
B_2	20	60	–	–
B_3	–	30	50	30

A hurokmódszer lényege abban áll, hogy mivel valahová beírtunk az x értéket, ezzel az értékkel a sorában egy helyen x -szel csökkennie kell az adott értéknek, ami azt jelenti, hogy annak oszlopában egy helyen az érték x -szel növekedni fog, és így tovább. A cél, hogy ez "körbeérjen", tehát vissza az x -hez. Ezért hívjuk ezt hurokmódszernek.

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	100-x	-	-	x
B ₂	20+x	60-x	-	-
B ₃	-	30+x	50	30-x

Az x értéke a legkisebb szám azok közül, ahol $-x$ látható, azaz $x = \min\{100, 60, 30\} = 30$. Így a következő szállítási táblánk:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	70	-	-	30
B ₂	50	30	-	-
B ₃	-	60	50	-

Így tehát az újabb szállítási költség:

$$50 \cdot 70 + 0 \cdot 30 + 40 \cdot 50 + 30 \cdot 30 + 80 \cdot 60 + 70 \cdot 50 = 14700$$

Meg kell vizsgálnunk, hogy ez már az optimális érték-e, amit a szállítási költségek táblázatával tehetünk meg: bevezetjük az u és v értékeket, rögzítjük, hogy $u_1 = 0$ és ennek segítségével meghatározzuk a többi értéket, majd azokon a helyeken, ahol nem történt szállítás, kiszámoljuk a $c_{ij} - u_i + v_j$ értékeket és amennyiben találunk negatív értéket, javítható a szállítási költség és a hurokmódszer segítségével ezt megteesszük. A módszert addig folytatjuk, míg az új értékeknél sehol nem lesz negatív szám a szállítási költségeknél:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = 50$	10	20	$u_1 + v_4 = 0$
u_2	$u_2 + v_1 = 40$	$u_2 + v_2 = 30$	10	0
u_3	5	$u_3 + v_2 = 80$	$u_3 + v_3 = 70$	M

	$v_1 = 50$	$v_2 = 40$	$v_3 = 30$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	50	$10 - 0 - 40 = -30$	$20 - 0 - 30 = -10$	0
$u_2 = -10$	40	30	$10 - (-10) - 30 = -10$	$0 - (-10) - 0 = 10$
$u_3 = 40$	$5 - 40 - 50 = -85$	80	70	$M - 40 - 0 = M - 40$

Amint látható, ez még nem optimális, ezért a hurokmódszer segítségével meghatározzuk a következő szállítási táblát:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	70	–	–	30	$\Rightarrow$	B ₁	70	–	–	30
B ₂	50	30	–	–		B ₂	50-x	30+x	–	–
B ₃	x	60	50	–		B ₃	x	60-x	50	–

Itt $x = \min\{50, 60\} = 50$, vagyis az újabb szállítási tábla:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	70	–	–	30
B ₂	–	80	–	–
B ₃	50	10	50	–

A következő lépésben kiszámoljuk a szállítás költségét:

$$70 \cdot 50 + 30 \cdot 0 + 80 \cdot 30 + 50 \cdot 5 + 10 \cdot 80 + 50 \cdot 70 = 10450$$

Vizsgáljuk meg, hogy ez már optimális-e:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = 50$	10	20	$u_1 + v_4 = 0$
u_2	40	$u_2 + v_2 = 30$	10	0
u_3	$u_3 + v_1 = 5$	$u_3 + v_2 = 80$	$u_3 + v_3 = 70$	M

	$v_1 = 50$	$v_2 = 125$	$v_3 = 115$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	50	$10 - 0 - 125 = -115$	$20 - 0 - 115 = -95$	0
$u_2 = -95$	$40 - (-95) - 50 = 85$	30	$10 - (-95) - 115 = -10$	$0 - (-95) - 0 = 95$
$u_3 = -45$	5	80	70	$M - (-45) - 0 = M + 45$

Azt látjuk, hogy a táblázatban továbbra is szerepelnek negatív értékek, ezért a megfelelő helyre beírjuk x -et és a hurokmódszert alkalmazzuk:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	70-x	x	–	30	$x = \min\{70, 10\} = 10 \implies$	B ₁	60	10	–	30
B ₂	–	80	–	–		B ₂	–	80	–	–
B ₃	50+x	10-x	50	–		B ₃	60	–	50	–

A szállítási költség ekkor:

$$60 \cdot 50 + 10 \cdot 10 + 30 \cdot 0 + 80 \cdot 30 + 60 \cdot 5 + 50 \cdot 70 = 10300$$

Vizsgáljuk meg, ez már optimális-e:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = 50$	$u_1 + v_2 = 10$	20	$u_1 + v_4 = 0$
u_2	40	$u_2 + v_2 = 30$	10	0
u_3	$u_3 + v_1 = 5$	80	$u_3 + v_3 = 70$	M

	$v_1 = 50$	$v_2 = 10$	$v_3 = 115$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	50	10	$20 - 0 - 115 = -95$	0
$u_2 = 20$	$40 - 20 - 50 = -30$	30	$10 - 20 - 115 = -125$	$0 - 20 - 0 = -20$
$u_3 = -45$	5	$80 - (-45) - 10 = 135$	70	$M - (-45) - 0 = M + 45$

Ismét találtunk negatív értékeket, ezért tovább számolunk a hurokmódszerrel:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	60-x	10+x	-	30	$x = \min\{60, 80, 50\} = 50 \implies$	B ₁	10	60	-	30
B ₂	-	80-x	x	-		B ₂	-	30	50	-
B ₃	60+x	-	50-x	-		B ₃	110	-	-	-

Itt a szállítási költség:

$$10 \cdot 50 + 60 \cdot 10 + 30 \cdot 0 + 30 \cdot 30 + 50 \cdot 10 + 110 \cdot 5 = 3050$$

Nézzük meg, lehet-e ezen a szállítási költségen javítani:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = 50$	$u_1 + v_2 = 10$	20	$u_1 + v_4 = 0$
u_2	40	$u_2 + v_2 = 30$	$u_2 + v_3 = 10$	0
u_3	$u_3 + v_1 = 5$	80	70	M

	$v_1 = 50$	$v_2 = 10$	$v_3 = -10$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	50	10	$20 - 0 - (-10) = 30$	0
$u_2 = 20$	$40 - 50 - 20 = -30$	30	10	$0 - 20 - 0 = -20$
$u_3 = -45$	5	$80 - (-45) - 10 = 115$	$70 - (-45) - (-10) = 125$	$M - (-45) - 0 = M + 45$

Lehet javítani a szállítási költségen, ezért hurokmódszerrel folytatjuk az algoritmust:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	10-x	60+x	-	30	$x = \min\{10, 30\} = 10 \implies$	B ₁	-	70	-	30
B ₂	x	30-x	50	-		B ₂	10	20	50	-
B ₃	110	-	-	-		B ₃	110	-	-	-

Ellenőrizzük, hogy ez már optimális-e:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	50	$u_1 + v_2 = 10$	20	$u_1 + v_4 = 0$
u_2	$u_2 + v_1 = 40$	$u_2 + v_2 = 30$	$u_2 + v_3 = 10$	0
u_3	$u_3 + v_1 = 5$	80	70	M

	$v_1 = 20$	$v_2 = 10$	$v_3 = -10$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	$50 - 0 - 20 = 30$	10	$20 - 0 - (-10) = 30$	0
$u_2 = 20$	40	30	10	$0 - 20 - 0 = -20$
$u_3 = -15$	5	$80 - (-15) - 10 = 85$	$70 - (-15) - (-10) = 95$	$M - (-15) - 0 = M + 15$

Sajnos még ez sem az optimális szállítás, ezért használjuk a hurokmódszert a szállítási táblában:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	-	70+x	-	30-x	$x = \min\{30, 20\} = 20 \implies$	B ₁	-	90	-	10
B ₂	10	20-x	50	x		B ₂	10	-	50	20
B ₃	110	-	-	-		B ₃	110	-	-	-

Ekkor a szállítási költség:

$$90 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 10 \cdot 40 + 50 \cdot 10 + 20 \cdot 0 + 110 \cdot 5 = 2350$$

Vizsgáljuk meg, hogy ez már az optimális szállítás-e:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	50	$u_1 + v_2 = 10$	20	$u_1 + v_4 = 0$
u_2	$u_2 + v_1 = 40$	30	$u_2 + v_3 = 10$	$u_2 + v_4 = 0$
u_3	$u_3 + v_1 = 5$	80	70	M

	$v_1 = 40$	$v_2 = 10$	$v_3 = 10$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	$50 - 0 - 40 = 10$	10	$20 - 0 - 10 = 10$	0
$u_2 = 0$	40	$30 - 0 - 10 = 20$	10	0
$u_3 = -35$	5	$80 - (-35) - 10 = 105$	$70 - (-35) - 10 = 95$	$M - (-35) - 0 = M + 35$

Tehát összefoglalva:

szállítási költségek:					szállítás:				
	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	50	10	20	0	B ₁	–	90	–	10
B ₂	40	30	10	0	B ₂	10	–	50	20
B ₃	5	80	70	M	B ₃	110	–	–	–

A szállítási összköltség: 2350.

8.2. Megjegyzés. Ha a kapott eredményt és a Vogel-Korda módszerrel meghatározott induló táblát összevetjük, azt látjuk, hogy a kettő megegyezik. Ami azt jelenti, hogy a Vogel-Korda módszer valóban jó induló táblát ad.

8.3. Példa. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy egy szőlősgazda melyik szőlőfajtából mennyit kínál eladásra és hogy az egyes vevők mennyit fizetnének azok kilójáért. Mivel a vevők étkezési céllal veszik a szőlőt, ezért pusztán azt határozzák meg, hogy mennyi szőlőre van szükségük. Határozzuk meg, hogy a szőlősgazda melyik vevőnek melyik fajtából mennyit adjon ahhoz, hogy a bevétele maximális legyen!

	rendelkezésre áll	100 kg	150 kg	250 kg
igény		csabagyöngye	saszla	szőlőskertek királynője
200 kg	Ármin	100 Ft	120 Ft	150 Ft
120 kg	Árpád	80 Ft	130 Ft	120 Ft
180 kg	Áron	110 Ft	110 Ft	130 Ft

Megoldás. Az első feladatunk, hogy ellenőrizzük, hogy az igény és a rendelkezésre álló mennyiség összegei megegyeznek-e, egyébként fiktív vevőt vagy fiktív fajtát kellene bevezetnünk, természetesen 0 Ft-os áron. Itt most az igények összege $200 + 120 + 180 = 500$ kg és a rendelkezésre álló szőlőmennyiség $100 + 150 + 250 = 500$ kg, tehát új sor vagy oszlop bevezetésére nincs szükség.

Mivel az eredeti célunk, hogy az összbevételt maximalizáljuk, a feladatot át kell írunk minimum feladatra, hiszen arra már ismerjük a megoldási módszert. Ehhez megkeressük a legnagyobb szállítási költséget (jelen esetben a kialakított vételárat) és minden egyes árat kivonunk belőle:

	rendelkezésre áll	100 kg	150 kg	250 kg
igény		csabagyöngye	saszla	szőlőskertek királynője
200 kg	Ármin	$150-100=50$ Ft	$150-120=30$ Ft	$150-150=0$ Ft
120 kg	Árpád	$150-80=70$ Ft	$150-130=20$ Ft	$150-120=30$ Ft
180 kg	Áron	$150-110=40$ Ft	$150-110=40$ Ft	$150-130=20$ Ft

Innentől kezdve ezzel a táblázattal foglalkozunk és ugyanúgy járunk el, mint az előző példában.

A feladat megoldásához szükségünk lesz egy induló táblára, amit a Vogel-Korda módszerrel határozzunk meg. Hiszen mint láttuk, ez a legtöbb esetben már optimális vagy közel optimális megoldást ad.

	kapacitás	100	150	250	
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃	
200	Á ₁	50	30	0	$30-0=30$
120	Á ₂	70	20	30	$30-20=10$
180	Á ₃	40	40	20	$40-20=20$
		$50-40=10$	$30-20=10$	$20-0=20$	

		kapacitás	100	150	250
		igény	Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
⇒	200	Á ₁			200
	120	Á ₂			
	180	Á ₃			

	kapacitás	100	150	50	
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃	
0	Á ₁	–	–	–	–
120	Á ₂	70	20	30	$30-20=10$
180	Á ₃	40	40	20	$40-20=20$
		$70-40=30$	$40-20=20$	$30-20=10$	

		kapacitás	100	150	50
		igény	Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
⇒	0	Á ₁	–	–	200
	120	Á ₂			
	180	Á ₃	100		

	kapacitás	0	150	50	
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃	
0	Á ₁	–	–	–	–
120	Á ₂	–	20	30	30-20=10
80	Á ₃	–	40	20	40-20= 20
		–	40-20=20	30-20=10	

	kapacitás	0	150	50
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
0	Á ₁	–	–	200
120	Á ₂	–		
80	Á ₃	100		50

	kapacitás	0	150	0	
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃	
0	Á ₁	–	–	–	–
120	Á ₂	–	20	–	?
30	Á ₃	–	40	–	?
		–	40-20=20	–	

	kapacitás	0	150	0
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
0	Á ₁	–	–	200
120	Á ₂	–	120	–
30	Á ₃	100	30	50

Tehát a minimalizálásra átirrt feladat szállítási költségei táblája és az induló tábla a következő:

szállítási költségek:

	Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
Á ₁	50	30	0
Á ₂	70	20	30
Á ₃	40	40	20

induló tábla:

	Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
Á ₁	–	–	200
Á ₂	–	120	–
Á ₃	100	30	50

Vizsgáljuk meg, hogy ez az optimális eredményt adja-e:

	v_1	v_2	v_3
u_1	50	30	$u_1 + v_3 = \mathbf{0}$
u_2	70	$u_2 + v_2 = \mathbf{20}$	30
u_3	$u_3 + v_1 = \mathbf{40}$	$u_3 + v_2 = \mathbf{40}$	$u_3 + v_3 = \mathbf{20}$

	$v_1 = 20$	$v_2 = 20$	$v_3 = 0$
$u_1 = 0$	50-0-20=30	30-0-20=10	0
$u_2 = 0$	70-0-20=50	20	30-0-0=30
$u_3 = 20$	40	40	20

Mivel a $c_{ij} - u_i - v_j$ értékek mind pozitívak, ezért az induló tábla egyúttal az optimális is.

Tehát a feladat megoldása a következő:

vételárak:

	rendelkezésre áll	100 kg	150 kg	250 kg
igény		csabagyöngye	saszla	szőlőskertek
200 kg	Ármin	100 Ft	120 Ft	150 Ft
120 kg	Árpád	80 Ft	130 Ft	120 Ft
180 kg	Áron	110 Ft	110 Ft	130 Ft

szállítások táblája:

	Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
Á ₁	–	–	200
Á ₂	–	120	–
Á ₃	100	30	50

A szőlősgazda bevétele:

$$200 \cdot 150 + 120 \cdot 130 + 100 \cdot 110 + 30 \cdot 110 + 50 \cdot 130 = 66400$$

Ezt a bevételt a szőlősgazda úgy érte el, hogy Árminnak szőlőskertek királynőjéből 200 kg-ot adott el, Árpádnak 120 kg saszla szőlőt és Áronnak 100 kg csabagyöngyét, 30 kg saszlát és 50 kg szőlőskertek királynőjét.

8.4. Megjegyzés. A feladat megoldását nagyban módosítaná, hogyha például Ármin nem szeretné a szőlőskertek királynője fajtát és nem is vásárolna belőle. Ebben az esetben amikor a feladatot minimumfeladattá alakítjuk, a táblázat megfelelő helyére M-et kellene írunk.

Amint sejthető, ebben az esetben teljesen más megoldásra vezetne a feladat.

8.5. Megjegyzés. Amennyiben a $c_{ij} - u_i - v_j$ értékek között 0 szerepelne, az azt jelenti, hogy több optimális megoldás is létezik. Ha ide x értéket szállítunk, akkor a hurokmódszerrel meghatározhatjuk, hogy x milyen értékek között mozoghat és hogy ekkor a többi szállítás hogyan alakul.

9. HOZZÁRENDELÉSI FELADAT

A hozzárendelési feladat a szállítási feladat egy speciális változata. Röviden a feladat leírása a következő: Van n feladat és ugyanennyi dolgozó. Minden feladatot el tud végezni minden dolgozó, azonban nem ugyanolyan költséggel teszik azt. Általánosan az i -edik dolgozó a j -edik feladat elvégzését c_{ij} összegért csinálja meg. A feladat megoldása során minden dolgozónak munkát kell adnunk és minden feladatot el kell végeztetnünk úgy, hogy összességében a lehető legkisebb költséggel végezzék el a feladatot.

Az így leírt feladat matematikai modellje a következő:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad (i, j = 1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Itt az $x_{ij} = 0$, ha az i -edik dolgozó nem a j -edik munkát kapja és $x_{ij} = 1$, ha igen.

Tehát a célunk, hogy egy $n \times n$ méretű költségmátrixból n darab számot válasszuk úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy választott elem legyen, melyek összege a lehető legkisebb.

9.1. Megjegyzés. A hozzárendelési feladat, mint a bevezetésben is szerepelt, a szállítási feladat speciális esete, hiszen úgy is tekinthetünk rá, mintha a kapacitások és igények mennyisége 1 lenne. Azonban az ilyen típusú (hozzárendelési) feladatok megoldására a speciális voltak miatt más, egyszerűbb módszert fogunk használni.

A módszert az alábbi példán keresztül mutatjuk be:

9.2. Példa. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy öt különböző feladat elvégzésére öt alkalmazott mennyi idő alatt képes. Melyik dolgozó melyik feladatot végezze el ahhoz, hogy összességében a leggyorsabban el legyen végezve minden munka?

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	13	13	21	6	22
D2	12	13	15	4	18
D3	20	20	20	10	22
D4	26	26	24	12	27
D5	9	7	8	3	9

Megoldás. A feladat megoldásánál első lépésben sor- és oszlopredukcióra van szükség. Ez azt jelenti, hogy minden sorból, majd minden oszlopból ki kell vonnunk a legkisebb értéket. Így egy olyan táblázathoz jutunk, ahol minden sorban és minden oszlopban legalább 1-1 darab 0 érték fog szerepelni:

	F1	F2	F3	F4	F5			F1	F2	F3	F4	F5	
D1	13	13	21	6	22	-6	⇒	D1	7	7	15	0	16
D2	12	13	15	4	18	-4		D2	8	9	11	0	14
D3	20	20	20	10	22	-10		D3	10	10	10	0	12
D4	26	26	24	12	27	-12		D4	14	14	12	0	15
D5	9	7	8	3	9	-3		D5	6	4	5	0	6
									-6	-4	-5	-6	

Amint látjuk, itt már minden sorban és minden oszlopban találunk nullákat. A feladatunk, hogy ebből minél több nullát be tudjunk jelölni. Ezeket függetleneknek nevezzük. Általában táblánál ezeket a nullákat be szoktam karikázni, itt pirossal jelöljük. A kiválasztás módjára javasolnám, hogy olyan sorokból vagy oszlopokból válasszunk nullát, ahol csak az az egyetlen nulla szerepel. Innentől kezdve annak oszlopából és sorából már nem választhatunk ki több nullát, hiszen nem lennének függetlenek.

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	1	3	10	0	10
D2	2	5	6	0	8
D3	4	6	5	0	6
D4	8	10	7	0	9
D5	0	0	0	0	0

Amint látjuk, többféleképpen is kiválaszthatunk volna ezt a két nullát, de több független nulla nincs a táblázatban, hiszen vagy a sorban vagy az oszlopában már választottunk ki nullát.

Tehát a független nullák száma most nulla. A folytatásban az összes táblázatban szereplő nullát le kellene fednünk vonalakkal. A táblán egyszerűen áthúznám a kiválasztott sort vagy oszlopot, itt szürkére színezem a választottakat.

A nullák lefedésénél elegendő annyi vonal, ahány független nulla szerepelt a táblázatban!!!

Ezért azt javaslom, hogy a független nullák kiválasztásával ellentétes módon azokat a sorokat vagy oszlopokat érdemes elsőként kiválasztani, amelyben sok nulla szerepel. Itt ez a negyedik oszlopban és az utolsó sorban van.

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	1	3	10	0	10
D2	2	5	6	0	8
D3	4	6	5	0	6
D4	8	10	7	0	9
D5	0	0	0	0	0

A megoldás következő lépése, hogy bevezetünk egy x értéket, mely az át nem húzott értékek közül a legkisebb. Ez most $x = 1$.

Ennek segítségével egy új táblázatot írunk fel a következőképpen:

- az át nem húzott (fehéren maradt) értékekből kivonjuk x -et
- az egyszer áthúzott értékek (világosszürke cellákban) változatlanok maradnak
- a kétszer áthúzott értékekhez (sötétszürke cellákban) hozzáadjuk x -et:

	F1	F2	F3	F4	F5		F1	F2	F3	F4	F5
D1	1-1	3-1	10-1	0	10-1	D1	0	2	9	0	9
D2	2-1	5-1	6-1	0	8-1	D2	1	4	5	0	7
D3	4-1	6-1	5-1	0	6-1	D3	3	5	4	0	5
D4	8-1	10-1	7-1	0	9-1	D4	7	9	6	0	8
D5	0	0	0	0+1	0	D5	0	0	0	1	0

Az így kapott táblázatban ismét független nullákat keresünk

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	0	2	9	0	9
D2	1	4	5	0	7
D3	3	5	4	0	5
D4	7	9	6	0	8
D5	0	0	0	1	0

A táblázatban három független nullát tudtunk megjelölni, így három vonallal le tudjuk fedni az összes táblázatbeli nullát:

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	0	2	9	0	9
D2	1	4	5	0	7
D3	3	5	4	0	5
D4	7	9	6	0	8
D5	0	0	0	1	0

$x = 2$, melyet a megfelelő elemekből (fehér) kivonunk, illetve a megfelelő elemekhez (sötétszürke) hozzáadunk.

Az algoritmust addig folytatjuk, amíg minden sorban és minden oszlopban meg nincs jelölve pirossal (bekarikázva) egy-egy nulla érték. A következő táblázatokban a független nullák mellett már a nullákat lefedő "vonalak" is ábrázoltuk.

	F1	F2	F3	F4	F5			F1	F2	F3	F4	F5
D1	0	0	7	0	7	$x = 1$ $\Rightarrow$	D1	0	0	7	1	7
D2	1	2	3	0	5		D2	0	1	2	0	4
D3	3	3	2	0	3		D3	2	2	1	0	2
D4	7	7	4	0	6		D4	6	6	3	0	5
D5	2	0	0	3	0		D5	2	0	0	4	0

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	1	0	7	2	7
D2	0	0	1	0	3
D3	2	1	0	0	1
D4	6	5	2	0	4
D5	3	0	0	5	0

Amint látjuk, az utolsó táblázatban már minden sorban és minden oszlopban van jelölt nulla (amik függetlenek is). Ez azt jelenti, hogy optimális megoldáshoz jutottunk, így látjuk, hogy például az első feladatot a második dolgozó, a második feladatot az első dolgozó fogja kapni, stb.

A feladatok elvégzéséhez szükséges idő pedig az eredeti táblázatból olvasható le:

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	13	13	21	6	22
D2	12	13	15	4	18
D3	20	20	20	10	22
D4	26	26	24	12	27
D5	9	7	8	3	9

A megoldás tehát: $13 + 12 + 20 + 12 + 9 = 66$.

A következő példában megnézzük, hogyan kezelhető, ha nem az összegek minimumát, hanem maximumát keresi a feladat, esetleg ha több feladat van, mint dolgozó vagy fordítva, valamint ha esetleg valamelyik dolgozó valamelyik feladatot nem tudja elvégezni:

9.3. Példa. Egy iskolából nyitótáncára 6 lány és 4 fiú jelentkezett. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy melyik lány melyik fiúval milyen szívesen táncolna egy 0-10 skálán.

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	6	5	8	10	9	5
F2	6	4	7	8	6	5
F3	5	5	6	8	6	3
F4	7	7	6	9	5	4

A feladatunk, hogy alkossuk meg a 4 fiú-lány párt úgy, hogy a lányok összességében minél boldogabban legyenek és a negyedik lány mindenképpen kapjon maga mellé párt.

Megoldás. A legszembetűnőbb probléma, és egyben elsőként megoldandó, hogy a lányok és fiúk száma megegyezzen. Ez úgy érhető el, hogy két fiktív fiúval bővítjük a táblázatot. Természetesen egyik lány sem szeretne "velük" táncolni, így ezekbe a sorokba nullák kerülnek:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	6	5	8	10	9	5
F2	6	4	7	8	6	5
F3	5	5	6	8	6	3
F4	7	7	6	9	5	4
F5*	0	0	0	0	0	0
F6*	0	0	0	0	0	0

A feladat maximális összeget keres, így a következő teendőnk a feladatot minimumkereső feladattá átalakítani. Erre, a szállítási feladathoz hasonlóan úgy kerül sor, hogy megkeressük a táblázat legnagyobb értékét (10) és a táblázat minden egyes elemét kivonjuk belőle:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	4	5	2	0	1	5
F2	4	6	3	2	4	5
F3	5	5	4	2	4	7
F4	3	3	4	1	5	6
F5*	10	10	10	10	10	10
F6*	10	10	10	10	10	10

A következő lépésben felhasználjuk, hogy a negyedik lánynak mindenképpen táncolnia kell, így a fiktív fiúk sorában a negyedik lány oszlopába bevezetünk egy M értéket. Ezt a szállítási feladat egyik példájában is alkalmaztuk.

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	4	5	2	0	1	5
F2	4	6	3	2	4	5
F3	5	5	4	2	4	7
F4	3	3	4	1	5	6
F5*	10	10	10	M	10	10
F6*	10	10	10	M	10	10

A sor- és oszlopredukció (a sorrend mindegy) után már minden sorban és minden oszlopban fog szerepelni nulla.

	L1	L2	L3	L4	L5	L6				L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	4	5	2	0	1	5			F1	4	5	2	0	1	5
F2	4	6	3	2	4	5	−2		F2	2	4	1	0	2	3
F3	5	5	4	2	4	7	−2	⇒	F3	3	3	2	0	2	5
F4	3	3	4	1	5	6	−1		F4	2	2	3	0	4	5
F5*	10	10	10	M	10	10	−10		F5*	0	0	0	M	0	0
F6*	10	10	10	M	10	10	−10		F6*	0	0	0	M	0	0

Miután minden sorban és minden oszlopban találunk nullákat, a független nullák keresését és a nullák lefedését, új táblázat meghatározását ismételjük, míg minden sorban és minden oszlopban be nem tudunk független nullákat jelölni. Ez fogja megadni, hogy kik lesznek a párok.

	L1	L2	L3	L4	L5	L6			L1	L2	L3	L4	L5	L6	
F1	4	5	2	0	1	5	⇒		F1	4	5	2	0	1	5
F2	2	4	1	0	2	3			F2	2	4	1	0	2	3
F3	3	3	2	0	2	5			F3	3	3	2	0	2	5
F4	2	2	3	0	4	5			F4	2	2	3	0	4	5
F5*	0	0	0	M	0	0			F5*	0	0	0	M	0	0
F6*	0	0	0	M	0	0			F6*	0	0	0	M	0	0

		L1	L2	L3	L4	L5	L6			L1	L2	L3	L4	L5	L6
$x = 1$ $\Rightarrow$	F1	3	4	1	0	0	4	$\Rightarrow$	F1	3	4	1	0	0	4
	F2	1	3	0	0	1	2		F2	1	3	0	0	1	2
	F3	2	2	1	0	1	4		F3	2	2	1	0	1	4
	F4	1	1	2	0	3	4		F4	1	1	2	0	3	4
	F5*	0	0	0	M	0	0		F5*	0	0	0	M	0	0
	F6*	0	0	0	M	0	0		F6*	0	0	0	M	0	0

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
$x = 1$ $\Rightarrow$	F1	3	4	1	1	0	4
	F2	1	3	0	1	1	2
	F3	1	1	0	0	0	3
	F4	0	0	1	0	2	3
	F5*	0	0	0	M	0	0
	F6*	0	0	0	M	0	0

Amint látjuk, itt már minden sorban és oszlopban pontosan egy darab nulla van jelölve, így ez már optimális. Ha ezeket a párokat állítjuk össze, akkor tudunk leginkább a lányok kedvére tenni.

A táblázatban azt is látjuk, hogy mindegy lenne, hogy a negyedik fiút az első vagy a második lány kapja párnak. Többféleképpen is ki tudtuk volna választani a független nullákat. Ez mindössze annyit jelent, hogy az optimális értéket több párosításból is visszakapnánk.

Nézzük meg, hogy ez a párosítás mit is jelent:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	6	5	8	10	9	5
F2	6	4	7	8	6	5
F3	5	5	6	8	6	3
F4	7	7	6	9	5	4

A fenti táblázat alapján valójában mindegy, hogy az első vagy a második lány táncol a negyedik fiúval, hiszen mindketten 7-et jelöltek meg a skálán.

Az összérték: $9 + 7 + 8 + 7 = 31$