

Numerikus analízis - 9. gyakorlat

dr. Földvári Attila

A feladatok dr. Nemoda Dóra: Numerikus módszerek - Numerikus analízis gyakorló feladatok című feladatsorából származnak. Többnyire.

1. Az f függvényről az alábbi adatok ismertek:

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$f(x)$	1.39	1.43	1.5	1.42	1.31	1.18	1.15	1.12	0.9

Számítsa ki $\int_{1.1}^{1.9} f(x)dx$ integrál közelítő értékeit!

- a) Használjon az összetett trapéz formulát $h = 0.1$ felosztás mellett!
- b) Menny az a) feladatban kapott közelítés utólagos hibája?
- c) Használjon az összetett Simpson formulát $h = 0.1$ felosztás mellett!
- d) Menny az c) feladatban kapott közelítés utólagos hibája?

- a) Összetett trapéz formula

$$T_8(f) = \frac{0.1}{2} \cdot (1.39 + 2 \cdot 1.43 + 2 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1.42 + 2 \cdot 1.31 + 2 \cdot 1.18 + 2 \cdot 1.15 + 2 \cdot 1.12 + 0.9)$$

$$T_8(f) = 1.0255$$

- b) Utólagos hibabecslés összetett trapéz formulára

$$T_4(f) = \frac{0.2}{2} \cdot (1.39 + 2 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1.31 + 2 \cdot 1.15 + 0.9)$$

$$T_4(f) = 1.021$$

$$|T_8(f) - T_4(f)| = |1.0255 - 1.021| = 0.0045$$

- c) Összetett Simpson formula

$$S_8(f) = \frac{0.1}{3} \cdot (1.39 + 4 \cdot 1.43 + 2 \cdot 1.5 + 4 \cdot 1.42 + 2 \cdot 1.31 + 4 \cdot 1.18 + 2 \cdot 1.15 + 4 \cdot 1.12 + 0.9)$$

$$S_8(f) = 1.027$$

- d) Utólagos hibabecslés összetett Simpson formulára

$$S_4(f) = \frac{0.2}{3} \cdot (1.39 + 4 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1.31 + 4 \cdot 1.15 + 0.9)$$

$$S_4(f) = 1.034$$

$$|S_8(f) - S_4(f)| = |1.027 - 1.034| = 0.007$$

2. Számítsa ki $\int_1^5 \ln(2x)dx$ integrál közelítő értékeit!

- a) Használjon az összetett trapéz formulát $n = 8$ felosztás mellett!
 b) Menny az a) feladatban kapott közelítés előzetes hibája?
 c) Használjon az összetett Simpson formulát $n = 4$ felosztás mellett!
 d) Menny az c) feladatban kapott közelítés előzetes hibája?

a) Összetett trapéz formula

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x)$	$\ln 2$	$\ln 3$	$\ln 4$	$\ln 5$	$\ln 6$	$\ln 7$	$\ln 8$	$\ln 9$	$\ln 10$

$$\begin{aligned} T_8(f) &= \frac{0.5}{2} \cdot (\ln 2 + 2 \cdot \ln 3 + 2 \cdot \ln 4 + 2 \cdot \ln 5 + 2 \cdot \ln 6 + 2 \cdot \ln 7 + 2 \cdot \ln 8 + 2 \cdot \ln 9 + \ln 10) \\ &= \frac{0.5}{2} \cdot \ln(2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot 9^2 \cdot 10) \\ T_8(f) &\approx 6.8033 \end{aligned}$$

b) Előzetes hibabecslés összetett trapéz formulára

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad f''(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad M_2 \geq 1$$

$$\left| \int_1^5 \ln(2x)dx - T_8(f) \right| \leq \frac{(5-1)^3}{12 \cdot 8^2} = \frac{1}{12}$$

c) Összetett Simpson formula

$$\begin{aligned} S_4(f) &= \frac{1}{3} \cdot (\ln 2 + 4 \cdot \ln 4 + 2 \cdot \ln 6 + 4 \cdot \ln 8 + \ln 10) = \frac{1}{3} \cdot \ln(2 \cdot 4^4 \cdot 6^2 \cdot 8^4 \cdot 10) \\ S_4(f) &\approx 6.8141 \end{aligned}$$

d) Előzetes hibabecslés összetett Simpson formulára

$$f''(x) = -1 \cdot x^{-2} \quad f'''(x) = 2 \cdot x^{-3} \quad f^{(4)}(x) = -6 \cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

$$M_4 \geq 6$$

$$\left| \int_1^5 \ln(2x)dx - S_4(f) \right| \leq \frac{(5-1)^5}{180 \cdot 4^4} \cdot 6 = \frac{2}{15}$$

3. Az $\int_1^2 \ln(x^2) dx$ integrált összetett trapéz illetve összetett Simpson formulával közelítve, hány részre osszuk az intervallumot, hogy a hiba kisebb legyen, mint 0.005?

a) Előzetes hibabecslés összetett trapéz formulára

$$f(x) = \ln(x^2) \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1} \quad f''(x) = -2 \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$\begin{aligned} M_2 &\geq 2 \\ \frac{(2-1)^3}{12 \cdot n^2} \cdot 2 &\leq 0.005 \\ \frac{100}{3} &\leq n^2 \\ 5.7735 &\leq n \\ n &= 6 \end{aligned}$$

b) Előzetes hibabecslés összetett Simpson formulára

$$f''(x) = -2 \cdot x^{-2} \quad f'''(x) = 4 \cdot x^{-3} \quad f^{(4)}(x) = -12 \cdot x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$$

$$\begin{aligned} M_4 &\geq 12 \\ \frac{(2-1)^5}{180 \cdot n^4} \cdot 12 &\leq 0.005 \\ \frac{400}{3} &\leq n^4 \\ 3.39 &\leq n \\ n &= 4 \end{aligned}$$