

Numerikus analízis - 8. gyakorlat

dr. Földvári Attila

A feladatok dr. Nemoda Dóra: Numerikus módszerek - Numerikus analízis gyakorló feladatok című feladatsorából származnak. Többnyire.

1. Írja fel az alábbi pontokra négyzetesen legjobban közelítő $f(x) = a_1 \cdot x + a_0$ alakú függvényt!

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 2 & 3 & 3 & 5 \end{array}$$

a) $A \cdot \mathbf{a} = y$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) $A^T A \cdot \mathbf{a} = A^T y$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \end{pmatrix}$$

c) az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} a_1 & a_0 & \\ \hline 14 & 6 & 24 \\ 6 & 4 & 13 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} a_0 & a_1 & \\ \hline 4 & 6 & 13 \\ 6 & 14 & 24 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} a_0 & a_1 & \\ \hline 4 & 6 & 13 \\ 0 & 5 & 4.5 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 19/10 \end{pmatrix}$$

d) a keresett függvény:

$$f(x) = \frac{9}{10} \cdot x + \frac{19}{10}$$

2. Írja fel az alábbi pontokra négyzetesen legjobban közelítő $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ alakú függvényt!

$$\begin{array}{c|cccc} x & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

a) $A \cdot \mathbf{a} = y$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $A^T A \cdot \mathbf{a} = A^T y$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} a_2 & a_1 & a_0 & \\ \hline 34 & 0 & 10 & 21 \\ 0 & 10 & 0 & -3 \\ 10 & 0 & 4 & 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & \\ \hline 4 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 10 & 0 & -3 \\ 10 & 0 & 34 & 21 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & \\ \hline 4 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 10 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -3/10 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

d) a keresett függvény:

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{3}{10} \cdot x - \frac{1}{6}$$

3. Adjunk közelítést harmadfokú Lagrange polinom segítségével az $f(2.2)$ értékre, ha az f függvényről az alábbiakat tudjuk:

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	11	-1	2	0	0

Adja meg a közelítéshez használt Lagrange polinomot is!

a) táblázat

x	1	2	3
$f(x)$	-1	2	0

b) Lagrange segédfüggvények

$$l_1(x) = \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{(1-2) \cdot (1-3)} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 5x + 6)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-3)}{(2-1) \cdot (2-3)} = -x^2 + 4x - 3$$

c) Lagrange polinom

$$p(x) = -1 \cdot \frac{1}{2} (x^2 - 5x + 6) + 2 \cdot (-x^2 + 4x - 3) + 0 \cdot l_3(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - 9$$

d) közelítés

$$f(x) \approx p(x) = -\frac{5}{2} \cdot 2.2^2 + \frac{21}{2} \cdot 2.2 - 9 = 2$$