# Numerikus analízis - 7. gyakorlat

dr. Földvári Attila

A feladatok dr. Nemoda Dóra: Numerikus módszerek - Numerikus analízis gyakorló feladatok című feladatsorából származnak.

1. Adjon közelítést az $A\mathbf{x} = b$ lineáris egyenletrendszer megoldására Jacobi-iteráció és Seidel-iteráció segítségével! Mindkét esetben adjon hibabecslést $\mathbf{x}_3$-ra!

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -3 & 10 & 2 \\ 2 & -5 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*a)* diagonális domináns

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -3 & 10 & 2 \\ 2 & -5 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*b)* $B$ mátrix, $c$ vektor, $q$ érték

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ -0.1 \end{pmatrix} \qquad q = 0.7$$

*c)* Jacobi-iteráció

*α)* első közelítés:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x} \,||_\infty \le \frac{0.7}{1-0.7} \cdot \left|\left| \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty = 2.1$$

*β)* második közelítés

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.49 \\ 0.18 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x} \,||_\infty \le \frac{0.7}{1-0.7} \cdot \left|\left| \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.49 \\ 0.18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty \le 0.2568$$

*γ)* harmadik közelítés

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.49 \\ 0.18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.162 \\ 0.518 \\ 0.109 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}\,||_\infty \leq \frac{0.7}{1-0.7} \cdot \left|\left| \begin{pmatrix} 0.162 \\ 0.518 \\ 0.109 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.49 \\ 0.18 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty \leq 0.1658$$

*d)* Seidel-iteráció

*α)* első közelítés:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & + & 0.2 \cdot 1 & + & (-0.2) \cdot 1 \\ 0.3 \cdot {\color{red}0.1} & + & 0 \cdot 1 & + & (-0.2) \cdot 1 \\ 0.3 \cdot {\color{red}0.1} & + & 0.5 \cdot {\color{blue}0.33} & + & 0 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{red}0.1} \\ {\color{blue}0.33} \\ 0.045 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\,||_\infty \leq \frac{0.7}{1-0.7} \cdot \left|\left| \begin{pmatrix} {\color{red}0.1} \\ {\color{blue}0.33} \\ 0.045 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty \leq 2.2284$$

*β)* második közelítés:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0.1 & + & 0.2 \cdot 0.33 & + & (-0.2) \cdot 0.045 \\ 0.3 \cdot {\color{red}0.157} & + & 0 \cdot 0.33 & + & (-0.2) \cdot 0.045 \\ 0.3 \cdot {\color{red}0.157} & + & 0.5 \cdot {\color{blue}0.5381} & + & 0 \cdot 0.045 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{red}0.157} \\ {\color{blue}0.5381} \\ 0.1376 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\,||_\infty \leq \frac{0.7}{1-0.7} \cdot \left|\left| \begin{pmatrix} {\color{red}0.157} \\ {\color{blue}0.5381} \\ 0.1376 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.33 \\ 0.045 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty \leq 0.4856$$

*γ)* harmadik közelítés:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0.157 & + & 0.2 \cdot 0.5381 & + & (-0.2) \cdot 0.1376 \\ 0.3 \cdot {\color{red}0.1801} & + & 0 \cdot 0.5381 & + & (-0.2) \cdot 0.1376 \\ 0.3 \cdot {\color{red}0.1801} & + & 0.5 \cdot {\color{blue}0.5265} & + & 0 \cdot 0.1376 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{red}0.1801} \\ {\color{blue}0.5265} \\ 0.1272 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}\,||_\infty \leq \frac{0.7}{1-0.7} \cdot \left|\left| \begin{pmatrix} {\color{red}0.1801} \\ {\color{blue}0.5265} \\ 0.1272 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.157 \\ 0.5381 \\ 0.1376 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty \leq 0.0539$$

2. Adjon közelítést az $A\mathbf{x} = b$ lineáris egyenletrendszer megoldására Jacobi-iteráció és Seidel-iteráció segítségével! Mindkét esetben adjon hibabecslést $\mathbf{x}_3$-ra!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 10 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix}$$

*a)* diagonális domináns

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 18 \end{pmatrix}$$

*b)* $B$ mátrix, $c$ vektor, $q$ érték

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} \qquad q = 0.5$$

*c)* Jacobi-iteráció

*α)* első közelítés:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.26 \\ -1.08 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\,||_\infty \leq \frac{0.5}{1-0.5} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.26 \\ -1.08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.72$$

*β)* második közelítés

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.26 \\ -1.08 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.028 \\ 4.056 \\ -1.014 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\,||_\infty \leq \frac{0.5}{1-0.5} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2.028 \\ 4.056 \\ -1.014 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.26 \\ -1.08 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.228$$

*γ)* harmadik közelítés

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.028 \\ 4.056 \\ -1.014 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.007 \\ 3.9972 \\ -0.9888 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}\,||_\infty \leq \frac{0.5}{1-0.5} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2.007 \\ 3.9972 \\ -0.9888 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.028 \\ 4.056 \\ -1.014 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq 0.0589$$

*d)* Seidel-iteráció

*α)* első közelítés:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0\cdot 1.5 & + & 0.2\cdot 4.2 & + & 0.3\cdot(-1.8) \\ -0.2\cdot 1.8 & + & 0\cdot 4.2 & + & (-0.2)\cdot(-1.8) \\ 0.2\cdot 1.8 & + & 0.1\cdot 4.2 & + & 0\cdot(-1.8) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.2 \\ -1.02 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\,||_\infty \le \frac{0.5}{1-0.5}\cdot \left\| \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.2 \\ -1.02 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.78$$

*β)* második közelítés:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0\cdot 1.8 & + & 0.2\cdot 4.2 & + & 0.3\cdot(-1.02) \\ -0.2\cdot 2.0034 & + & 0\cdot 4.2 & + & (-0.2)\cdot(-1.02) \\ 0.2\cdot 2.0034 & + & 0.1\cdot 3.9972 & + & 0\cdot(-1.02) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0034 \\ 3.9972 \\ -0.9935 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\,||_\infty \le \frac{0.5}{1-0.5}\cdot \left\| \begin{pmatrix} 2.0034 \\ 3.9972 \\ -0.9935 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.2 \\ -1.02 \end{pmatrix} \right\|_\infty \le 0.235$$

*γ)* harmadik közelítés:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0\cdot 2.0034 & + & 0.2\cdot 3.9972 & + & 0.3\cdot(-0.9935) \\ -0.2\cdot 2.0014 & + & 0\cdot 3.9972 & + & (-0.2)\cdot(-0.9935) \\ 0.2\cdot 2.0014 & + & 0.1\cdot 3.9984 & + & 0\cdot(-0.9935) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4.2 \\ -1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0014 \\ 3.9984 \\ -0.9999 \end{pmatrix}$$

hibabecslés:

$$||\,\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}\,||_\infty \le \frac{0.5}{1-0.5}\cdot \left\| \begin{pmatrix} 2.0014 \\ 3.9984 \\ -0.9999 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.0034 \\ 3.9972 \\ -0.9935 \end{pmatrix} \right\|_\infty \le 0.0327$$