

Numerikus analízis - 11. gyakorlat

dr. Földvári Attila

A feladatok dr. Nemoda Dóra: Numerikus módszerek - Numerikus analízis gyakorló feladatok című jegyzetből származnak. Többnyire.

1. Hatványmódszert és inverz hatványmódszert alkalmazva adjon becslést az A mátrix sajátértékeire és sajátvektoraira négy lépésben!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hatványmódszer:

$n = 1$

$$z_1 = A \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \|z_1\|_{\infty} = 2$$

$$v_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|_{\infty}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$n = 2$

$$z_2 = A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \|z_2\|_{\infty} = 3.5$$

$$v_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|_{\infty}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8571 \end{pmatrix}$$

$n = 3$

$$z_3 = A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8571 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5714 \\ 4.4286 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \|z_3\|_{\infty} = 4.5714$$

$$v_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|_{\infty}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9688 \end{pmatrix}$$

$n = 4$

$$z_4 = A \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9688 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.9063 \\ 4.8750 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \|z_4\|_{\infty} = 4.9063$$

$$v_4 = \frac{z_4}{\|z_4\|_{\infty}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9936 \end{pmatrix}$$

Inverz hatványmódszer

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$n = 1$

$$z_1 = A^{-1} \cdot w_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\|z_1\|_\infty} = 1.25$$

$$w_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.25 \end{pmatrix}$$

$n = 2$

$$z_2 = A^{-1} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 \\ -0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\|z_2\|_\infty} = 1.0526$$

$$w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3158 \end{pmatrix}$$

$n = 3$

$$z_3 = A^{-1} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3158 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9895 \\ -0.3263 \end{pmatrix}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\|z_3\|_\infty} = 1.0106$$

$$w_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3298 \end{pmatrix}$$

$n = 4$

$$z_4 = A^{-1} \cdot w_3 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3298 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9979 \\ -0.3319 \end{pmatrix}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{\|z_4\|_\infty} = 1.0021$$

$$w_4 = \frac{z_4}{\|z_4\|_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3326 \end{pmatrix}$$

Tehát az A mátrix sajátértékei és sajátvektorai közelítőleg:

$$\lambda = 4.9063 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9936 \end{pmatrix} \cdot t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\mu = 1.0021 \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3326 \end{pmatrix} \cdot s \quad s \in \mathbb{R}$$

2. Hatványmódszert és inverz hatványmódszert alkalmazva adjon becslést az A mátrix sajátértékeire és sajátvektoraira négy lépésben!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Hatvány módszer

$$\begin{array}{lll} z_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} & \lambda_1 = 9 & v_1 = \begin{pmatrix} 0.4444 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z_2 = \begin{pmatrix} 3.4444 \\ 6.7778 \end{pmatrix} & \lambda_2 = 6.7778 & v_2 = \begin{pmatrix} 0.5082 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z_3 = \begin{pmatrix} 3.5082 \\ 7.0328 \end{pmatrix} & \lambda_3 = 7.0328 & v_3 = \begin{pmatrix} 0.4988 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z_4 = \begin{pmatrix} 3.4988 \\ 6.9953 \end{pmatrix} & \lambda_4 = 6.9953 & v_4 = \begin{pmatrix} 0.5002 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Inverz hatvány módszer

$$\begin{array}{lll} A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.7143 & 0.4286 \\ 0.5714 & -0.1429 \end{pmatrix} & w_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z_1 = \begin{pmatrix} -0.2857 \\ 0.4286 \end{pmatrix} & \mu_1 = 2.3333 & w_1 = \begin{pmatrix} -0.6667 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z_2 = \begin{pmatrix} 0.9048 \\ -0.5238 \end{pmatrix} & \mu_2 = 1.1053 & w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5789 \end{pmatrix} \\ z_3 = \begin{pmatrix} -0.9624 \\ 0.6541 \end{pmatrix} & \mu_3 = 1.0391 & w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.6797 \end{pmatrix} \\ z_4 = \begin{pmatrix} 1.0056 \\ -0.6685 \end{pmatrix} & \mu_4 = 0.9945 & w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6648 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tehát az A mátrix sajátértékei és sajátvektorai közelítőleg:

$$\begin{array}{lll} \lambda = 7 & v = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t & t \in \mathbb{R} \\ \mu = -1 & w = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6648 \end{pmatrix} \cdot s & s \in \mathbb{R} \end{array}$$