Numerikus analízis - 10. gyakorlat

dr. Földvári Attila

A feladatok dr. Nemoda Dóra: Numerikus módszerek - Numerikus analízis gyakorló feladatok című jegyzetből származnak. Többnyire.

1. Intervallumfelező módszerrel becsülje meg az $f(x) = 3x^3 - 12x + 4$ függvény $[0, 1]$-beli zérushelyét 0.02 pontossággal!

   a) Feltételek
   - $f(x)$ folytonos a $[0, 1]$ intervallumon
   - $f(0) = 4 > 0$
   - $f(1) = -5 < 0$

   b) Lépésszám

$$\begin{aligned} \frac{1-0}{2^n} &< 0.02 \\ \frac{1}{2^n} &< \frac{2}{100} \\ 50 &< 2^n \\ 64 &\leq 2^n \\ 6 &\leq n \end{aligned}$$

   c) Becslés

	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
$k = 1$	0	1	0.5	$-1.625 < 0$
$k = 2$	0	0.5	0.25	$1.0469 > 0$
$k = 3$	0.25	0.5	0.375	$-0.3418 < 0$
$k = 4$	0.25	0.375	0.3125	$0.3416 > 0$
$k = 5$	0.3125	0.375	0.34375	$-0.0031 < 0$
$k = 6$	0.3125	0.34375	0.328125	

   Tehát az $f(x)$ függvény $[0, 1]$-beli zérushelye a $[0.3081, 0.3481]$ intervallumban található.

2. Newton módszerrel adja meg a $\sqrt[3]{100}$ közelítő értékét három lépésben! Továbbá adja meg a 3. közelítés hibáját!

a) Intervallum meghatározása

$$4^3 = 64 < 100 < 125 = 5^3$$
$$4 < \sqrt[3]{100} < 5$$

$f(x) = x^3 - 100$ függvényt vizsgáljuk a $[\,4,\,5\,]$ intervallumon

b) Feltételek

- $f(x)$ folytonos a $[\,4,\,5\,]$ intervallumon
- $f'(x) = 3 \cdot x^2$ folytonos és pozitív a $[\,4,\,5\,]$ intervallumon $\implies f'(x) \neq 0$ a $[\,4,\,5\,]$ intervallumon
- $f''(x) = 6 \cdot x$ folytonos és pozitív a $[\,4,\,5\,]$ intervallumon $\implies f''(x) \neq 0$ a $[\,4,\,5\,]$ intervallumon
- $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható
- $f(4) = 64 - 100 < 0$
- $f(5) = 125 - 100 > 0$
- $x_0 = 5$ megfelelő kezdőérték u.i. $f(5) > 0$ és $f''(5) > 0$

c) Becslés

$$x_1 = 5 - \frac{f(5)}{f'(5)} = 5 - \frac{25}{75} = \frac{14}{3}$$
$$x_2 = \frac{14}{3} - \frac{f(\frac{14}{3})}{f'(\frac{14}{3})} = \frac{14}{3} - \frac{\frac{44}{27}}{\frac{196}{3}} = \frac{2047}{441}$$
$$x_3 = \frac{2047}{441} - \frac{f(\frac{2047}{441})}{f'(\frac{2047}{441})} = \frac{1049}{226} \approx 4.6416$$

d) Hiba

- $f'(x) = 3 \cdot x^2$ monoton nő a $[\,4,\,5\,]$ intervallumon $\implies m = f'(4) = 48$
- $f''(x) = 6 \cdot x$ monoton nő a $[\,4,\,5\,]$ intervallumon $\implies M = f''(5) = 30$

$$|\,x_3 - x^*\,| \leq \frac{30}{96} \cdot \left(\frac{1049}{226} - \frac{2047}{441}\right)^2 = \frac{1}{188086373} \approx 0$$

Tehát $\sqrt[3]{100}$ értéke közelítőleg 4.6416.

3. Adja meg az $f(x) = e^x - 4x^2$ függvény zérushelyének közelítését a $[\,0.2,\ 1.2\,]$ intervallumon három lépésben fixpont iteráció segítségével! Továbbá adja meg a 3. közelítés hibáját!

a) $g(x) = x$ függvény meghatározása

$$e^x - 4x^2 = 0$$
$$e^x = 4x^2$$

$$x = \ln(4x^2) \qquad \frac{e^x}{4} = x^2$$
$$g_1(x) = \ln(4x^2) \qquad \sqrt{\frac{e^x}{4}} = x$$
$$\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} = g_2(x)$$

b) Feltételek

- $g_1(x) = \ln(4x^2)$ monoton nő a $[\,0.2,\ 1.2\,]$ intervallumon
- $g_1(0.2) = -1.8326$
- $g_1(1.2) = 1.7509$
- $[\,g_1(0.2),\ g_1(1.2)\,] \nsubseteq [\,0.2,\ 1.2\,] \implies g_1(x) = \ln(4x^2)$ nem jó

- $g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}$ monoton nő a $[\,0.2,\ 1.2\,]$ intervallumon
- $g_2(0.2) = 0.5526$
- $g_2(1.2) = 0.9111$
- $[\,g_2(0.2),\ g_2(1.2)\,] \subseteq [\,0.2,\ 1.2\,]$

- $g_2'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{x}{2}}$ monoton nő a $[\,0.2,\ 1.2\,]$ intervallumon
- $g_2'(0.2) = 0.2763$
- $g_2'(1.2) = 0.4555$
- $|\,g_2'(x)\,| < 1$ ha $x \in [\,0.2,\ 1.2\,]$

Tehát $g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}$ alkalmas függvény.

c) Becslés

$$x_0 = 0.2 \qquad x_1 = g_2(0.2) = 0.5526$$
$$x_2 = g_2(0.5526) = 0.6591 \qquad x_3 = g_2(0.6591) = 0.6952$$

d) Hiba

- $g_2'(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{x}{2}}$ monoton nő a $[\,0.2,\ 1.2\,]$ intervallumon
  $\implies |\,g_2'(x)\,| = 0.4555 < 0.46 = q$

$$|\,x_3 - x^*\,| \leq \frac{0.46}{1 - 0.46} \cdot |\,0.6952 - 0.6591\,| = 0.0321$$

Tehát az $f(x)$ függvény $[\,0.2,\ 1.2\,]$-beli zérushelye a $[\,0.663,\ 0.7274\,]$ intervallumban található.