

Gazdaságmatematika II. - 11. gyakorlat

dr. Földvári Attila

A feladatok dr. Házy Attila: Gazdaságmatematika 2 Példatár a második zárthelyi dolgozathoz című feladatsorából származnak.

1. Egy üzem T_1 és T_2 termékeket gyárt. A T_1 termék 4 pénzegység, a T_2 termék 5 pénzegység nyereséget termel. Az üzem három különböző részlegből áll. A T_1 termék elkészítéséhez az egyes részlegekben rendre 2, 1, 1 óra szükséges, a T_2 termék elkészítéséhez 1, 3, 2 óra. Az első két részleg kapacitása napi 64-64 óra, a harmadik részleg kapacitása napi 44 óra. Célunk az üzem nyereségének maximalizálása?

A feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &\leq 64 \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &\leq 64 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 44 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Optimális tábla:

	u_1	u_3	b
x_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	28
u_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	12
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	8
$-z$	-1	-2	-152

- a) Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
- b) Végezzen érzékenységvizsgálatot a harmadik részleg kapacitására!
- c) Végezzen érzékenységvizsgálatot a T_1 termék nyereségére!
- d) A harmadik részleg kapacitásának milyen megváltoztatása esetén lehet 5%-os nyereségnövekedést elérni?

a)

A feladat duálisa:

$$\begin{aligned} 2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 &\geq 4 \\ 1 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 &\geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \\ 64 \cdot y_1 + 64 \cdot y_2 + 44 \cdot y_3 &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Optimális mo.:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Célfgv. opt. érték:

$$z=152$$

b) Érzékenységvizsgálat u_3 -ra

	u_1	u_3	$b + \lambda \cdot u_3$			
x_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$28 - \frac{1}{3} \cdot \lambda$	$28 - \frac{1}{3} \cdot \lambda \geq 0$	$\implies$	$84 \geq \lambda$
u_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$12 - \frac{5}{3} \cdot \lambda$	$12 - \frac{5}{3} \cdot \lambda \geq 0$	$\implies$	$7.2 \geq \lambda$
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$8 + \frac{2}{3} \cdot \lambda$	$8 + \frac{2}{3} \cdot \lambda \geq 0$	$\implies$	$\lambda \geq -12$
$-z$	-1	-2	$-152 - 2 \cdot \lambda$			

Tehát $\lambda \in [-12, 7.2]$ és $z = 152 + 2 \cdot \lambda$.

c) Érzékenységvizsgálat x_1 -re

	u_1	u_3	b	
x_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	28	$-1 - \frac{2}{3} \cdot \lambda \leq 0$
u_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	12	$-2 + \frac{1}{3} \cdot \lambda \leq 0$
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	8	$\Downarrow$
				$-1.5 \leq \lambda$
$-z - \lambda \cdot x_1$	$-1 - \frac{2}{3} \cdot \lambda$	$-2 + \frac{1}{3} \cdot \lambda$	$-152 - 28 \cdot \lambda$	$\lambda \leq 6$

Tehát $\lambda \in [-1.5, 6]$ és $z = 152 + 28 \cdot \lambda$.

d)

$$\begin{aligned}
 152 \cdot (1 + 0.05) &= 152 + 2 \cdot \lambda \\
 159.6 &= 152 + 2 \cdot \lambda \\
 \lambda &= 3.8
 \end{aligned}$$

Tehát a harmadik részleg kapacitásának 3.8 órával történő növelése 5%-os nyereség-növekedést hozhatna.

2. Egy vállalat T_1 , T_2 és T_3 termékeket gyárt. A termékek alapanyag igénye 2, 1 és 5 egységnyi. Az alapanyagból 60 egység áll rendelkezésre. A termékek szerelési költsége rendre 16, 2 és 8 pénzegység. A T_1 termék 8 pénzegység, a T_2 termék 2 pénzegység, a T_3 termék 3 pénzegység nyereséget termel. A vállalatnak 160 pénzegység nyereségre van szüksége, hogy fejlődhessen. Célunk, hogy a napi termelés minimalizálja a szerelési költségeket úgy, hogy a összes alapanyagot felhasználjuk és legalább a minimális nyereséget elérjük.

A feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned} 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &\geq 160 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 &= 60 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ 16 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Optimális tábla:

	x_3	v_1	b	u_1^*	u_2^*
x_1	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	10	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{17}{2}$	$\frac{1}{2}$	40	$-\frac{1}{2}$	2
z	-19	-3	240	3	-4

- a) Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
b) Végezzen érzékenységvizsgálatot a raktáron lévő anyagmennyiségre!
c) Végezzen érzékenységvizsgálatot a T_2 termék szerelési költségére!
d) A raktáron lévő anyagmennyiség milyen megváltoztatása esetén lehet 5%-os szerelési költség csökkenést elérni?

a)

A feladat duálisa:

$$\begin{aligned} 8 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 &\leq 16 \\ 2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 &\leq 2 \\ 3 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 &\leq 8 \\ y_1 \geq 0 \quad y_2 &\text{ előjelkötetlen} \\ 160 \cdot y_1 + 60 \cdot y_2 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Optimális mo.:

Célfgv. opt. érték:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$z=240$$

b) Érzékenységvizsgálat u_2^* -ra

	x_3	v_1	$b + \lambda \cdot u_2^*$	u_1^*	u_2^*	
x_1	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$10 - \frac{1}{2} \cdot \lambda$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$10 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \geq 0$
x_2	$\frac{17}{2}$	$\frac{1}{2}$	$40 + 2 \cdot \lambda$	$-\frac{1}{2}$	2	$40 + 2 \cdot \lambda \geq 0$
						$\Downarrow$
						$20 \geq \lambda$
z	-19	-3	$240 - 4 \cdot \lambda$	3	-4	$\lambda \geq -20$

Tehát $\lambda \in [-20, 20]$ és $z = 240 - 4 \cdot \lambda$.

c) Érzékenységvizsgálat x_2 -re

	x_3	v_1	b	u_1^*	u_2^*
x_1	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	10	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{17}{2}$	$\frac{1}{2}$	40	$-\frac{1}{2}$	2
$z + \lambda \cdot x_2$	$-19 + \frac{17}{2} \cdot \lambda$	$-3 + \frac{1}{2} \cdot \lambda$	$240 + 40 \cdot \lambda$	$3 - \frac{1}{2} \cdot \lambda$	$-4 + 2 \cdot \lambda$

$$-19 + \frac{17}{2} \cdot \lambda \leq 0 \quad \implies \quad \lambda \leq \frac{38}{17}$$

$$-3 + \frac{1}{2} \cdot \lambda \leq 0 \quad \implies \quad \lambda \leq 6$$

Tehát $\lambda \leq \frac{38}{17}$ és $z = 240 + 40 \cdot \lambda$.

d)

$$240 \cdot (1 - 0.05) = 240 - 4 \cdot \lambda$$

$$-12 = -4 \cdot \lambda$$

$$\lambda = 3$$

Tehát a raktáron lévő anyagmennyiség 3 egységgel történő növelése 5%-os szerelési költség csökkenést hozhatna.