

Sajátérték, sajátvektor

(1)

Definíció: Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. $\lambda \in \mathbb{C}$ számot az A mátrix sajátértékének, az $x \in \mathbb{C}^n$ ($x \neq 0$) vektort pedig a λ sajátértékhez tartozó sajátvektornak nevezzük, ha $Ax = \lambda \cdot x$ teljesül.

Definíció: λ $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ egyenletet az A mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük. A determináns kifejtésével kapott n -edfokú polinomot pedig karakterisztikus polinomnak hívjuk. A karakterisztikus polinom zérushelyei a mátrix sajátértékei.

Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ sajátértékei és sajátvektorai?}$$

Megoldás:
Először

$$\lambda \cdot E = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) + (-1)(-1)0 + 0(-1)(-1) - 0(2-\lambda)0 - (-1)(-1)(2-\lambda) - (2-\lambda)(-1)(-1)$$
$$= (2-\lambda) \left[(2-\lambda)(2-\lambda) - 1 - 1 \right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{4 + \sqrt{16-8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{4 - \sqrt{16-8}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

} A mátrix sajátértékei

$\lambda_1 = 2$ -höz tartozó sajátvektor:

$$A - 2 \cdot E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Azt az egyenletrendszert kell

megoldanunk, ahol $(A - \lambda E) \cdot v = 0$, azaz

$$0v_1 - v_2 + 0v_3 = 0; -v_1 - v_3 = 0; -v_2 = 0 \quad \left| \text{Azaz} \quad v = \begin{bmatrix} -v_3 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_3 \quad v_3 \in \mathbb{C} \right.$$

Igy: $v_2 = 0$ és $v_1 = -v_3$.

Telát ~~xxx~~ a $\lambda_1=2$ -höz tartozó sajátvektor:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

It $\lambda_2=2+\sqrt{2}$ -höz tartozó sajátvektor:

$$A - (2+\sqrt{2})E = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Az $(A - \lambda_2 E) \cdot v_2 = 0$ egyenletrendszer megoldása Gauss-móddal:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-I \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-II \cdot \sqrt{2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{Így } -\sqrt{2} v_1 - v_2 = 0$$

$$\text{és } -\frac{1}{\sqrt{2}} v_2 - v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = -\sqrt{2} v_3 \Rightarrow v_1 = v_3. \text{ Így } v = \begin{bmatrix} v_3 \\ -\sqrt{2} v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} v_3, \quad v_3 \in \mathbb{C}$$

It $\lambda_3=2-\sqrt{2}$ -höz tartozó sajátvektor:

$$A - \lambda_3 E = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Az $(A - \lambda_3 E) \cdot v = 0$ egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+I \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+II \cdot \sqrt{2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{Így } \sqrt{2} v_1 - v_2 = 0$$

$$\text{és } \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 - v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2} v_3 \Rightarrow v_1 = v_3.$$

Ebből következően

$$v = \begin{bmatrix} v_3 \\ \sqrt{2} v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} v_3, \text{ ahol } v_3 \in \mathbb{C}.$$

Iteratív módszer

λ legnagyobb abszolútértékű (domináns) sajátérték és a hozzá tartozó sajátvektor meghatározására szolgál.

Módszer: tetszőleges $v^{(0)}$ vektorból indulunk. k -adik (kör)

lépésben: $z^{(k)} = A \cdot v^{(k-1)}$, majd $v^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_\infty}$ meghatározása.

Ekkor $\|z^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\lambda|$ sajátértékhez tart, $v^{(k)} \rightarrow v$ (λ -hoz tartozó sajátvektor)

Példa (az előző példában kapott $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} = 3,4142$ és a hozzá tartozó $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,4142 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot 0,7071} \begin{bmatrix} 0,7071 \\ -1 \\ 0,7071 \end{bmatrix}$ sajátvektort)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ legyen (adott)}$$

$$z^{(1)} = A \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \because \|z^{(1)}\|_\infty = 1 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z^{(2)} = A \cdot v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \because \|z^{(2)}\|_\infty = 2 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z^{(3)} = A \cdot v^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \because \|z^{(3)}\|_\infty = 4 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,75 \\ -1 \\ 0,75 \end{bmatrix}$$

$$z^{(4)} = A \cdot v^{(3)} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ -3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \because \|z^{(4)}\|_\infty = 3,5 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad v^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,7143 \\ -1 \\ 0,7143 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda \approx 3,5, v \approx \begin{bmatrix} 0,7143 \\ -1 \\ 0,7143 \end{bmatrix}$$

(λ előjele onnan adódik, hogy az előjelük váltakoznak-e. Ha igen, negatív)

az abszolútértékben legkisebb sajátérték és a hozzá tartozó sajátvektor közelítésére szolgál.

Példa: (az előző példából: $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2} = 0,5858$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t \rightarrow \begin{bmatrix} 0,7071 \\ 1 \\ 0,7071 \end{bmatrix} \cdot t$ ($t \in \mathbb{R}$))
közelítésére alkalmas)

(*)

Módszer: A^{-1} meghatározása, majd tetszőleges nemnulla vektorból ($v^{(0)}$) indulva az iteráció: $z^{(k)} = A^{-1} \cdot v^{(k-1)}$ és $v^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_\infty}$.

Ekkor $v^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v$ és $\|z^{(k)}\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda|}$, azaz $\frac{1}{\|z^{(k)}\|_\infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\lambda|$.

λ előjele, az hatványmódszerhez hasonlóan attól függ, hogy a $v^{(k)}$ közelítések adott ~~előjele~~ elemeinek előjele változik-e. természetesen igen, ~~(az)~~ a λ negatív előjelű.

[Pl.: $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ esetén λ negatív,

$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v^{(2)} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ esetén λ pozitív.]

(*) folytatás:

Gauss-Jordan módszer:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{+I \cdot \frac{1}{2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{+II \cdot 2/3} \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2/3 & 4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{+III \cdot 1/2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} /:2 \\ /:3/2 \\ /:4/3 \end{matrix}} \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Így pl. a $v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorból indulva:

$$z^{(1)} = A^{-1} \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{:1} v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ és } \lambda^{(1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$z^{(2)} = A^{-1} \cdot v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} \xrightarrow{:2} v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 1 \\ 0,75 \end{bmatrix} \text{ és } \lambda^{(2)} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$z^{(3)} = A^{-1} \cdot v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,25 \\ 1,75 \\ 1,25 \end{bmatrix} \xrightarrow{:1,75} v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,7143 \\ 1 \\ 0,7143 \end{bmatrix} \text{ és } \lambda^{(3)} = \frac{1}{1,75} = 0,5714$$

$$z^{(4)} = A^{-1} \cdot v^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,2143 \\ 1,7143 \\ 1,2143 \end{bmatrix} \xrightarrow{:1,7143} v^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,7083 \\ 1 \\ 0,7083 \end{bmatrix} \text{ és } \lambda^{(4)} = \frac{1}{1,7143} = 0,5833$$

$$\Rightarrow \lambda \approx 0,5833 \quad \text{és} \quad v \approx \begin{bmatrix} 0,7083 \\ 1 \\ 0,7083 \end{bmatrix}$$

(előjelek nem változnak, ezért pozitív)

Spektrálnorma (korábban nem tanult mátrixnorma)

$$\|A\|_2 = (A^T \cdot A \text{ [vagy } A \cdot A^T] \text{ legnagyobb sajátértéke})^{1/2}$$

példa: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$

ha $A^T A$ sajátértékeit számoljuk:

$A^T A$		1	-1	2	0
		0	1	-1	1
1	0	1	-1	2	0
-1	1	-1	2	-3	1
2	-1	2	-3	5	-1
0	1	0	1	-1	1

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(ennek kiszámolása
hátradalmas,
számoljuk $A \cdot A^T$
sajátértékeit)

$$A \cdot A^T \begin{array}{c|cc} & 1 & 0 \\ & -1 & 1 \\ & 2 & -1 \\ & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda) - (-3)(-3) =$$

$$= 18 - 9\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 36}}{2} \begin{cases} \frac{9 + \sqrt{45}}{2} = 7,8541 \leftarrow \text{nagyobb} \\ \frac{9 - \sqrt{45}}{2} = 1,1459 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{7,8541} = \underline{\underline{2,8025}}$$