

## Sajátérték, sajátvektor

Azok  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in \mathbb{R}^n$  számot és vektort nevezünk az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix sajátértékének és a hozzá tartozó sajátvektornak, amelyekre teljesül, hogy  $Av = \lambda v$ .

A sajátérték meghatározása:

$\det(A - \lambda E) = 0$  megoldásai:

Pé:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$  esetén  $A - \lambda E = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

Eznek determinánsát kell 0-val egyenlővé tenni:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ - \left[ \underbrace{1(3-\lambda) \cdot 2}_{6-2\lambda} + \underbrace{1 \cdot 2 \cdot (5-\lambda)}_{10-2\lambda} + \underbrace{(1-\lambda) \cdot 3 \cdot 3}_{9-9\lambda} \right] \\ \begin{matrix} 25-13\lambda & 15-8\lambda+\lambda^2 \end{matrix} \\ = (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) + \underbrace{6+6-25+13\lambda}_{-13} = (1-\lambda) \left[ (3-\lambda)(5-\lambda) - 13 \right] = \cancel{0} \\ \underbrace{-13(1-\lambda)} \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda) [\lambda^2 - 8\lambda + 2] = 0$$

$$1-\lambda=0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64-8}}{2} = 4 \pm \sqrt{14}$$

$$\lambda_2 = 7,7417$$

$$\lambda_3 = 0,2583$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  az  $A$  mátrix sajátértékei

•  $\lambda_2$ -hez tartozó sajátvektor:

$$\lambda_2 = 7,7417 \quad (4 + \sqrt{14})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -6,7417 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -4,7417 & 3 & | & 0 \\ 2 & 3 & -2,7417 & | & 0 \end{bmatrix}}_{A - \lambda_2 \cdot E} \sim \begin{bmatrix} -6,7417 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4,4450 & 3,2967 & | & 0 \\ 0 & 3,2967 & -2,4450 & | & 0 \end{bmatrix}$$

0-vektor

$$\sim \begin{bmatrix} -6,7417 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4,4450 & 3,2967 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} &v_3 = t \quad t \in \mathbb{R} \\ &-4,4450 v_2 + 3,2967 v_3 = 0 \\ &\quad v_2 = 0,7417 t \\ &-6,7417 v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ &\quad v_1 = 0,2583 t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  a  $\lambda_2$ -hez tartozó

sajátvektor:  $v = \begin{bmatrix} 0,2583 \\ 0,7417 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t \quad t \in \mathbb{R}$

•  $\lambda_3$ -hez tartozó sajátvektor ( $\lambda_3 = 0,2583$ )

$$\begin{bmatrix} 0,7417 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2,7417 & 3 & | & 0 \\ 2 & 3 & 4,7417 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0,7417 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0,0452 & 0,3035 & | & 0 \\ 0 & 0,3035 & 2,0452 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0,7417 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0,0452 & 0,3035 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} &v_3 = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ &0,0452 v_2 + 0,3035 v_3 = 0 \\ &\quad v_2 = -7,7146 t \\ &0,7417 v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ &\quad v_1 = 7,7047 t \end{aligned}$$

$v = \begin{bmatrix} 7,7047 \\ -7,7146 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t \quad t \in \mathbb{R}$

A sajátérték, sajátvektor kiszámításának módjára azént fontos, mint a spektrálszáma kiszámításához (is) használjuk.

Spektrálszáma:  $\|A\|_2 = \sqrt{A^T \cdot A}$  legnagyobb abszolútértékű sajátértéke  
(vagy  $A \cdot A^T$ -ugyanazok)

pl.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ekkor  $A \cdot A^T = \begin{array}{cc|cc} & & 1 & -1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 5 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 9 \end{array}$

Ezek sajátértékeit meghatározzuk:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 6 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)(9-\lambda) + (-1) \cdot 0 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 \\ - \left[ \underbrace{6(1-\lambda)6}_{36-36\lambda} + \underbrace{(-1)(-1)(9-\lambda)}_{9-\lambda} + (5-\lambda) \cdot 0 \cdot 0 \right] =$$

$$= \underbrace{(5-\lambda)(1-\lambda)}_{5-6\lambda+\lambda^2} (9-\lambda) - 45 + 37\lambda = 45 - 54\lambda + 9\lambda^2 - 5\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 45 + 37\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 22\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 15\lambda - 22) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \frac{-15 \pm \sqrt{225-88}}{-2} = \frac{-15 \pm \sqrt{137}}{-2} \begin{cases} \lambda_2 = \frac{15-\sqrt{137}}{2} \\ \lambda_3 = \frac{15+\sqrt{137}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\frac{15+\sqrt{137}}{2}} = 3,6541$$

Megj.: ha  $A \cdot A^T$  és  $A^T \cdot A$  sajátértékeit számoljuk, a sajátértékek megegyeznek (a 0 sajátértékek számától eltekintve):

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 2 \\ & & -1 & 0 \\ A^T \cdot A & & 0 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 13 \end{array} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(13-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 22 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225-88}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{15+\sqrt{137}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{15-\sqrt{137}}{2} \end{cases} \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\frac{15+\sqrt{137}}{2}} = 3,6541$$