

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Általánosított Rolewicz-tételek közelítőleg konvex függvényekre

Nagy Noémi

Témavezető: Dr. Boros Zoltán
egyetemi docens



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2018.

1. BEVEZETÉS

A függvényegyenletek és különösen a függvényegyenlőtlenségek elmélete elsősorban a matematikai analízishez kapcsolódik, azonban számos más területen is, például a geometriában, a közgazdaságtanban és a társadalomtudományokban is vannak alkalmazásai.

A konvexitással kapcsolatos kutatások a 20. század elejére nyúlnak vissza. A konvex függvény fogalma elsőként Jensen [Jen06] dolgozatában jelent meg, a Jensen-féle értelemben konvex függvény folytonosságának egy jól alkalmazható elegendő feltételét Bernstein és Doetsch [BD15] igazolta. Azóta a témával kapcsolatban számos publikáció született.

Az elmúlt néhány évtizedben a konvexitás vizsgálata a függvényegyenlőtlenségek elméletének egyik fontos, részletesen kutatott területe lett. Az egyik lehetséges általánosítás, amikor egy intervallumon magasabb rendben (Jensen-)konvex függvényekkel foglalkoznak. Az ehhez kapcsolódó fogalmak Hopf és Popoviciu dolgozataiból származnak [Hop26, Pop34, Pop45], de több matematikus is foglalkozott a témával [BW40, Bul71, Cie59, GP01, GP08, Kuc09, PW05, RV73, Was06, Was07]). A magasabb dimenzióba történő általánosítást Ger vizsgálta ([Ger72, Ger74]). Egy másik lehetőség, hogy a megengedett konvex kombinációk körét szorítjuk meg, ahogyan Boros és Páles a [BP06] publikációban, bevezetve a megfelelő jelöléseket és fogalmakat.

A legtöbbször azonban az

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) + C \Phi(t, 1 - t) \psi(\|x - y\|)$$

függvényegyenlőtlenségből származtatható közelítő konvexitási egyenlőtlenségekkel foglalkoztak, ahol $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ az X normált tér egy D konvex, nyílt részhalmazán van értelmezve, $\|u\|$ pedig az $u \in X$ normáját jelöli, C egy (általában nemnegatív) rögzített valós szám, $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és $\psi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ adott függvények. Általában az egyenlőtlenség fennállását minden $t \in [0, 1]$ és $x, y \in D$ esetén feltesszük, de számos dolgozatban csak konkrét t együtthatóra (többnyire a $t = 1/2$ esetre) van feltétel. Nyilvánvaló, hogy ha $C = 0$, akkor az egyenlőtlenség a konvex függvények definíciójával egyenértékű.

Az egyik első, közelítő konvexitással kapcsolatos eredmény Hyers és Ulam nevéhez köthető ([HU52]), ahol a C -konvexitást vizsgálták (vagyis azt az esetet, amikor $C \geq 0$ és $\Phi(t, 1 - t) = \psi(h) = 1$). Ezzel az esettel többek között Green [Gre52], Casini és Papini [CP93], valamint Laczkovich [Lac99] is foglalkozott.

A fenti egyenlőtlenség egy másik tipikus esetét, nevezetesen amikor X Banach-tér, $\Phi(t, s) = ts$, $\psi(h) = h$ és f alulról félig folytonos, Luc, Ngai és Théra ([LNT00]) vizsgálták.

Rolewicz [Rol79] abban az esetben, amikor a fenti egyenlőtlenségben $X = \mathbb{R}$, $\phi(h) = h^p$ ($p > 2$ rögzített), $C \geq 0$ és $\Phi(t, s) = 1$, megmutatta, hogy a függvényegyenlőtlenség minden $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ abszolút folytonos megoldása konvex. Későbbi publikációjában ([Rol00]) ezen eredményét kiterjesztette arra az általánosabb esetre, amikor X Banach-tér és $\psi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ teljesíti a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{h^2} = 0$$

feltételt.

A témában ismert számos korábbi eredmény általánosításaként a φ -konvexitás fogalmát Makó és Páles [MP12] vezette be és vizsgálta, majd Nikodemmel közösen [MNP12] az erős φ -konvexitás jellemzését bizonyították.

A disszertációban olyan függvények vizsgálatával foglalkozunk, amelyek bizonyos megengedett hibával teljesítik a konvexitási egyenlőtlenséget a súlyokra vonatkozó megszorítások mellett (pl. közelítő Jensen-konvexitás, résztestre vonatkozó közelítő konvexitás). Először a hibatagot tartalmazó tartófüggvényeket (szubgradienseket) határozzuk meg, majd ennek felhasználásával a hibatagra vonatkozó feltevések mellett egyfajta differenciálhatóságot igazolunk. Ezt követően alkalmas kontrollfüggvényekre nézve közelítőleg (résztest felett) konvex függvényekkel történő szeparálhatóságot karakterizálunk, amiből stabilitási tételt is nyerünk. Végül hiperstabilitás jellegű (Rolewicz tételeivel analóg, vagy azokat általánosító) eredményeket igazolunk résztest felett, illetve magasabb rendű (Jensen-)konvexitásra.

2. KÖZELÍTŐ $\mathbb{F}$ -KONVEXITÁS ÖSSZETETT HIBATAGRA

A második fejezetben vizsgálataink célja, hogy összekombinálja Makó és Páles [MP12] közelítő konvexitásra vonatkozó megközelítését és Makó, Nikodem és Páles [MNP12] erős konvexitásra vonatkozó koncepcióját, hogy jellemezhezzük a valós számok valamely résztestére vonatkozóan közelítőleg konvex függvényeket, valamint azok regularitási tulajdonságait.

Jelölje $\mathbb{F}$ a valós számok $\mathbb{R}$ testének egy résztestét és X legyen egy lineáris tér $\mathbb{F}$ felett, $\mathbb{F}_+$ az $\mathbb{F}$ pozitív elemeinek halmaza, $\overline{\mathbb{R}}_+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

Elsőként definiáljuk az $\mathbb{F}$ -konvex és az $\mathbb{F}$ -algebrailag nyílt halmazok, valamint az $\mathbb{F}$ -konvex függvény fogalmát, a [BP06] definícióit idézve.

DEFINÍCIÓ. Az X tér egy D részhalmazát $\mathbb{F}$ -konvexnek hívjuk, ha $tx + (1 - t)y \in D$ minden $x, y \in D$ és $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$ esetén.

DEFINÍCIÓ. Az X tér egy D részhalmazát $\mathbb{F}$ -algebrailag nyíltnak nevezzük, ha minden $x \in D$ és $u \in X$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy $x + ru \in D$ teljesül minden $r \in]-\delta, \delta[\cap \mathbb{F}$ számra.

DEFINÍCIÓ. Legyen $D \subseteq X$ egy nemüres $\mathbb{F}$ -konvex halmaz. Egy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt $\mathbb{F}$ -konvexnek nevezzük, ha az

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

egyenlőtlenség minden $x, y \in D$ és $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$ esetén fennáll.

A következőkben bevezetjük a vizsgált $(\alpha, \mathbb{F})$ -konvexitás fogalmát, majd elvégezzük ennek karakterizációját a módosított differenciahányadosok összehasonlításával, valamint egy megfelelő tartótulajdonság segítségével.

DEFINÍCIÓ. Legyen $D \subseteq X$ egy nemüres $\mathbb{F}$ -konvex halmaz,

$$D^* := D - D := \{x - y : x, y \in D\}$$

és $\alpha : D^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ egy páros függvény. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt $(\alpha, \mathbb{F})$ -konvexnek nevezzük, ha megoldja az

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &\leq tf(x) + (1 - t)f(y) \\ &\quad + t\alpha((1 - t)(x - y)) + (1 - t)\alpha(t(y - x)) \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ és minden $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$ esetén.

TÉTEL. Legyen $D \subseteq X$ nemüres, $\mathbb{F}$ -algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$ -konvex halmaz, $\alpha : D^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ egy páros leképezés és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:

- (i) f $(\alpha, \mathbb{F})$ -konvex D -n;
- (ii) minden olyan $r, s \in \mathbb{F}_+$, $u \in D$ és $h \in X$ esetén, ahol $u - sh$, $u + rh \in D$, az

$$\frac{f(u) - f(u - sh) - \alpha(-sh)}{s} \leq \frac{f(u + rh) - f(u) + \alpha(rh)}{r}$$

egyenlőtlenség teljesül;

- (iii) létezik egy $A : D \times X \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés, amelyre fennáll az

$$f(u + rh) - f(u) \geq rA(u, h) - \alpha(rh)$$

egyenlőtlenség minden $u \in D$, $r \in \mathbb{F}$ és $h \in X$ esetén, ahol $u + rh \in D$.

Most a Rolewicz [Rol00, Rol05] dolgozataiban szereplő differenciálhatósági tételekkel analóg módon bizonyos regularitási tulajdonságokat mutatunk be, felhasználva az előző tételben bemutatott tartó tulajdonságot a megfelelően kis hibataggal rendelkező közelítően $\mathbb{F}$ -konvex függvényekre.

TÉTEL. Legyen $D \subseteq X$ egy nemüres, $\mathbb{F}$ -algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$ -konvex halmaz és $\alpha : D^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ egy olyan páros függvény, hogy minden $h \in X$ esetén az $r \mapsto \alpha(rh)$ leképezés (mely minden olyan $r \in \mathbb{F}_+$ esetén értelmezett, amikor $rh \in D^*$) folytonos és teljesíti a

$$\lim_{\mathbb{F}_+ \ni r \rightarrow 0} \frac{\alpha(rh)}{r} = 0$$

feltételt. Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $(\alpha, \mathbb{F})$ -konvex és $A : D \times X \rightarrow \mathbb{R}$ az előző tétel (iii) állításában és bizonyításában leírt leképezés, akkor minden $u \in D$ és $h \in X$ esetén

$$A(u, h) = \lim_{s \rightarrow 0, s \in \mathbb{F}_+} \frac{f(u + sh) - f(u)}{s}.$$

Továbbá a $h \mapsto A(u, h)$ ($h \in X$) leképezés pozitív $\mathbb{F}$ -homogén és szubadditív minden $u \in D$ -re.

3. SZEPARÁCIÓS TÉTELEK

Az értekezés harmadik fejezetében elsőként bizonyítjuk Baron, Matkowski és Nikodem nevezetes szeparációs tételének ([BMN94]) egy absztraktabb változatát. Eredményünk az [NPW99] publikációban szereplő 1. Tétel egy speciális esete, de egyszerűbbnek tűnik közvetlenül igazolni, mint a hivatkozott tételt a kimondásához szükséges fogalmakkal együtt ismertetni, majd a tételben szereplő leképezések számunkra alkalmas speciális eseteit bemutatni. A bizonyítás során Andrzej Olbryś [Olb15, 3. Tétel] (hasznoló, de az alábbival logikailag közvetlen kapcsolatban nem álló) tételének levezetésében található gondolatmenetet követjük.

TÉTEL. *Legyen X vektortér az $\mathbb{F}$ test felett, D az X egy $\mathbb{F}$ -konvex, $\mathbb{F}$ -algebrailag nyílt részhalmaza, továbbá f és g a D halmazon értelmezett valós függvények. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (i) *létezik egy $\mathbb{F}$ -konvex $p : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre $f \leq p \leq g$;*
- (ii) *bármely $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $t_1, \dots, t_n \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$ esetén, ahol $t_1 + \dots + t_n = 1$ teljesül, igaz a következő egyenlőtlenség:*

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i g(x_i).$$

Mirosław Adamek az erős konvexitás és a közelítő konvexitás fogalmainak, valamint az ezekre vonatkozó szeparációs tételeknek a közös általánosításaként eljutott a kontrollfüggvényre nézve konvex fogalomhoz és az arra vonatkozó, intervallumon vizsgált szeparációs illetve stabilitási tételhez. Az előző tételben a résztest feletti konvexitás esetén a szeparációs tétel végtelen dimenziós változata jelenik meg, ezért ez a megközelítés kontrollfüggvény-sorozattal írható le.

A továbbiakban legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$T_n = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in ([0, 1] \cap \mathbb{F})^n : \sum_{j=1}^n t_j = 1 \right\}$$

és

$$G_n : T_n \times D^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

DEFINÍCIÓ. Legyen X vektortér $\mathbb{F}$ felett, $D \subset X$ nemüres, $\mathbb{F}$ -algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$ -konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $\mathbb{F}$ -affin a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve, ha megoldja a

$$(1) \quad \varphi \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n t_i \varphi(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n)$$

egyenletet minden $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ és $x_1, \dots, x_n \in D$ esetén.

DEFINÍCIÓ. Legyen X vektortér $\mathbb{F}$ felett, $D \subset X$ nemüres, $\mathbb{F}$ -algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$ -konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $\mathbb{F}$ -konvex a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve, ha megoldja a

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n t_i \varphi(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n)$$

egyenlőtlenséget minden $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ és $x_1, \dots, x_n \in D$ esetén.

Definiáljuk a következő halmazt:

$$\mathcal{F} := \{ \varphi : D \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ } \mathbb{F}\text{-affin a } (G_n) \text{ kontrollfüggvény-sorozatra nézve} \}$$

A következőkben azokat az f és g valós értékű, a D halmazon értelmezett függvényeket vizsgáljuk, melyek teljesítik az

$$(2) \quad f \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n t_i g(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n)$$

egyenlőtlenséget minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ esetén.

MEGJEGYZÉS. Ha a (2) egyenlőtlenségből kivonjuk az (1) egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy

$$(f - \varphi) \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n t_i (g - \varphi)(x_i),$$

ami a $g = f$ esetben azt jelenti, hogy az $f - \varphi$ függvény $\mathbb{F}$ -konvex.

ÁLLÍTÁS. Ha a $p : D \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés $\mathbb{F}$ -konvex és $\varphi \in \mathcal{F}$, akkor a $h = p + \varphi$ függvény $\mathbb{F}$ -konvex a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve.

TÉTEL. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Ekkor $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ pontosan akkor teljesíti a (2) egyenlőtlenséget minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ esetén, ha létezik egy $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ valós értékű $\mathbb{F}$ -konvex függvény a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve úgy, hogy az

$$f \leq h \leq g$$

teljesül a D halmazon.

MEGJEGYZÉS. Világos, hogy ha $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és

$$G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) - \sum_{i=1}^n t_i \varphi(x_i)$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ esetén, akkor $\varphi \in \mathcal{F}$, melyből következően $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Adott $G_n : T_n \times D^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat esetén azonban nem látszik egyszerűnek a kérdés, hogy teljesül-e az $\mathcal{F}$ halmaz nemüressége.

KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \neq \emptyset$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ közelítőleg $\mathbb{F}$ -konvex a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve, azaz

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon$$

minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ és rögzített $\varepsilon > 0$ esetén. Ekkor létezik olyan h , a D halmazon értelmezett valós értékű $\mathbb{F}$ -konvex függvény a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve, hogy

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \in D).$$

4. A ROLEWICZ-TÉTEL VARIÁCIÓI KÖZELÍTŐLEG JENSEN-KONVEX FÜGGVÉNYEKRE

Ebben a fejezetben Rolewicz tételéhez [Rol79, 4. Lemma] hasonlóan olyan – bizonyos értelemben közelítőleg konvex függvényekre vonatkozó – függvényegyenlőtlenségeket vizsgálunk, amelyekben a hibatag végül elhagyhatónak bizonyul. Az ilyen jellegű eredményeket a szakirodalomban hiperstabilitásnak nevezzük.

A [BP06] publikációban Boros Zoltán és Páles Zsolt által definiált, és a második részben ismertetett $\mathbb{F}$ -algebrailag nyíltság és $\mathbb{F}$ -konvexitás fogalmát ebben a fejezetben is használni fogjuk. Elsőként azonban definiálnunk kell, mit értünk az X tér elemeinek $\mathbb{F}$ -normáján:

DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathbb{F}$ az $\mathbb{R}$ egy részteste és X egy vektortér $\mathbb{F}$ felett. A $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést $\mathbb{F}$ -normának nevezzük, ha teljesülnek rá a következő feltételek:

- (i) bármely $0 \neq x \in X$ esetén $\|x\| > 0$, továbbá $\|0\| = 0$;
- (ii) bármely $c \in \mathbb{F}$ és $x \in X$ mellett teljesül, hogy $\|cx\| = |c| \|x\|$;
- (iii) bármely $x, y \in X$ elemekre $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ebben a részben legyen D az X tér egy $\mathbb{F}$ -algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$ -konvex részhalma, $c \geq 0$ és $p > 1$. Abból a célból, hogy újrafogalmazzuk az

$$(3) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + c(t(1-t)\|x - y\|)^p$$

egyenlőtlenségben megjelenő $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre vonatkozó feltételeket (minden $x, y \in D$ és $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$ esetén), speciális differenciákat és differencia hányadosokat vezetünk be. Az első észrevételünk, hogy a (3) egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, ha $t = 0$, $t = 1$ vagy $x = y$, ezért elegendő a (3) egyenlőtlenséget abban az esetben tekinteni, amikor $x, y \in D$ és $t \in]0, 1[\cap \mathbb{F}$ úgy, hogy $x \neq y$.

Egy kis számolással és új változók bevezetésével a következőképpen fogalmazhatjuk át a vizsgált egyenlőtlenséget.

ÁLLÍTÁS. Legyen $D \subset X$ egy $\mathbb{F}$ -algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$ -konvex halmaz, $c \geq 0$, $p > 1$. Egy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor oldja meg a (3) egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ és $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$ esetén, ha f teljesíti a

$$(4) \quad f(x) \leq \frac{s}{q+s} f(x-qu) + \frac{q}{q+s} f(x+su) + c \left[\frac{qs}{q+s} \right]^p \|u\|^p$$

egyenlőtlenséget minden olyan $x \in D$, $s, q \in \mathbb{F}_+$ és $u \in X$ esetén, amelyekre $x-qu$, $x+su \in D$.

Feltesszük, hogy D , c , p és f teljesítik az előző állítás feltételeit. Ekkor a következő lemmák fogalmazhatók meg:

LEMMA. Tegyük fel, hogy $x \in D$, $s, q \in \mathbb{F}_+$ és $u \in X$ olyanok, hogy $x - qu$, $x + su \in D$. Ekkor a következő két egyenlőtlenség ekvivalens a (4) egyenlőtlenséggel:

$$\frac{f(x) - f(x - qu)}{q} \leq \frac{f(x + su) - f(x)}{s} + c \left[\frac{qs}{q + s} \right]^{p-1} \|u\|^p,$$

$$\frac{f(x) - f(x - qu)}{q} \leq \frac{f(x + su) - f(x - qu)}{q + s} + c \left[\frac{s}{q + s} \right]^p q^{p-1} \|u\|^p.$$

Ha az előző lemma második egyenlőtlenségében $x - qu$ helyére a kerül, az

$$(5) \quad \frac{f(a + qu) - f(a)}{q} \leq \frac{f(a + (q + s)u) - f(a)}{q + s} + c \left[\frac{s}{q + s} \right]^p q^{p-1} \|u\|^p$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Így megfogalmazhatjuk az alábbi lemmát:

LEMMA. A (4) egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn minden $x \in D$, $s, q \in \mathbb{F}_+$ és $u \in X$ esetén $x - qu, x + su \in D$ mellett, ha az (5) egyenlőtlenség teljesül minden olyan $a \in D$, $q, s \in \mathbb{F}_+$, $u \in X$ esetén, amelyekre $a + (q + s)u \in D$.

A fenti lemmák segítségével pedig belátható a következő tétel:

TÉTEL. Legyen $D \subset X$ egy $\mathbb{F}$ -algebrailag nyílt $\mathbb{F}$ -konvex halmaz, $c \geq 0$, $p > 1$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ olyan leképezés, hogy f megoldása a (3) egyenlőtlenségnek minden $x, y \in D$ és $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$ esetén. Ekkor f teljesíti a (3) egyenlőtlenséget $c = 0$ esetén is, azaz az f függvény $\mathbb{F}$ -konvex.

MEGJEGYZÉS. Jensen [Jen06] megmutatta (lásd még: [Kuc09]), hogy minden Jensen-konvex függvény $\mathbb{Q}$ -konvex. Így abban az esetben, amikor $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, az előbbi tételünk azt mondja ki, hogy ha egy f függvény abban az értelemben közelítőleg Jensen-konvex, hogy teljesíti a (3) egyenlőtlenséget a 0 és 1 közötti t racionális számokra, akkor az f függvény valójában Jensen-konvex.

A következő eredmény megmutatja, hogy a közelítő Jensen-konvexitásból következik a Jensen-konvexitás, ha a hibafüggvény kellően kicsi a nulla közelében.

TÉTEL. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, d_I az I intervallum hossza és $J_I = [0, d_I[$. Legyen $\psi : J_I \rightarrow [0, +\infty[$ olyan, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\psi(t)}{t^2} = 0.$$

Ha egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldja az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \psi(|x-y|)$$

egyenlőtlenséget bármely $x, y \in I$ esetén, akkor f Jensen-konvex.

5. MAGASABB RENDBEN KÖZELÍTŐLEG KONVEX FÜGGVÉNYEK

A disszertáció utolsó fejezetében az előbbieken ismertetett eredményeket terjesztjük ki magasabb rendben közelítőleg konvex (illetve Jensen-konvex) függvényekre.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $n \in \mathbb{N}$ és $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ az I különböző pontjai. Jelölje $[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f]$ az f függvény osztott differenciáját az $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ pontokban, melyet a

$$[x_0; f] = f(x_0),$$

$$[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f] = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}; f] - [x_0, x_1, \dots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_0}$$

rekurzióval definiálhatunk, ahol $n \in \mathbb{N}$. Hopf [Hop26] és Popoviciu [Pop45] definíciója szerint egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény n -edrendben konvex, ha

$$[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f] \geq 0$$

teljesül minden $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ I -beli pont esetén. Jól ismert (és könnyen belátható), hogy az elsőrendű konvexitás a hagyományos értelemben vett konvexitással egyezik meg.

Könnyen kiszámítható, hogy megfelelő helyettesítésekkel az

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + Ct(1-t)\alpha(\|x-y\|)$$

egyenlőtlenség átírható a következő alakba, amelynek általánosítását vizsgáljuk a fejezetben:

$$0 \leq [x_0, x_1, x_2; f] + C \frac{\alpha(|x_2 - x_0|)}{(x_2 - x_0)^2}.$$

Az eredmény igazolásához használjuk a differencia operátor fogalmát:

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (x \in I, h \in \mathbb{R} : x+h \in I),$$

$$\Delta_h^{n+1} f(x) = \Delta_h^1 \Delta_h^n f(x) \quad (x \in I, h \in \mathbb{R} : x+(n+1)h \in I),$$

A magasabb rendű Jensen-konvexitás fogalma T. Popoviciuhoz ([Pop34, Pop45]) köthető:

DEFINÍCIÓ. Egy $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt n -edrendben Jensen-konvexnek hívunk (ahol $n \in \mathbb{N}$), ha

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \geq 0$$

minden $x \in I$, $h \geq 0$ esetén úgy, hogy $x + (n+1)h \in I$.

Popoviciu [Pop34] és Ciesielski [Cie59, 1. Tétel] eredményeinek összekombinálásával kimondható a következő állítás.

ÁLLÍTÁS. Legyen I egy nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény n -edrendben Jensen-konvex. Ha f korlátos az $E \subset I$ pozitív mértékű halmazon, akkor az f leképezés n -edrendben konvex.

A magasabb rendű konvexitás egy lokális jellemzéséhez szükségünk lesz a következő derivált-fogalomra.

DEFINÍCIÓ. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény k -adrendű alsó Dinghas intervallum deriváltját egy $\xi \in I$ pontban a következő képlettel definiáljuk:

$$\underline{D}^k f(\xi) := \liminf_{\substack{(x,h) \rightarrow (\xi,0) \\ x \leq \xi \leq x+kh}} \frac{\Delta_h^k f(x)}{h^k}.$$

Gilányi and Páles [GP01, 1. Következmény] szoros kapcsolatot bizonyított a fenti két fogalom között (egy általánosabb kontextusban). Nekünk az ő eredményük következő speciális esetére lesz szükségünk.

ÁLLÍTÁS. Egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor n -edrendben Jensen-konvex, ha $\underline{D}^{n+1}f(\xi) \geq 0$ minden $\xi \in I$ -re.

Az állítást felhasználva az alábbi Rolewicz-típusú tétel igazolható:

TÉTEL. Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $I_n^* = \left\{ \frac{x-y}{n+1} : x, y \in I, y < x \right\}$ és $\psi : I_n^* \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\psi(h)}{h^{n+1}} = 0$, továbbá tetszőleges $x \in I$ és $h > 0$ olyanok, hogy $x + (n+1)h \in I$ esetén teljesül a

$$\Delta_h^{n+1}f(x) + \psi(h) \geq 0$$

egyenlőtlenség, akkor az f függvény n -edrendben Jensen-konvex.

A fenti eredmények felhasználásával belátható a következő tétel:

TÉTEL. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, jelölje $\nu(I)$ az I intervallum hosszát, továbbá legyen $n \in \mathbb{N}$ és $J_I =]0, \nu(I)[$, valamint legyen a $\varphi : J_I \rightarrow [0, +\infty[$ olyan függvény, amely teljesíti a $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0$ feltételt. Ha egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minden olyan $x_j \in I$ pontok esetén ($j = 0, 1, \dots, n, n+1$), amelyekre teljesül az $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ feltétel, megoldja az

$$[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f] + \varphi(x_{n+1} - x_0) \geq 0$$

egyenlőtlenséget, akkor f n -edrendben konvex.

A disszertáció ötödik fejezetének zárásaként bizonyos eszközöket bevezetve az előző tételt kiterjesztjük nyílt konvex halmazokra is.

TÉTEL. Legyen $D \subset \mathbb{R}^m$ egy nyílt konvex halmaz, $\nu(D)$ jelölje a D halmaz átmérőjét, továbbá $J_D =]0, \nu(D)[$ és $n, m \in \mathbb{N}$. Legyen a $\varphi : J_D \rightarrow [0, +\infty[$ függvény olyan, ami teljesíti a $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0$ feltételt. Ha egy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldja az

$$[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f] + \varphi(\|x_{n+1} - x_0\|) \geq 0$$

egyenlőtlenséget minden olyan $x_j \in D$ ($j = 0, 1, \dots, n, n+1$) esetén, ahol $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ kollineárisak, akkor f n -edrendben konvex.

1. INTRODUCTION

The theory of functional equations and inequalities is usually considered as a topic in mathematical analysis. However, it has some applications in many other areas, for example, in geometry, economics and social sciences.

Research on convexity dates back to the beginning of the 20th century. The concept of convex functions was introduced by Jensen [Jen06]. A convenient sufficient condition for the continuity of a convex function (in the sense of Jensen) was established by Bernstein and Doetsch [BD15]. Since then many publications dealt with this topic.

Over the last few decades, investigating convexity has become an important, well-researched area of the theory of functional inequalities. One of the possible generalizations is the higher order (Jensen)-convexity on an interval. The related concepts were introduced by Hopf and Popoviciu [Hop26, Pop34, Pop45]. Several mathematicians dealt with this subject [BW40, Bul71, Cie59, GP01, GP08, Kuc09, PW05, RV73, Was06, Was07]. Ger investigated the generalization in higher dimensions [Ger72, Ger74]). Another option is to restrict the scope of convex combinations by introducing the appropriate notations and concepts, as Boros and Páles did in [BP06].

In most cases, the authors examined functional inequalities that can be derived from the inequality

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) + C\Phi(t, 1 - t)\psi(\|x - y\|).$$

Here X is a normed space, $D \subseteq X$ is an open convex set, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a function, $\|u\|$ is the norm of $u \in X$, C is a fixed real number (usually non-negative), $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ and $\psi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ are given functions. Typically the inequality is supposed to hold for every $t \in [0, 1]$ and $x, y \in D$ (however, the case of fixed t , especially that of $t = 1/2$ is also extensively investigated). Obviously, if $C = 0$, then the inequality is equivalent to the definition of convex functions.

One of the first results, which is related to approximate convexity belongs to Hyers and Ulam [HU52]. They investigated the C -convexity (i.e. where $C \geq 0$ and $\Phi(t, 1 - t) = \psi(h) = 1$). This case was considered

by, among others, Green [Gre52], Casini and Papini [CP93], and Laczkovich [Lac99].

Another particular case of the inequality above, namely when X Banach-space, $\Phi(t, s) = ts$, $\psi(h) = h$, and f is semi-continuous and bounded from below, was investigated by Luc, Ngai and Théra [LNT00].

Rolewicz investigated the case of the inequality above where $X = \mathbb{R}$, $\phi(h) = h^p$ ($p > 2$ fixed), $C \geq 0$ and $\Phi(t, s) = 1$. He showed that every absolute continuous solution $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ of that inequality is convex [Rol79]. In [Rol00] he extended this result to the more general case where X is a Banach-space and $\psi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ fulfils the following condition:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{h^2} = 0.$$

Makó and Páles introduced and described the notion of φ -convexity, as a generalization of several previous results [MP12]. Later with Nikodem they characterized strong φ -convexity [MNP12].

In the dissertation, we investigate such functions that fulfil the inequality of convexity with certain allowable error terms and the restrictions on the weights (e.g. approximate Jensen-convexity, approximate convexity with respect to a subfield). First we determine the support functions (subgradients) containing the error term, then using this we prove a differentiability property under some assumptions on the error term. Then we characterize the separability with an approximately convex function (over a subfield and with respect to appropriate control functions) from which we obtain a stability theorem. Finally, we prove hiperstability-type results (analogue or more general forms of Rolewicz's theorems) over a subfield and for (Jensen-)convexity of higher order.

2. APPROXIMATE $\mathbb{F}$ -CONVEXITY WITH COMPOUND ERROR

Our purpose is to combine the approach of approximate convexity by Makó and Páles [MP12] with the concept of restricted strong convexity by Makó, Nikodem and Páles [MNP12], in order to provide characterizations and regularity properties for functions that are approximately convex with respect to a subfield.

Let $\mathbb{F}$ be a subfield of the field $\mathbb{R}$ of real numbers and X be a linear space over $\mathbb{F}$. Let $\mathbb{F}_+$ denote the set of positive elements of $\mathbb{F}$. Moreover let $\overline{\mathbb{R}}_+$ denote the set of nonnegative real numbers.

First we define $\mathbb{F}$ -convex and $\mathbb{F}$ -algebraically open sets as well as $\mathbb{F}$ -convex functions that are considered in [BP06].

DEFINITION. A subset D of the space X is called $\mathbb{F}$ -convex if $tx + (1 - t)y \in D$ for every $x, y \in D$ and $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$.

DEFINITION. A subset D of the space X is called $\mathbb{F}$ -algebraically open if, for all $x \in D$ and $u \in X$, there exists a $\delta > 0$ such that $x + ru \in D$ for every $r \in \mathbb{F} \cap]-\delta, \delta[$.

DEFINITION. Let $D \subseteq X$ be a nonempty $\mathbb{F}$ -convex set. A function $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is called $\mathbb{F}$ -convex if

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

holds for every $x, y \in D$ and $t \in \mathbb{F} \cap [0, 1]$.

In the following, we introduce the aforementioned concept of $(\alpha, \mathbb{F})$ -convexity and establish its characterizations by comparison of modified difference ratios and an appropriate support property.

DEFINITION. Let $D \subseteq X$ be a nonempty $\mathbb{F}$ -convex set,

$$D^* := D - D := \{x - y : x, y \in D\},$$

and $\alpha : D^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ be an even function. The function $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is called $(\alpha, \mathbb{F})$ -convex, if it satisfies the inequality

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &\leq tf(x) + (1 - t)f(y) \\ &\quad + t\alpha((1 - t)(x - y)) + (1 - t)\alpha(t(y - x)) \end{aligned}$$

for all $x, y \in D$ and for all $t \in \mathbb{F} \cap [0, 1]$.

THEOREM. Let $D \subseteq X$ be a nonempty, $\mathbb{F}$ -algebraically open, $\mathbb{F}$ -convex set, $\alpha : D^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ be an even function, and let $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then the following statements are equivalent:

- i) f is $(\alpha, \mathbb{F})$ -convex on D ;
- ii) the inequality

$$\frac{f(u) - f(u - sh) - \alpha(-sh)}{s} \leq \frac{f(u + rh) - f(u) + \alpha(rh)}{r}$$

is satisfied for all $r, s \in \mathbb{F}_+$, $u \in D$, $h \in X$, where $u - sh, u + rh \in D$;

- iii) there exists a function $A : D \times X \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$f(u + rh) - f(u) \geq rA(u, h) - \alpha(rh)$$

for all $u \in D$, $r \in \mathbb{F}$, $h \in X$, where $u + rh \in D$.

Now we use the support property (which was verified in the previous theorem) to prove certain regularity properties for approximately $\mathbb{F}$ -convex functions with sufficiently small errors, in the spirit of Rolewicz [Rol00, Rol05].

THEOREM. Let $D \subseteq X$ be a nonempty, $\mathbb{F}$ -algebraically open, $\mathbb{F}$ -convex set and $\alpha : D^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ be an even function such that, for every $h \in X$, the mapping $r \mapsto \alpha(rh)$ (defined for all $r \in \mathbb{F}_+$ that fulfils $rh \in D^*$) is continuous and satisfies

$$\lim_{\mathbb{F}_+ \ni r \rightarrow 0} \frac{\alpha(rh)}{r} = 0.$$

If $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is $(\alpha, \mathbb{F})$ -convex and $A : D \times X \rightarrow \mathbb{R}$ is the mapping described in statement (iii) and the proof of the previous Theorem, then

$$A(u, h) = \lim_{s \rightarrow 0, s \in \mathbb{F}_+} \frac{f(u + sh) - f(u)}{s}$$

for all $u \in D$ and $h \in X$. Moreover, the mapping $h \mapsto A(u, h)$ ($h \in X$) is positively $\mathbb{F}$ -homogeneous and subadditive for every $u \in D$.

3. SEPARATION THEOREMS

In the third chapter of the dissertation we prove a more abstract version of Baron, Matkowski and Nikodem's separation theorem [BMN94]. It is a special case of Theorem 1 of the paper [NPW99], but it is more convenient to prove it directly. During the proof, we follow an argument which is analogous to Andrzej Olbryś's idea [Olb15]. However, Olbryś's result is logically not comparable to our one.

THEOREM. *Let X be a vector space over $\mathbb{F}$, D be an $\mathbb{F}$ -convex, $\mathbb{F}$ -algebraically open subfield of X , and f and g be real functions on D . Then the following statements are equivalent:*

- (i) *there exists an $\mathbb{F}$ -convex function $p : D \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f \leq p \leq g$;*
- (ii) *the inequality*

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i g(x_i)$$

is fulfilled for every $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $t_1, \dots, t_n \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$, if $t_1 + \dots + t_n = 1$.

Mirosław Adamek introduced the notion of convexity with respect to a control function as a common generalization of the concepts of strong convexity and approximate convexity. He investigated separation and stability type theorems concerning these concepts. In the previous theorem, in the case of convexity over a subfield, an infinite dimensional version of the separation theorem appears, hence this approach can be described with a control function sequence.

In what follows, for every $n \in \mathbb{N}$, let

$$T_n = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in ([0, 1] \cap \mathbb{F})^n : \sum_{j=1}^n t_j = 1 \right\}$$

and

$$G_n : T_n \times D^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

DEFINITION. Let X be a vector space over $\mathbb{F}$, $D \subset X$ nonempty, $\mathbb{F}$ -algebraically open, $\mathbb{F}$ -convex set. We say that a function $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$

is $\mathbb{F}$ -affine with the control function sequence (G_n) , if for every $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ and $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ it satisfies the equation

$$(1) \quad \varphi \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n t_i \varphi(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n).$$

DEFINITION. Let X be a vector space over $\mathbb{F}$, $D \subset X$ nonempty, $\mathbb{F}$ -algebraically open, $\mathbb{F}$ -convex set. We say that a function $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ is $\mathbb{F}$ -convex with the control function sequence (G_n) , if for every $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ and $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ it satisfies the inequality

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n t_i \varphi(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n).$$

Let us define the set

$$\mathcal{F} := \{ \varphi : D \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ is } \mathbb{F}\text{-affine with the control function sequence } (G_n) \}.$$

In the following we examine those functions $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, which solve the inequality

$$(2) \quad f \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n t_i g(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n)$$

for every $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ and $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$.

REMARK. If we subtract equation (1) from (2), we get

$$(f - \varphi) \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n t_i (g - \varphi)(x_i),$$

which means that the function $f - \varphi$ is $\mathbb{F}$ -convex in the case when $g = f$.

PROPOSITION. If the function $p : D \rightarrow \mathbb{R}$ is $\mathbb{F}$ -convex and $\varphi \in \mathcal{F}$, then the function $h = p + \varphi$ is $\mathbb{F}$ -convex with the control function sequence (G_n) .

THEOREM. Suppose that $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Then $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy inequality (2) for every $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ and $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ if and only if

there exists an $\mathbb{F}$ -convex function $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ with the control function sequence (G_n) such that

$$f \leq h \leq g$$

is satisfied on D .

REMARK. It is clear that if $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ is an arbitrary function and for every $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ and $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ it satisfies inequality

$$G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) - \sum_{i=1}^n t_i \varphi(x_i),$$

then $\varphi \in \mathcal{F}$, and hence $\mathcal{F} \neq \emptyset$. However if the sequence $G_n : T_n \times D^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) is given, it is not a simple question if the set $\mathcal{F}$ is nonempty.

COROLLARY. Suppose that $\mathcal{F} \neq \emptyset$ and $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is approximately $\mathbb{F}$ -convex with the control function sequence (G_n) , i.e. for every $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ and $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ and with a fixed number $\varepsilon > 0$

$$f \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon.$$

Then there exists an $\mathbb{F}$ -convex function $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ with the control function sequence (G_n) such that

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \in D).$$

4. ROLEWICZ-TYPE THEOREMS FOR APPROXIMATELY JENSEN-CONVEX FUNCTIONS

The already introduced definitions of $\mathbb{F}$ -algebraically openness and $\mathbb{F}$ -convexity by Boros and Páles [BP06] will be used also in this section. We have to introduce the concept of the $\mathbb{F}$ -norm of an element of X :

DEFINITION. Let $\mathbb{F}$ be a subfield of $\mathbb{R}$ and X be a vector space over $\mathbb{F}$. The mapping $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ is called an $\mathbb{F}$ -norm if it satisfies the following assumptions:

- (i) $\|x\| > 0$ for every $0 \neq x \in X$ and $\|0\| = 0$;
- (ii) $\|cx\| = |c| \|x\|$ for all $c \in \mathbb{F}$ and $x \in X$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for every $x, y \in X$.

In this section let D be an $\mathbb{F}$ -algebraically open, $\mathbb{F}$ -convex subset of X , $c \geq 0$ and $p > 1$. In order to reformulate the conditions for the function $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in the inequality

$$(3) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + c(t(1-t)\|x - y\|)^p$$

where $x, y \in D$ és $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$, we have to introduce some special differences and difference ratios. Obviously inequality (3) is satisfied if $t = 0$, $t = 1$, or $x = y$. Hence it is enough to investigate the case when $x, y \in D$, $t \in]0, 1[\cap \mathbb{F}$, and $x \neq y$.

Introducing new variables and performing a little amount of calculation, we may reformulate our inequality in the following way.

PROPOSITION. Let $D \subset X$ be an $\mathbb{F}$ -algebraically open and K -convex set, $c \geq 0$, $p > 1$. A function $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fulfils inequality (3) for every $x, y \in D$ and $\lambda \in [0, 1] \cap K$ if and only if f satisfies inequality

$$(4) \quad f(x) \leq \frac{s}{q+s} f(x - qu) + \frac{q}{q+s} f(x + su) + c \left[\frac{qs}{q+s} \right]^p \|u\|^p$$

for every $x \in D$, $s, q \in K_+$, and $u \in X$ such that $x - qu, x + su \in D$

We assume that D , c , p and f satisfy the assumptions of the previous proposition. Then we can formulate the following lemmas:

LEMMA. Suppose that $x \in D$, $s, q \in \mathbb{F}_+$, and $u \in X$ such that $x - qu$, $x + su \in D$. Then the following two inequalities are equivalent to inequality (4):

$$\frac{f(x) - f(x - qu)}{q} \leq \frac{f(x + su) - f(x)}{s} + c \left[\frac{qs}{q + s} \right]^{p-1} \|u\|^p,$$

$$\frac{f(x) - f(x - qu)}{q} \leq \frac{f(x + su) - f(x - qu)}{q + s} + c \left[\frac{s}{q + s} \right]^p q^{p-1} \|u\|^p.$$

If we substitute a in the place of $x - qu$ in the second inequality of lemma above, we get

$$(5) \quad \frac{f(a + qu) - f(a)}{q} \leq \frac{f(a + (q + s)u) - f(a)}{q + s} + c \left[\frac{s}{q + s} \right]^p q^{p-1} \|u\|^p$$

and we can therefore formulate the following statement.

LEMMA. Inequality (4) holds for all $x \in D$, $s, q \in \mathbb{F}_+$ and $u \in X$ with $x - qu, x + su \in D$ if and only if inequality (5) holds for all $a \in D$, $q, s \in \mathbb{F}_+$, $u \in X$ with $a + (q + s)u \in D$.

With the help of the above lemmas, we can establish the following result:

THEOREM. Let $D \subset X$ be an $\mathbb{F}$ -algebraically open and $\mathbb{F}$ -convex set, $c \geq 0$, $p > 1$ and $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ such that f satisfies inequality (3) for every $x, y \in D$ and $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$. Then f satisfies (3) with $c = 0$ as well, thus f is $\mathbb{F}$ -convex.

REMARK. Jensen [Jen06] proved (see also [Kuc09]) that every Jensen-convex function is $\mathbb{Q}$ -convex. Hence, considering the case $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, our last theorem says that approximately Jensen-convex functions in the sense of (3), with $t \in \mathbb{Q}$, are, in fact, Jensen-convex.

The next result shows that from approximate Jensen-convexity we get Jensen-convexity, if the error function ψ is appropriately small in the neighbourhood of zero.

THEOREM. Let $I \subset \mathbb{R}$ be an open interval, d_I be the length of the interval I , and $J_I = [0, d_I[$. Let the function $\psi : J_I \rightarrow [0, +\infty[$ satisfy

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\psi(t)}{t^2} = 0.$$

If a function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \psi(|x-y|)$$

for all $x, y \in I$, then f is Jensen-convex.

5. APPROXIMATE CONVEXITY IN HIGHER ORDER

In the fifth chapter of the dissertation we investigate approximate convexity (and approximate Jensen-convexity) of higher order.

Let $I \subset \mathbb{R}$ be an interval, $n \in \mathbb{N}$, and $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ distinct points in I . Denote by $[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f]$ the divided difference of f at $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ defined by the recurrence

$$\begin{aligned} [x_0; f] &= f(x_0), \\ [x_0, x_1, \dots, x_{n+1}; f] &= \frac{[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}; f] - [x_0, x_1, \dots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_0}. \end{aligned}$$

Following Hopf [Hop26] and Popoviciu [Pop45], a function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ is called convex of order n if

$$[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}; f] \geq 0$$

for all $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ in I . It is well known (and easy to verify) that convexity of order 1 coincides with the ordinary convexity.

As one may easily verify, introducing $x_0 = x$, $x_2 = y$ and $x_1 = tx + (1-t)y$, we obtain $t = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}$, $1-t = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$, while the inequality

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + Ct(1-t)\alpha(\|x-y\|)$$

can be rewritten as

$$0 \leq [x_0, x_1, x_2; f] + C \frac{\alpha(|x_2 - x_0|)}{(x_2 - x_0)^2}.$$

We will investigate the generalization of this inequality.

We use the concept of difference operators Δ_h^{n+1} defined by the following recursion:

$$\begin{aligned}\Delta_h^1 f(x) &= f(x+h) - f(x) & (x \in I, h \in \mathbb{R} : x+h \in I), \\ \Delta_h^{n+1} f(x) &= \Delta_h^1 \Delta_h^n f(x) & (x \in I, h \in \mathbb{R} : x+(n+1)h \in I),\end{aligned}$$

The notion of higher-order Jensen-convexity is due to T. Popoviciu ([Pop34, Pop45]):

DEFINITION. A function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ is called Jensen-convex of order n (where $n \in \mathbb{N}$), if

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \geq 0$$

for all $x \in I$, $h \geq 0$ such that $x + (n+1)h \in I$.

Combining the results by Popoviciu [Pop34] and Ciesielski [Cie59, Theorem 1] we can establish the following corollary.

PROPOSITION. Let I be an open interval, $n \in \mathbb{N}$ and suppose that $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ is Jensen-convex of order n . If f is bounded on a set $E \subset I$ of positive measure, then f is convex of order n .

In order to give a local characterization of convexity of higher order we define the following differentiation concept:

DEFINITION. Let $k \in \mathbb{N}$. The k -th lower Dinghas interval derivative of $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ at $\xi \in I$ is defined by

$$\underline{D}^k f(\xi) := \liminf_{\substack{(x,h) \rightarrow (\xi,0) \\ x \leq \xi \leq x+kh}} \frac{\Delta_h^k f(x)}{h^k}.$$

In a more general context, Gilányi and Páles [GP01, Corollary 1] proved a strong connection between the above two concepts. We need a special case of their result:

PROPOSITION. A function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ is Jensen-convex of order n if, and only if, $\underline{D}^{n+1} f(\xi) \geq 0$ for every $\xi \in I$.

Using this proposition it is easy to prove the following Rolewicz-type theorem:

THEOREM. If $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $I_n^* = \left\{ \frac{x-y}{n+1} : x, y \in I, y < x \right\}$ and $\psi : I_n^* \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\psi(h)}{h^{n+1}} = 0$, and for all $x \in I$ and $h > 0$ such that $x + (n+1)h \in I$ the inequality

$$\Delta_h^{n+1} f(x) + \psi(h) \geq 0$$

is fulfilled, then the function f is Jensen-convex of order n .

These results help to prove the following theorem:

THEOREM. Let $I \subset \mathbb{R}$ be an open interval, $\nu(I)$ denote the length of the interval I , $n \in \mathbb{N}$, and $J_I =]0, \nu(I)[$. Let the function $\varphi : J_I \rightarrow [0, +\infty[$ satisfy $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0$. If a function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the inequality

$$[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f] + \varphi(x_{n+1} - x_0) \geq 0$$

for all $x_j \in I$ ($j = 0, 1, \dots, n, n+1$), such that $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$, then f is convex of order n .

Finally using some technical tools we can extend the theorem to the case where the domain is an open convex set.

THEOREM. Let $D \subset \mathbb{R}^m$ be an open and convex set, $\nu(D)$ denote the diameter of the set D , $n, m \in \mathbb{N}$, $J_D =]0, \nu(D)[$. Let the function $\varphi : J_D \rightarrow [0, +\infty[$ satisfy $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0$. If a function $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the inequality

$$[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f] + \varphi(\|x_{n+1} - x_0\|) \geq 0$$

for all $x_j \in D$ ($j = 0, 1, \dots, n, n+1$) such that $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ are collinear points, then f is convex of order n .

A JELÖLT ÁLTAL TARTOTT ELŐADÁSOK

(TALKS HELD BY THE AUTHOR)

1. *Függvényegyenlet megoldása determinánsos módszerrel*, DE TTK Tudományos Diákköri Konferencia, Matematika Tagozat, 2012. május 17, Debrecen.
2. *Determinánsos módszer alkalmazása egy függvényegyenlet megoldására*, Magyar Tudomány Ünnepe (a Tomori Pál Főiskola szervezésében – nemzetközi konferencia), 2012. november 26, Budapest.
3. *Notes on approximately convex functions*, 9th International Students' Conference on Analysis, 2013. február 2–5, Ustroń (Lengyelország).
4. *Függvényegyenlet megoldása determinánsos módszerrel*, XXXI. Országos Tudományos Diákköri Konferencia, Fizika, Földtudományok és Matematika Szekció, 2013. április 18–20, Budapest.
5. *Rolewicz theorem for convexity of higher order*, 10th International Students' Conference on Analysis, 2014. február 1–4, Noszvaj-Síkfőkút.
6. *Rolewicz tétel általánosítása magasabb rendben konvex függvényekre*, Miskolci Egyetem Matematikai Intézet szemináriuma, 2014. május 21, Miskolc.
7. *Approximately Jensen-convex functions*, 11th International Students' Conference on Analysis, 2015. január 31–február 3, Ustroń (Lengyelország).
8. *Approximately Jensen-convex functions*, 16th Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2016. január 27–30, Hernádvécse.
9. *Approximately convexity with respect to a subfield*, 12th International Students' Conference on Analysis, 2016. január 30–február 2, Noszvaj-Síkfőkút.

10. *Regularitási tételek résztest felett közelítőleg konvex függvényekre*, (Debreceni Egyetem) Analízis Tanszék Síkfőkúti Szemináriuma, 2016. május 13–16, Noszvaj- Síkfőkút.
11. *Approximate Jensen-convexity and convexity with respect to a subfield*, The 4th Conference of PhD Students in Mathematics, 2016. június 27–29, Szeged.
12. *Approximate convexity with respect to a subfield*, Conference on Inequalities and Applications 2016, 2016. augusztus 28–szeptember 3, Hajdúszoboszló.
13. *Boros Zoltán 50. születésnapja alkalmára*, Ünnepi szeminárium Boros Zoltán 50-ik születésnapja alkalmából, 2016. december 12, Debrecen.
14. *Általánosított Rolewicz-tételek közelítőleg konvex függvényekre*, Miskolci Egyetem Matematikai Intézet szemináriuma, 2017. április 19, Miskolc.

A JELÖLT PUBLIKÁCIÓI (PUBLICATIONS OF THE AUTHOR)

1. Nagy Noémi: *Determinánsos módszer alkalmazása egy függvényegyenlet megoldására*, Tudományos Mozaik 9. kötet II. rész (szerk.: Daubner Katalin, Miklósné Zakar Andrea és Balázs Judit), Kalocsa (2012), 33-51.
2. Z. Boros and N. Nagy, *Approximately convex functions*, Annales Univ. Sci. Budapest, **40** (2013), 143–150.
3. Z. Boros and N. Nagy, *Generalized Rolewicz theorem for convexity of higher order*, Math. Ineq. and Appl., **18**/4 (2015), 1275–1281.
4. N. Nagy, *Approximately Jensen-convex functions*, Publ. Math. Debrecen, **89**/1-2 (2016), 89–96.
5. Z. Boros and N. Nagy, *Approximate convexity with respect to a subfield*, Acta. Math. Hungar., **152**/2 (2017), 464–472.

A disszertációban ismertetett új eredmények a 2–5. sorszámú megjelent publikációkon alapulnak.

IRODALOMJEGYZÉK

(REFERENCES)

- [Ada16] M. Adamek, *On a problem connected with strongly convex functions*, Math. Ineq. and Appl., **19**/4 (2016), 1287–1293.
- [BMN94] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem, *A sandwich with convexity*, Math. Pannonica **5** (1994), 139–144.
- [BD15] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Annalen **76**/4 (1915), 514–526.
- [BW40] R. P. Boas and D. V. Widder, *Functions with positive differences*, Duke Math. J. **7**/1 (1940), 496–503.
- [BN13] Z. Boros and N. Nagy, *Approximately convex functions*, Annales Univ. Sci. Budapest, **40** (2013), 143–150.
- [BN15] Z. Boros and N. Nagy, *Generalized Rolewicz theorem for convexity of higher order*, Math. Ineq. and Appl., **18**/4 (2015), 1275–1281.
- [BN17] Z. Boros and N. Nagy, *Approximate convexity with respect to a sub-field*, Acta. Math. Hungar., **152**/2 (2017), 464–472.
- [BP06] Z. Boros and Zs. Páles, *$\mathbb{Q}$ -subdifferential of Jensen-convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **321** (2006), 99–113.
- [Bul71] P. S. Bullen, *A criterion for n -convexity*, Pacific J. Math. **36**/1 (1971), 81–98.
- [CP93] E. Casini and P. L. Papini, *A counterexample to the infinity version of the Hyers-Ulam stability theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 885–890.
- [Cie59] Z. Ciesielski, *Some properties of convex functions of higher orders*, Ann. Polon. Math. **7**/1 (1959), 1–7.
- [Ger72] R. Ger, *Convex functions of higher order in Euclidean spaces*, Ann. Polon. Math. **25**/3 (1972) 293–302.
- [Ger74] R. Ger, *n -convex functions in linear spaces*, Aequationes Math. **10**/2-3 (1974), 172–176.
- [GN11] R. Ger and K. Nikodem, *Strongly convex functions of higher order*, Nonlinear Anal. **74**/2 (2011), 661–665.
- [GP01] A. Gilányi and Zs. Páles, *On Dinghas-type derivatives and convex functions of higher order*, Real Anal. Exchange **27**/2 (2001/2002), 485–494.

-
- [GP08] A. Gilányi and Zs. Páles, *On convex functions of higher order*, Math. Inequal. Appl. **11**/2 (2008), 271–282.
- [Gre52] J. W. Green, *Approximately convex functions*, Duke Math. J. **19** (1952), 499–504.
- [HP04] A. Háy and Zs. Páles, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36**/3 (2004), 339–350.
- [HUL01] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Hop26] E. Hopf, *Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften*, Dissertation, Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin, Berlin, 1926.
- [HU52] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828.
- [Jen06] J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30**/1 (1906), 175–193.
- [Kuc09] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, 2nd Edition, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [Lac99] M. Laczkovich, *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. **58**/1-2 (1999), 135–142.
- [LNT00] D. T. Luc, H. V. Ngai and M. Théra, *Approximate convex functions*, J. Nonlinear and Convex Anal. **1** (2000), 155–176.
- [MNP12] J. Makó, K. Nikodem and Zs. Páles, *On strong $(\alpha, \mathbb{F})$ -convexity*, Math. Inequal. Appl. **15**/2 (2012), 289–299.
- [MP11] J. Makó and Zs. Páles, *Strengthening of strong and approximate convexity*, Acta Math. Hungar. **132** (2011), 78–91.
- [MP12] J. Makó and Zs. Páles, *On φ -convexity*, Publ. Math. Debrecen **80**/1-2 (2012), 107–126.
- [Nag16] N. Nagy, *Approximately Jensen-convex functions*, Publ. Math. Debrecen, **89**/1-2 (2016), 89–96.
- [NPW99] K. Nikodem, Zs. Páles, S. Wąsowicz, *Abstract separation theorem of Rodé type and their applications* Ann. Pol. Math. **72** (1999), 207–217.
- [NN93] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118**/1 (1993), 103–108.

- [Nör24] N. E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzialrechnung*, Berlin, 1924.
- [Olb15] A. Olbryś, *On separation by h -convex functions*, Tatra Mt. Math. Publ., **62** (2015), 105–111.
- [Pál03] Zs. Páles, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **131**/1 (2003), 243–252.
- [PW05] A. Pinkus and D. Wulbert, *Extending n -convex functions* Studia Math. **171**/2 (2005) 125–152.
- [Pop34] T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles* Mathematica (Cluj) **8**/1 (1934), 1–85.
- [Pop45] T. Popoviciu, *Les Fonctions Convexes* Hermann et Cie, Paris, 1945.
- [RV73] A. W. Roberts and D. E. Varberg, *Convex Functions* Academic Press, New York, London, 1973.
- [Roc70] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [Rol79] S. Rolewicz, *On γ -paraconvex multifunctions*, Math. Japonica **24** (1979), 293–300.
- [Rol00] S. Rolewicz, *On $\alpha(\cdot)$ -paraconvex and strongly $\alpha(\cdot)$ -paraconvex multifunctions*, Control Cybernet. **29** (2000), 367–377.
- [Rol05] S. Rolewicz, *Paraconvex analysis*, Control Cybernet. **34**/3, (2005), 951–965.
- [TT09] J. Tabor and J. Tabor, *Generalized approximate midconvexity*, Control Cybernet. **38**/3 (2009), 655–669.
- [Was06] Sz. Wąsowicz, *Some properties of generalized higher-order convexity* Publ. Math. Debrecen **68**/1-2 (2006), 171–182.
- [Was07] Sz. Wąsowicz, *Support-type properties of convex functions of higher order and Hadamard-type inequalities* J. Math. Anal. Appl. **332**/2 (2007) 1229–1241.



Nyilvántartási szám: DEENK/71/2018.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Nagy Noémi

Neptun kód: D148PE

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10047367

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (3)

1. Boros, Z., **Nagy, N.**: Approximate convexity with respect to a subfield.

Acta Math. Hung. 152 (2), 464-472, 2017. ISSN: 0236-5294.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10474-017-0701-y>

IF: 0.583 (2016)

2. **Nagy, N.**: Approximately Jensen-convex functions.

Publ. Math. Debr. 89 (1-2), 89-96, 2016. ISSN: 0033-3883.

DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2016-7332>

IF: 0.431

3. Boros, Z., **Nagy, N.**: Approximately convex functions.

Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 40, 143-150, 2013. ISSN: 0138-9491.

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

4. Boros, Z., **Nagy, N.**: Generalized Rolewicz theorem for convexity of higher order.

Math. Inequal. Appl. 18 (4), 1275-1281, 2015. ISSN: 1331-4343.

DOI: <http://dx.doi.org/10.7153/mia-18-99>

IF: 0.544





További közlemények

Magyar nyelvű absztrakt kiadványok (1)

5. **Nagy, N.:** Determinánsos módszer alkalmazása egy függvényegyenlet megoldására.

In: Tudományos Mozaik. 9. köt. 2. rész : Régi dilemmák - új megoldások. Szerk.: biz.:

Daubner Katalin, Miklósné Zakar Andrea, Balázs Judit, Tomori Pál Főiskola, Kalocsa, 33-50,

2012. ISBN: 9789638816216

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 1,558

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
1,558**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2018.03.14.





Registry number:
Subject:

DEENK/71/2018.PL
PhD Publikációs Lista

Candidate: Noémi Nagy

Neptun ID: D148PE

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10047367

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (3)

1. Boros, Z., **Nagy, N.**: Approximate convexity with respect to a subfield.

Acta Math. Hung. 152 (2), 464-472, 2017. ISSN: 0236-5294.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10474-017-0701-y>

IF: 0.583 (2016)

2. **Nagy, N.**: Approximately Jensen-convex functions.

Publ. Math. Debr. 89 (1-2), 89-96, 2016. ISSN: 0033-3883.

DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2016-7332>

IF: 0.431

3. Boros, Z., **Nagy, N.**: Approximately convex functions.

Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 40, 143-150, 2013. ISSN: 0138-9491.

Foreign language scientific articles in international journals (1)

4. Boros, Z., **Nagy, N.**: Generalized Rolewicz theorem for convexity of higher order.

Math. Inequal. Appl. 18 (4), 1275-1281, 2015. ISSN: 1331-4343.

DOI: <http://dx.doi.org/10.7153/mia-18-99>

IF: 0.544





List of other publications

Hungarian abstracts (1)

5. **Nagy, N.:** Determinánsos módszer alkalmazása egy függvényegyenlet megoldására.

In: Tudományos Mozaik. 9. köt. 2. rész : Régi dilemmák - új megoldások. Szerk.: biz.:

Daubner Katalin, Miklósné Zakar Andrea, Balázs Judit, Tomori Pál Főiskola, Kalocsa, 33-50,

2012. ISBN: 9789638816216

Total IF of journals (all publications): 1,558

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,558

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

14 March, 2018

