DE TTK

1949

Általánosított Rolewicz-tételek közelítőleg konvex függvényekre

egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: **Nagy Noémi**

Témavezető: **Dr. Boros Zoltán**

Debreceni Egyetem

Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2018.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.
Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2018.

. . . .
Nagy Noémi
jelölt

Tanúsítom, hogy Nagy Noémi doktorjelölt 2013-2016 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek program keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.
Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2018.

. . . .
Dr. Boros Zoltán
témavezető

Általánosított Rolewicz-tételek közelítőleg konvex függvényekre

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében a matematika tudományágban

Írta: Nagy Noémi okleveles alkalmazott matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok Doktori Iskolája (Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek doktori programja) keretében

Témavezető: Dr. Boros Zoltán

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr.	. . . .
tagok:	Dr.	. . . .
	Dr.	. . . .

A doktori szigorlat időpontja: 201 . . . .

Az értekezés bírálói:

Dr.	. . . .
Dr.	. . . .
Dr.	. . . .

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	. . . .
tagok:	Dr.	. . . .
	Dr.	. . . .
	Dr.	. . . .
	Dr.	. . . .

Az értekezés védésének időpontja: 201 . . . .

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék elsősorban Dr. Boros Zoltánnak, témavezetőmnek köszönetet mondani, akihez bármikor, bármilyen problémával fordulhattam és mindig igyekezett a legjobb tanácsokat adni, iránymutatásaival segíteni, bátorítani és támogatni a kitűzött céljaim elérésében. Köszönöm továbbá azoknak az oktatóimnak, akikkel tanulmányaim során találkoztam, külön kiemelve az Analízis Tanszék tagjait.

Hálás vagyok kollégáimnak, hogy motiváltak az értekezés elkészítése során és mindvégig jó tanácsokkal láttak el. Köszönöm szüleim, testvérem és barátaim állandó támogatását, biztatását, türelmét. Szeretném külön is kifejezni hálámat Dr. Baják Szabolcsnak, aki folyamatosan mellettem állt és igyekezett mindenben segítséget nyújtani számomra. Nélkülük ez az értekezés nem készülhetett volna el.

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés

1.1. A közelítő konvexitásra vonatkozó korábbi eredmények rövid áttekintése

Egy valós értékű f függvényt, mely egy valós lineáris tér egy konvex részhalmazán van értelmezve, konvexnek nevezzük, ha teljesíti az

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1.1}$$

egyenlőtlenséget minden $t \in [0,1]$ és minden, az f értelmezési tartományából vett x, y esetén. Azt mondjuk, hogy f Jensen-konvex, ha az (1.1) egyenlőtlenség igaz $t = 1/2$ esetén. Jensen cikkét [Jen06], melyben a szerző bizonyította, hogy bármely Jensen-konvex f függvény teljesíti az (1.1) egyenlőtlenséget minden $t \in [0,1]$ racionális számra, a konvex függvényekkel kapcsolatos eredmények kezdeteként is tekinthetjük. Néhány évvel később Bernstein és Doetsch [BD15] bizonyította, hogy ha feltesszük, hogy az értelmezési tartomány egy véges dimenziós euklideszi tér konvex részhalmaza, akkor egy nemüres nyílt halmazon értelmezett felülről korlátos Jensen-konvex függvény folytonos, és így konvex. Azóta a témával kapcsolatban számos publikáció született. Ebből következően mi csak néhány, a vizsgálatainkat motiváló cikket és monográfiát sorolunk fel.

Ha az értelmezési tartomány egy nyílt intervallum, akkor egy függvény konvexitása jellemezhető egyrészt bizonyos differenciahányadosokra teljesülő egyenlőtlenségek segítségével, másrészt az értelmezési tartomány minden egyes pontjában a függvény gráfja alatti tartóegyenesek létezésével. Ezek a megfigyelések a konvex valós függvények egyoldali differenciálhatóságához és folytonosságához vezetnek. Az eredmények kiterjeszthetők a konvex függvények még általánosabb értelmezési tartományokon értelmezett [RV73, Roc70], valamint a résztestre vonatkozó konvexitás vizsgálataira [BP06] (ami Jensen eredményei és a nemfolytonos Jensen-konvex függvények létezése alapján jól motivált).

Számos publikációban foglalkoztak olyan közelítőleg konvex f függvények vizsgálatával, melyek teljesítik az

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \\ + C\Phi(t,\, 1-t)\,\psi(\|x-y\|)\,, \end{aligned} \tag{1.2}$$

alakú függvényegyenlőtlenséget, ahol $f : D \to \mathbb{R}$ az X normált tér egy D konvex, nyílt részhalmazán van értelmezve, $\|u\|$ pedig az $u \in X$ normáját jelöli, C egy (általában nemnegatív) rögzített valós szám, $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ és $\psi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ adott függvények, míg az (1.2) egyenlőtlenségről feltesszük, hogy minden $t \in [0,1]$ és $x, y \in D$ esetén teljesül. (Alapértelmezésben ezek lesznek x, y és t értékeli, illetve külön kihangsúlyozzuk, ha további megszorításokkal élünk.) A kutatások gyakran az $X = \mathbb{R}$ esetre szorítkoznak, ahol f egy nyílt intervallumon van értelmezve és $\|u\|$ helyett u abszolút értéke, $|u|$ írható.

A $C = 0$ esetben az (1.2) egyenlőtlenség a konvex függvények definíciójával egyenértékű. Ha $C \geq 0$ és $\Phi(t, 1-t) = \psi(\|x-y\|) = 1$ minden $t \in [0,1]$, $x, y \in D$ esetén egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az (1.2) egyenlőtlenséget, C-konvexnek nevezzük. A C-konvex függvények első vizsgálata Hyers és Ulam [HU52] nevéhez köthető. Eredményeik szerint ha az értelmezési tartomány egy véges n dimenziós X tér egy D részhalmaza és az f függvény C-konvex, akkor létezik egy olyan $g : D \to \mathbb{R}$ konvex függvény, hogy minden $x \in D$ esetén

$$|f(x) - g(x)| \leq k_n C.$$

A k_n konstansra vonatkozóan belátták, hogy

$$k_n \leq \frac{n(n+3)}{4(n+1)}.$$

A C-konvexitással Green [Gre52] is foglalkozott, és erősebb állításokat is sikerült bizonyítania. Másrészt Laczkovich [Lac99] megmutatta, hogy

$$k_n \geq \frac{1}{4}\log_2(n/2).$$

Ez az alsó becslés megmutatja, hogy az állítás nem terjeszthető ki végtelen dimenziós terekre. Casini és Papini [CP93] korábban egy példát konstruált erre vonatkozóan.

Luc, Ngai és Théra [LNT00] az (1.2) egyenlőtlenség f megoldásait abban az esetben vizsgálták, mikor X Banach-tér, $\Phi(t,s) = ts$ és $\psi(h) = h$. Ezeken felül feltették f-ről, hogy alulról félig folytonos.

A ψ-parakonvex és erősen ψ-parakonvex függvények fogalmát Rolewicz vezette be, és számos publikációjában vizsgálta az (1.2) egyenlőtlenséget azokban az esetekben, amikor $\Phi(t, s) = \min\{t, s\}$ vagy $\Phi(t, s) = 1$. Az X-re vonatkozó feltételeknek és a ψ függvény origó közeli viselkedésének különböző eseteit vizsgálva számos eredménye született. Ha $X = \mathbb{R}$, $\psi(h) = h^p$ valamely rögzített $p > 2$ kitevővel, $C \geq 0$ és $\Phi(t, s) = 1$, Rolewicz a [Rol79] publikációjában bizonyította, hogy az (1.2) egyenlőtlenség minden $f : D \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos megoldása konvex. Későbbi publikációjában [Rol00] ezen eredményét kiterjesztette arra az általánosabb esetre, mikor X Banach-tér és $\psi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ teljesíti a

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{h^2} = 0$$

feltételt. Eredményeiben megmutatja, hogy a ψ-re vonatkozó feltétel nem hagyható el. Például könnyen megmutatható, hogy az $f(x) = -Cx^2$ $(x \in \mathbb{R})$ valós függvény erősen ψ-parakonvex $\psi(h) = h^2$ esetén, de f nem konvex, ha $C > 0$. Hasonló számításokkal belátható a következő állítás: ha $X = \mathbb{R}$, $\Phi(t, s) = ts$, $\psi(h) = h^2$ és f megoldja minden $t \in [0, 1]$ és $x, y \in D$ esetén az (1.2) egyenlőtlenséget, akkor a $g(x) = f(x) + Cx^2$ $(x \in D)$ függvény konvex. Az állítás negatív C értékek esetén is igaz marad. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy f erősen konvex (lásd: [HUL01, 1.1.2. Állítás] és [MN10]). Megjegyezzük, hogy $\Phi(t, s) = \min\{t, s\}$ és $\Phi(t, s) = ts$ az (1.2) egyenlőtlenség esetében lényegében ekvivalens, ugyanis minden $t \in [0, 1]$ érték esetén

$$\frac{1}{2} \min\{t, 1 - t\} \leq t(1 - t) \leq \min\{t, 1 - t\}.$$

Luc, Ngai és Théra szellemében, valamint a C-konvex függvények és vizsgálatuk során kapott eredmények által motiválva Páles [Pál03] belátta a következő tételt: Legyen I az $\mathbb{R}$ egy nyílt részintervalluma, ε, δ nemnegatív valós számok. Egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor oldja meg az

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon t(1-t)|x-y| + \delta \tag{1.3}$$

egyenlőtlenséget, ha f előáll $f = g + \alpha + \beta$ alakban, ahol $g : I \to \mathbb{R}$ konvex, $\alpha : I \to \mathbb{R}$ egy Lipschitz-függvény és $\beta : I \to \mathbb{R}$ korlátos.

A Jensen-konvex (vagy 1/2-konvex) függvény fogalma olyan $f : D \to \mathbb{R}$ függvényekre vonatkozik, melyek megoldásai az (1.2) függvényegyenletnek $t = 1/2$ és $C = 0$ mellett. A nevezetes Bernstein-Doetsch tétel [BD15] szerint ha f Jensen-konvex és felülről lokálisan korlátos, akkor az f függvény konvex. Hasonlóan, ha f megoldása minden $x, y \in D$ esetén az (1.2) egyenlőtlenségnek $t = 1/2$, $C \geq 0$ és $\Phi(1/2, 1/2) = \psi(\|x-y\|) = 1$ választása mellett és f felülről lokálisan korlátos, akkor az f függvény $2C$-konvex [NN93]. Házy és Páles [HP04] egy $p \in [0, 1]$ hatványkitevőt bevezetve az (1.2) egyenlőtlenség olyan alakjának megoldásai közötti kapcsolatokat vizsgálták, ahol $\Phi(t, s) = (ts)^p$, $\psi(h) = h^p$. Továbbá azon speciális esetekben, amikor $t = 1/2$, hasonló eredményeket kaptak.

Makó és Páles [MP12] a témában ismert számos korábbi eredmény egy közös általánosítása érdekében az

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) \leq\, & tf(x) + (1-t)f(y) \\ & + t\varphi((1-t)|x-y|) + (1-t)\varphi(t|x-y|) \end{aligned} \tag{1.4}$$

egyenlőtlenséget vizsgálta. Több eredményt kaptak a $t = 1/2$ és a $t \in [0, 1]$ esetekben a nemnegatív φ hibafüggvényre vonatkozó különböző feltételek mellett. Ez a megközelítés többek között lehetővé tette, hogy az (1.4) egyenlőtlenséget jellemezzük módosított differenciahányadosokat tartalmazó egyenlőtlenségeken keresztül, valamint a módosított tartótulajdonság segítségével.

Az erős konvexitás fogalma az (1.1) egyenlőtlenségnél erősebb egyenlőtlenséget teljesítő függvényekre vonatkozik. Az erősen konvex függvények néhány alaptulajdonságát Merentes és Nikodem [MN10] vizsgálta. Együtt tekintve ezt a vizsgálatot a fentebb említettekkel, Makó, Nikodem és Páles [MNP12] az

$$\begin{aligned} f\,(tx + (1-t)y) \leq & tf(x) + (1-t)f(y) \\ & - t\alpha\,((1-t)(x-y)) - (1-t)\alpha\,(t(y-x)) \end{aligned} \tag{1.5}$$

egyenlőtlenséggel foglalkozott abban az esetben, amikor α egy nemnegatív, szimmetrikus függvény és $t \in [0, 1]$ a valós számok egy résztestének eleme. Az ilyen értelemben vett erős konvexitás számos jellemzését bizonyították.

Ezeknek és Rolewicz eredményeinek összehasonlítását Jacek Tabor és Józef Tabor [TT09a] dolgozta ki.

1.2. Rolewicz néhány tételének bemutatása

Amint arra az előbbi áttekintésben már utaltunk, 1979-ben Rolewicz bizonyította [Rol79, 4. Lemma], hogy ha $C \geq 0$ és $p > 0$, akkor az

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + C|x-y|^{2+p} \tag{1.6}$$

függvényegyenlőtlenség minden abszolút folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldása konvex.

Később számos publikációjában ([Rol05] és annak irodalomjegyzékében szereplő cikkei) Rolewicz az

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) + Ct(1 - t)\alpha(\|x - y\|) \tag{1.7}$$

vagy

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) + C\alpha(\|x - y\|) \tag{1.8}$$

függvényegyenlőtlenség folytonos $f : D \to \mathbb{R}$ megoldásait vizsgálta abban az esetben, amikor D egy X valós Banach-tér konvex, nyílt részhalmaza, C egy nemnegatív konstans és $\alpha : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ egy nemcsökkenő függvény, amely teljesíti a

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\alpha(t)}{t} = 0$$

feltételt (illetve korlátos D esetén $\alpha : [0, \mathrm{diam}(D)[\to [0, K]$, ahol $\mathrm{diam}(D)$ jelöli D átmérőjét és $K \in [0, +\infty[$). Rolewicz [Rol02] bebizonyította, hogy ha az X^* duális tér szeparábilis, akkor az (1.7) egyenlőtlenség minden $f : D \to \mathbb{R}$ megoldásához létezik a D-nek egy első kategóriájú A_f részhalmaza úgy, hogy a $D \setminus A_f$ halmaz pontjaiban f Fréchet-differenciálható. Ez az eredmény többek között azért is érdekes, mert az α hibafüggvényre felírt feltétel mellett nem következik, hogy az (1.7) egyenlőtlenség minden $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos megoldása konvex lenne (példa: $f(x) = -x^2$ $(x \in \mathbb{R})$).

Általánosságban az (1.8) egyenlőtlenségnek lehet olyan megoldása, ami nem teljesíti az (1.7) egyenlőtlenség egyetlen speciális esetét sem, még abban az esetben sem, ha megengedjük a C és α különbözőségét (lásd még: [TT12]).

A szakasz elején említett tétel általánosításaként Rolewicz bizonyította, hogy a további

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\alpha(t)}{t^2}=0\,, \tag{1.9}$$

feltétel mellett az (1.8) vagy (1.7) egyenlőtlenség minden folytonos megoldása konvex.

1.3. Az értekezés felépítése

Az értekezésben olyan függvények vizsgálatával foglalkozunk, amelyek bizonyos megengedett hibával teljesítik a konvexitási egyenlőtlenségét a súlyokra vonatkozó megszorítások mellett (pl. Jensen-konvexitás, résztestre vonatkozó konvexitás). Először a hibatagot tartalmazó tartófüggvényeket (szubgradienseket) határozzuk meg, majd ennek felhasználásával a hibatagra vonatkozó feltevések mellett egyfajta differenciálhatóságot igazolunk. Ezt követően alkalmas kontrollfüggvényekre nézve közelítőleg (résztest felett) konvex függvényekkel történő szeparálhatóságot karakterizálunk, amiből stabilitási tételt is nyerünk. Végül hiperstabilitás jellegű (Rolewicz fentebb említett tételeivel analóg vagy azokat általánosító) eredményeket igazolunk résztest feletti, illetve magasabb rendű (Jensen-)konvexitásra.

Legyen $\mathbb{F}$ az $\mathbb{R}$ egy részteste és X lineáris tér $\mathbb{F}$ felett. Legyen továbbá $D \subseteq X$ egy nemüres $\mathbb{F}$-konvex halmaz, $D^* := D - D := \{x - y \ : \ x, y \in D\}$ és $\alpha : D^* \to \mathbb{R}$ egy nemnegatív páros függvény. Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt

$(\alpha, \mathbb{F})$-konvexnek nevezzük, ha teljesíti az

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) \le{}& tf(x) + (1-t)f(y) \\ &+ t\alpha((1-t)(x-y)) + (1-t)\alpha(t(y-x)) \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ és minden $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén. A 2. fejezetben jellemezzük az $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex függvényeket, összehasonlítva a módosított differenciahányadossal és kapcsolódó tulajdonságaival. Ha α eleget tesz néhány további feltételnek, az $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex függvények bizonyos értelemben vett differenciálhatóságára kapunk eredményt.

Baron, Matkowski és Nikodem [BMN94] bizonyították, hogy az I intervallumon értelmezett, valós értékű f és g függvények akkor és csak akkor teljesítik az

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \le tg(x) + (1-t)g(y)$$

egyenlőtlenséget, ha létezik olyan $h : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, amelyre $f(x) \le h(x) \le g(x)$ teljesül minden $x \in I$ pontban. Dolgozatukban megjegyezték, hogy az általuk alkalmazott gondolatmenet szerint egy $n-1$ dimenziós tér konvex D részhalmazán értelmezett függvények esetében a konvex szeparátor létezésének szükséges és elegendő feltétele az

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i)$$

egyenlőtlenség teljesülése minden $x_1, \ldots, x_n \in D$, $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ esetén, ahol $t_1 + \ldots + t_n = 1$.

A 3. fejezet első szakaszában megfogalmazzuk és igazoljuk ennek a tételnek azt a változatát, amikor a szeparátor a valós számok egy $\mathbb{F}$ résztestére nézve konvex függvény.

Merentes és Nikodem [MN16] (Baron, Matkowski és Nikodem fent említett tételének felhasználásával) szükséges és elegendő feltételt adtak erősen konvex szeparátor létezésére. Ezt az eredményt Adamek [Ada16] általánosította affin differenciaként előálló kontrollfüggvényre nézve konvex szeparátor esetére.

A 3. fejezet második szakaszában azzal foglalkozunk, miként lehet Adamek eredményét kiterjeszteni az első szakaszban vizsgált absztrakt esetre.

Boros Zoltánnal a [BN13] publikációban a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + c\big(t(1-t)\,\|x-y\|\,\big)^p \tag{1.10}$$

egyenlőtlenséget vizsgáltuk. Feltettük, hogy az f egy lineáris normált tér egy D konvex, nyílt részhalmazán értelmezett függvény, c rögzített valós szám, $p > 1$ rögzített. Az $\mathbb{F}$-differenciálhatóság és $\mathbb{F}$-konvexitás tulajdonságait, illetve ezek kapcsolatát Boros és Páles a [BP06] publikációban írták le. Ezen eredmények alapján bármely, az (1.10) egyenlőtlenséget teljesítő f függvényről a $t \in \mathbb{F}$ megszorító feltétel mellett megmutatható, hogy $\mathbb{F}$-konvex. Ezek az eredmények a 4. fejezet első szakaszában találhatók. Nevezetesen, a 4.1. szakaszban belátjuk, hogy ha $\mathbb{F}$ az $\mathbb{R}$ egy részteste és f egy $\mathbb{F}$ feletti X vektortér $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex D részhalmazán értelmezett valós függvény, ami megoldja az (1.10) egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ és $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén egy nemnegatív valós c és egy rögzített $p > 1$ kitevő mellett (ahol $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ egy pozitív definit, abszolút $\mathbb{F}$-homogén, szubadditív leképezés, egyfajta norma), akkor $\mathbb{F}$-konvex, azaz f megoldja a fenti egyenlőtlenséget $c = 0$ mellett is. Amikor $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, a Jensen-konvex függvények egyfajta jellemzését kapjuk.

A 4. fejezet második szakaszában megmutatjuk, hogy ha egy függvény teljesíti a Jensen-egyenlőtlenséget (vagy a $\mathbb{Q}$-konvexitást leíró egyenlőtlenséget) egy megfelelő hibataggal, akkor a függvény Jensen-konvex (hibatag nélkül) is. E célból tekintsünk egy f függvényt, ami az $\mathbb{R}$ egy I nyílt intervallumán van értelmezve. Megmutatjuk, hogy ha $f : I \to \mathbb{R}$ teljesíti az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \psi(|x-y|)$$

egyenlőtlenséget, továbbá

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\psi(t)}{t^2} = 0$$

teljesül, akkor f Jensen-konvex.

Az n-edrendben konvex függvény definíciója tetszőleges I valós intervallumon értelmezett függvény osztott differenciájából származtatható olyan módon, hogy az osztott differencia értéke nemnegatív bármely $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) I-beli pontok esetén ([Hop26, Pop45]). Hasonlóan definiálható a magasabb rendben Jensen-konvex függvény fogalma a differencia operátor segítségével ([Pop34, Pop45]). Mivel a rögzített lépésközű magasabb rendű differenciák kifejezhetők az osztáspontok által meghatározott osztott differenciák felhasználásával, így az n-edrendben konvex függvények n-edrendben Jensen-konvexek is. A magasabb rendben konvex és Jensen-konvex függvényeket széles körben vizsgálták ([BW40, Bul71, Cie59, GP01, GP08, Kuc09, PW05, RV73, Was06, Was07]). Az n-edrendű Jensen-konvexitás magasabb dimenzióba történő általánosításaival R. Ger foglalkozott ([Ger72, Ger74]).

Az 5. fejezetben az (1.7) egyenlőtlenséggel analóg magasabb rendben közelítőleg konvex függvényeket vizsgálunk. A fejezet első szakaszában áttekintjük azokat az eszközöket és állításokat, amelyek tételünk bizonyításában szerepet játszanak. Ezt követően ismertetjük és bizonyítjuk tételeinket, melyek regularitási feltételek bevezetése nélkül mondják ki, hogy a vizsgált közelítőleg n-edrendben Jensen-konvex illetve közelítőleg n-edrendben konvex függvény esetében a hibatag elhagyható, azaz a függvény n-edrendben Jensen-konvex illetve n-edrendben konvex is. A fejezet második szakaszában az utóbbi eredményt véges dimenziós vektortereken értelmezett függvényekre terjesztjük ki.

2. Közelítő $\mathbb{F}$-konvexitás összetett hibatagra

2.1. Közelítőleg $\mathbb{F}$-konvex függvények szubdifferenciálja

A közelítőleg konvex függvényekre vonatkozó korábbi vizsgálatok általánosításaként Makó és Páles [MP12] a bevezetőben leírt (1.4) függvényegyenlőtlenség megoldásaira igazoltak módosított differencia-egyenlőtlenséget és tartótulajdonságot. Az erős konvexitás és a résztestre vonatkozó konvexitás fogalmait ötvözve Makó, Nikodem és Páles [MNP12] az (1.5) egyenlőtlenséget tárgyalták, ahol $t \in [0, 1]$ a valós számok egy résztestének eleme. Ebben a fejezetben ezeket a koncepciókat összekombinálva jellemezzük a valós számok valamely résztestére vonatkozóan közelítőleg konvex függvényeket, valamint azok regularitási tulajdonságait.

Ebben és a további fejezetekben jelölje $\mathbb{F}$ a valós számok $\mathbb{R}$ testének egy résztestét és X legyen egy lineáris tér $\mathbb{F}$ felett, $\mathbb{F}_+$ az $\mathbb{F}$ pozitív elemeinek halmaza, $\overline{\mathbb{R}}_+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

Elsőként definiáljuk az $\mathbb{F}$-konvex és az $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt halmazok, valamint az $\mathbb{F}$-konvex függvény fogalmát, a [BP06] definícióit idézve.

2.1.1. Definíció. *Az X tér egy D részhalmazát $\mathbb{F}$-konvexnek hívjuk, ha $tx + (1-t)y \in D$ minden $x, y \in D$ és $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén.*

2.1.2. Definíció. *Az X tér egy D részhalmazát $\mathbb{F}$-algebrailag nyíltnak nevezzük, ha minden $x \in D$ és $u \in X$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy $x + ru \in D$ teljesül minden $r \in]-\delta, \delta[\cap \mathbb{F}$ számra.*

2.1.3. Definíció. *Legyen $D \subseteq X$ egy nemüres $\mathbb{F}$-konvex halmaz. Egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt $\mathbb{F}$-konvexnek nevezünk, ha*

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1}$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén.

A következőkben bevezetjük a jelen fejezetben vizsgált és a bevezetésben említett $(\alpha, \mathbb{F})$-konvexitás fogalmát, majd elvégezzük ennek karakterizációját a módosított differenciahányadosok összehasonlításával, valamint egy megfelelő tartótulajdonság segítségével.

2.1.4. Definíció. *Legyen $D \subseteq X$ egy nemüres $\mathbb{F}$-konvex halmaz,*

$$D^* := D - D := \{x - y \ : \ x, y \in D\}$$

és $\alpha : D^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ egy páros függvény. Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt $(\alpha, \mathbb{F})$-konvexnek nevezzük, ha megoldja az

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) \le\, & tf(x) + (1-t)f(y) \\ & + t\alpha((1-t)(x-y)) + (1-t)\alpha(t(y-x)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ és minden $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén.

2.1.5. Tétel. *Legyen $D \subseteq X$ nemüres, $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex halmaz, $\alpha : D^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ egy páros leképezés és $f : D \to \mathbb{R}$ egy függvény. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(i) f $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex D-n;

(ii) minden olyan $r, s \in \mathbb{F}_+$, $u \in D$ és $h \in X$ esetén, ahol $u - sh$, $u + rh \in D$, az

$$\frac{f(u) - f(u - sh) - \alpha(-sh)}{s} \leq \frac{f(u + rh) - f(u) + \alpha(rh)}{r} \tag{2.3}$$

egyenlőtlenség teljesül;

(iii) létezik egy $A : D \times X \to \mathbb{R}$ leképezés, amelyre fennáll az

$$f(u + rh) - f(u) \geq rA(u, h) - \alpha(rh) \tag{2.4}$$

egyenlőtlenség minden $u \in D$, $r \in \mathbb{F}$ és $h \in X$ esetén, ahol $u + rh \in D$.

Bizonyítás. *(i) $\Rightarrow$ (ii)*: Tegyük fel, hogy az f függvény $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex és vezessük be az $u \in D$, $h \in X$ és $r, s \in \mathbb{F}_+$ elemeket úgy, hogy $u - sh$, $u + rh \in D$. Írjuk x helyére az $u - sh$, y helyére az $u + rh$ értékeket és legyen $t = \frac{r}{r+s}$. Ekkor $t \in \mathbb{F}$, $0 < t < 1$, $1 - t = \frac{s}{r+s}$, $tx + (1 - t)y = u$, és a (2.2) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(u) \leq \frac{r}{r+s} f(u - sh) &+ \frac{s}{r+s} f(u + rh) \\ &+ \frac{r}{r+s}\alpha\left(\frac{s}{r+s}((u - sh) - (u + rh))\right) \\ &+ \frac{s}{r+s}\alpha\left(\frac{r}{r+s}((u + rh) - (u - sh))\right), \end{aligned}$$

vagyis,

$$f(u) \leq \frac{r}{r+s} f(u - sh) + \frac{s}{r+s} f(u + rh) + \frac{r}{r+s}\alpha(-sh) + \frac{s}{r+s}\alpha(rh).$$

Ebből az egyenlőtlenségből

$$(r+s)f(u) \le rf(u-sh) + sf(u+rh) + r\alpha(-sh) + s\alpha(rh) \tag{2.5}$$

következik, és így

$$r\left[f(u) - f(u-sh) - \alpha(-sh)\right] \le s\left[f(u+rh) - f(u) + \alpha(rh)\right].$$

Tehát a (2.3) egyenlőtlenség teljesül.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Tegyük fel, hogy *(ii)* igaz és $u \in D$, $h \in X$ esetén definiáljuk az

$$R(u,h) = \left\{ \frac{f(u+rh) - f(u) + \alpha(rh)}{r} \ :\ r \in \mathbb{F}_+ \text{ úgy, hogy } u + rh \in D \right\}$$

halmazt. A D-re vonatkozó feltétel következtében az $R(u,h)$ halmaz nemüres és a (2.3) egyenlőtlenség alkalmazásával megmutatható, hogy $R(u,h)$ alulról korlátos. Legyen $A(u,h) := \inf R(u,h)$. Ha a (2.3) egyenlőtlenség bal oldalát átírjuk, azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(u-sh) - f(u) + \alpha(-sh)}{-s} \le \frac{f(u+rh) - f(u) + \alpha(rh)}{r}.$$

Itt s helyére $-s$-et írva (ekkor $s < 0 < r$ és $s, r \in \mathbb{F}$), az adódik, hogy

$$\frac{f(u+sh) - f(u) + \alpha(sh)}{s} \le \frac{f(u+rh) - f(u) + \alpha(rh)}{r}.$$

Így

$$\frac{f(u+sh) - f(u) + \alpha(sh)}{s} \le A(u,h) \le \frac{f(u+rh) - f(u) + \alpha(rh)}{r}.$$

A bal oldali egyenlőtlenség miatt minden $s < 0$ ($s \in \mathbb{F}$) esetén azt kapjuk, hogy

$$f(u+sh) - f(u) + \alpha(sh) \ge sA(u,h),$$

így

$$f(u+sh) - f(u) \ge sA(u,h) - \alpha(sh),$$

a jobb oldali egyenlőtlenség miatt pedig minden $0 < r$ $(r \in \mathbb{F})$ esetén

$$f(u + rh) - f(u) \geq rA(u, h) - \alpha(rh)$$

adódik. Ebből következik hogy a (2.4) egyenlőtlenség fennáll, valamint nyilvánvalóan $r = 0$ esetén is teljesül.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: Tegyük fel, hogy *(iii)* fennáll és legyen $u \in D$, $r \in \mathbb{F}$ és $h \in X$. Ekkor az $r < 0$ esetben írjuk az r helyére a $-s$ számot (ekkor $s > 0$), így

$$f(u - sh) - f(u) \geq -sA(u, h) - \alpha(-sh) \tag{2.6}$$

minden olyan esetben, amikor $u - sh \in D$. Másrészt ha $0 \leq r$ úgy, hogy $u + rh \in D$, a (2.4) egyenlőtlenség teljesül.

Ha a (2.6) egyenlőtlenséget az $\frac{r}{r+s}$ hányadossal, a (2.4) egyenlőtlenséget pedig az $\frac{s}{r+s}$ értékkel szorozzuk és ezt a kettőt összeadjuk, akkor a

$$\begin{aligned}\frac{-rs}{r+s}A(u,h) - \frac{r}{r+s}\alpha(-sh) + \frac{rs}{r+s}A(u,h) - \frac{s}{r+s}\alpha(rh)\\ \leq \frac{r}{r+s}f(u-sh) - \frac{r}{r+s}f(u) + \frac{s}{r+s}f(u+rh) - \frac{s}{r+s}f(u)\end{aligned}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami könnyen az

$$\begin{aligned}f(u) \leq \frac{r}{r+s}f(u-sh) &+ \frac{s}{r+s}f(u+rh)\\ &+ \frac{r}{r+s}\alpha(-sh) + \frac{s}{r+s}\alpha(rh)\end{aligned} \tag{2.7}$$

alakra egyszerűsíthető. Legyen most $x, y \in D$ és $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$. Elvégezve az $u := tx + (1 - t)y$, $r := t$, $s := 1 - t$ és $h := y - x$ helyettesítéseket, a (2.7) egyenlőtlenség

$$\begin{aligned}f(tx + (1-t)y) \leq\, & tf(x) + (1-t)f(y) +\\ & t\alpha((1-t)(x-y)) + (1-t)\alpha(t(y-x)).\end{aligned}$$

alakba írható. Ezzel beláttuk a tételt. □

2.2. Közelítőleg $\mathbb{F}$-konvex függvények differenciálhatósága

Ebben a szakaszban a Rolewicz [Rol00, Rol05] dolgozataiban szereplő differenciálhatósági tételekkel analóg módon bizonyos regularitási tulajdonságokat igazolunk, alkalmazva az előző részben bizonyított tartótulajdonságot a megfelelően kis hibataggal rendelkező közelítően $\mathbb{F}$-konvex függvényekre.

2.2.1. Tétel. *Legyen $D \subseteq X$ egy nemüres, $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex halmaz és $\alpha : D^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ egy olyan páros függvény, hogy minden $h \in X$ esetén az $r \mapsto \alpha(rh)$ leképezés (mely minden olyan $r \in \mathbb{F}_+$ esetén értelmezett, amikor $rh \in D^*$) folytonos és teljesíti a*

$$\lim_{\mathbb{F}_+ \ni r \to 0} \frac{\alpha(rh)}{r} = 0 \tag{2.8}$$

feltételt. Ha $f : D \to \mathbb{R}$ $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex és $A : D \times X \to \mathbb{R}$ a 2.1.5. Tétel (iii) állításában és bizonyításában leírt leképezés, akkor minden $u \in D$ és $h \in X$ esetén

$$A(u,h) = \lim_{s \to 0,\ s \in \mathbb{F}_+} \frac{f(u+sh) - f(u)}{s}.$$

Továbbá a $h \mapsto A(u,h)$ $(h \in X)$ leképezés pozitív $\mathbb{F}$-homogén és szubadditív minden $u \in D$-re.

Bizonyítás. A (2.5) egyenlőtlenségből, ami ekvivalens az $(\alpha, \mathbb{F})$-konvexitással, kapjuk minden olyan $u \in D$, $h \in X$ és $r, s \in \mathbb{F}_+$ esetén, amire $u - sh$, $u + rh \in D$, hogy

$$\begin{aligned}\frac{f(u) - f(u-sh)}{s} \le &\frac{f(u+rh) - f(u-sh)}{r+s}\\ &+ \frac{r}{s(r+s)}\alpha(-sh) + \frac{1}{r+s}\alpha(rh).\end{aligned}$$

Ha beírjuk $u - sh$ helyére az a értéket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{f(a+sh)-f(a)}{s} \le{} & \frac{f(a+(r+s)h)-f(a)}{r+s} \\ & + \frac{r}{s(r+s)}\alpha(-sh) + \frac{1}{r+s}\alpha(rh)\end{aligned}$$

minden $a \in D,\ h \in X$ és $r, s \in \mathbb{F}_+$ esetén, amelyekre $a + (r+s)h \in D$. Végül az a helyére u, az $r + s$ helyére pedig q írásával megkapjuk, hogy

$$\frac{f(u+sh)-f(u)}{s} \le \frac{f(u+qh)-f(u)}{q} + \frac{q-s}{sq}\alpha(-sh) + \frac{1}{q}\alpha((q-s)h)$$

teljesül minden olyan $u \in D,\ h \in X$ és $q, s \in \mathbb{F}$ esetén, ahol $0 < s < q$ és $u + qh \in D$.

A (2.8) feltételből azt kapjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $r_\varepsilon \in \mathbb{F}_+$, hogy

$$\frac{\alpha(rh)}{r} < \frac{\varepsilon}{3}$$

minden $r \in]\,0, r_\varepsilon[\,\cap\,\mathbb{F}$ esetén, valamint az $A(u, h)$ definíciójából adódóan létezik egy olyan $q \in \mathbb{F}_+$, hogy $u + qh \in D$ és

$$\frac{f(u+qh)-f(u)+\alpha(qh)}{q} < A(u,h) + \frac{\varepsilon}{3},$$

továbbá van olyan $\delta > 0$, hogy $|t - q| < \delta\ \ (t \in \mathbb{F}_+)$ esetén

$$|\alpha(th) - \alpha(qh)| < \frac{\varepsilon q}{3}.$$

Ha egy $s \in \mathbb{F}_+$ számra teljesül, hogy $s < \min\{r_\varepsilon, q, \delta\}$, akkor, mivel α páros,

$$\begin{aligned}
A(u,h) - \frac{\varepsilon}{3} < A(u,h) - \frac{\alpha(sh)}{s} &\le \frac{f(u+sh)-f(u)}{s} \\
&\le \frac{f(u+qh)-f(u)}{q} + \frac{(q-s)}{qs}\alpha(-sh) + \frac{1}{q}\alpha((q-s)h) \\
&= \frac{f(u+qh)-f(u)+\alpha(qh)}{q} + \frac{1}{q}(\alpha((q-s)h) - \alpha(qh)) \\
&\qquad + \left(1 - \frac{s}{q}\right)\frac{\alpha(sh)}{s} \\
&< A(u,h) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = A(u,h) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Így azt kapjuk, hogy

$$A(u,h) = \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \frac{f(u+sh)-f(u)}{s}. \tag{2.9}$$

Felhasználva a (2.9) eredményt, megmutatható, hogy a $h \mapsto A(u,h)$ leképetés pozitív $\mathbb{F}$-homogén. Ehhez legyen $\lambda \in \mathbb{F}_+$. Ekkor minden $u \in D$, $h \in X$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
A(u,\lambda h) &= \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \frac{f(u+s\lambda h)-f(u)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \lambda \frac{f(u+\lambda sh)-f(u)}{\lambda s} \\
&= \lambda \lim_{r\to 0,\ r\in\mathbb{F}_+} \frac{f(u+rh)-f(u)}{r} = \lambda A(u,h).
\end{aligned}$$

Szintén belátható, hogy a $h \mapsto A(u,h)$ leképezés szubadditív is. Tetszőleges $u \in D$ és $h, k \in X$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
A(u,\ h+k) &= \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \frac{f(u+s(h+k))-f(u)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \frac{f(u+sh+sk)-f(u)}{s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \frac{f\left(\frac{1}{2}(u+2sh)+\frac{1}{2}(u+2sk)\right)-f(u)}{s}\\
&\le \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \Bigg(\frac{f(u+2sh)+f(u+2sk)}{2s}\\
&\qquad\qquad \frac{+\,\alpha\,(s(h-k))+\alpha\,(s(k-h))-2f(u)}{2s}\Bigg)\\
&= \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \frac{f(u+2sh)-f(u)+\alpha\,(s(h-k))}{2s}\\
&+ \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \frac{f(u+2sk)-f(u)+\alpha\,(s(k-h))}{2s}\\
&= A(u,h)+A(u,k).
\end{aligned}
$$

Ezzel beláttuk a tételt. □

2.2.2. PÉLDA. Jelöljön X egy valós normált teret, $p > 1$, $c > 0$ és $\alpha(x) = c\|x\|^p$ $(x \in X)$. Ha $D \subseteq X$ nyílt és konvex, akkor az α leképezés D^*-ra való leszűkítése teljesíti a 2.2.1. Tétel feltételeit $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ esetén, hiszen az α páros, folytonos és

$$\lim_{0<r\to 0} \frac{\alpha(rh)}{r} = \lim_{0<r\to 0} \frac{c\|rh\|^p}{r} = \lim_{0<r\to 0} c\, r^{p-1}\|h\|^p = 0.$$

Ekkor a hibatag a következő alakba írható:

$$
\begin{aligned}
E(t) &:= t\,\alpha\,((1-t)(x-y)) + (1-t)\,\alpha\,(t(y-x))\\
&= c\,t\,\|(1-t)(x-y)\|^p + c\,(1-t)\,\|t(y-x)\|^p\,,
\end{aligned}
$$

így azt kapjuk, hogy

$$c\,(\min\{t\,,\,1-t\})^p\,\|x-y\|^p \le E(t) \le 2\,c\,t(1-t)\|x-y\|^p.$$

2.2.3. MEGJEGYZÉS. Jelöljön X egy valós normált teret, továbbá $D \subseteq X$ legyen egy nemüres $\mathbb{F}$-konvex halmaz, $d = \operatorname{diam}(D^*)$, $\varphi : [0, d[\to \overline{\mathbb{R}}_+$ egy növekvő függvény és $f : D \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varphi\left(t(1-t)\|x-y\|\right)$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén. Ekkor f $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex az

$$\alpha(u) = \varphi(\|u\|) \qquad (u \in D^*)$$

leképezéssel, mivel

$$\begin{aligned}
\varphi\left(t(1-t)\|x-y\|\right) &= [t + (1-t)]\, \varphi\left(t(1-t)\|x-y\|\right) \\
&= t\varphi\left(t(1-t)\|x-y\|\right) + (1-t)\varphi\left(t(1-t)\|y-x\|\right) \\
&\leq t\varphi\left((1-t)\|x-y\|\right) + (1-t)\varphi\left(t\|y-x\|\right).
\end{aligned}$$

3. Szeparációs tételek

3.1. $\mathbb{F}$-konvex szeparátor létezése

Ebben a szakaszban, a következő szakasz előkészítéseként, igazoljuk Baron, Matkowski és Nikodem nevezetes szeparációs tételének ([BMN94]) egy absztraktabb változatát. Eredményünk az [NPW99] publikációban szereplő 1. Tétel egy speciális esete, de egyszerűbbnek tűnik közvetlenül igazolni, mint a hivatkozott tételt a kimondásához szükséges fogalmakkal együtt ismertetni, majd a tételben szereplő leképezések számunkra alkalmas speciális eseteit bemutatni. A bizonyítás során Andrzej Olbryś [Olb15, 3. Tétel] (hasonló, de az alábbival logikailag közvetlen kapcsolatban nem álló) tételének levezetésében található gondolatmenetet követjük.

3.1.1. Tétel. *Legyen X vektortér az $\mathbb{F}$ test felett, D az X egy $\mathbb{F}$-konvex, $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt részhalmaza, továbbá f és g a D halmazon értelmezett valós függvények. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) létezik egy $\mathbb{F}$-konvex $p : D \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $f \le p \le g$;

(ii) bármely $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $t_1, \dots, t_n \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén, ahol $t_1 + \dots + t_n = 1$ teljesül, igaz a következõ egyenlõtlenség:

$$(3.1) \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i).$$

BIZONYÍTÁS. Elsőként tegyük fel, hogy *(i)* teljesül. Ekkor a *(ii)*-beli feltételek mellett

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq p\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i p(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i)\,,$$

azaz (3.1) adódik.

Tegyük fel most azt, hogy *(ii)* teljesül és definiáljuk a $p : D \to \mathbb{R}$ leképezést a következőképpen:

$$p(x) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i) \ :\ n \in \mathbb{N},\ x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i,\ x_1, \dots, x_n \in D, \right.$$
$$\left. t_1, \dots, t_n \in [0,1] \cap \mathbb{F}, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

A (3.1) egyenlőtlenségből következik, hogy a definíció korrekt és minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq p(x)$.

Azt kell most megmutatnunk, hogy a $p : D \to \mathbb{R}$ függvény $\mathbb{F}$-konvex. Ehhez vegyük D tetszőleges x, y elemeit és egy $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$, továbbá egy $\varepsilon > 0$ számot. A p függvény definíciója alapján létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ és $r_1, \dots, r_n \in [0,1] \cap \mathbb{F}$, hogy $r_1 + \ldots + r_n = 1$ és

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i,$$

valamint $k \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots, y_k \in D$, $s_1, \dots, s_k \in [0,1] \cap \mathbb{F}$, hogy $s_1 + \ldots + s_k = 1$ és

$$y = \sum_{i=1}^{k} s_i y_i$$

úgy, hogy

$$p(x) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{n} r_i g(x_i)$$

és

$$p(y) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{k} s_i g(y_i).$$

Másrészt

$$tx + (1-t)y = t\sum_{i=1}^{n} r_i x_i + (1-t)\sum_{i=1}^{k} s_i y_i = \sum_{i=1}^{n} t r_i x_i + \sum_{i=1}^{k} (1-t) s_i y_i.$$

Itt a jobb oldal együtthatóinak összege 1, továbbá

$$\begin{aligned} tp(x) + (1-t)p(y) + \varepsilon &= t(p(x)+\varepsilon) + (1-t)(p(y)+\varepsilon) \\ &> t\sum_{i=1}^{n} r_i g(x_i) + (1-t)\sum_{i=1}^{k} s_i g(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} t r_i g(x_i) + \sum_{i=1}^{k} (1-t) s_i g(y_i) \\ &\geq p(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$

Ha a kapott egyenlőtlenségben ε tart 0-hoz, akkor ezzel beláttuk, hogy a p leképezés $\mathbb{F}$-konvex. □

3.2. $\mathbb{F}$-konvex szeparátor és stabilitás kontrollfüggvény-sorozattal

A közelítő konvexitás és az erős konvexitás fogalmainak és az azokra vonatkozó alaperedmények közös általánosításaként 2016-ban a Conference on Inequalities and Applications 2016 elnevezésű konferencián Mirosław Adamek bevezette a kontrollfüggvényre nézve konvex függvények fogalmát. Ha I egy intervallum, és $G : [0,1] \times I \times I \to \mathbb{R}$, az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt a G kontrollfüggvényre nézve konvexnek nevezzük, ha megoldása az

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + G(t,x,y) \tag{3.2}$$

függvényegyenlőtlenségnek. Abban az esetben, amikor a G kontrollfüggvényhez létezik $\varphi : I \to \mathbb{R}$ megoldása a

$$\varphi(tx + (1-t)y) = t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) + G(t,x,y) \tag{3.3}$$

függvényegyenletnek, Adamek igazolta a konvex szeparátor létezésére vonatkozó Baron-Matkowski-Nikodem-tétel [BMN94] megfelelőségét a G kontrollfüggvényre nézve konvex szeparátor létezéséről:

3.2.1. Tétel. [M. Adamek] *Legyen $G : [0,1]\times I\times I \to \mathbb{R}$ adott és tegyük fel, hogy létezik $\varphi : I \to \mathbb{R}$ megoldása a* (3.3) *egyenletnek. Ekkor az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvények pontosan akkor teljesítik az*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) + G(t,x,y)$$

egyenlőtlenséget minden $t \in [0,1]$ és $x, y \in I$ esetén, ha létezik olyan, a G kontrollfüggvényre nézve konvex $h : I \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ teljesül minden $x \in I$ esetén.

Az alábbiakban ezt a tételt általánosítjuk az előző szakasz eredményeinek felhasználásával. Az előző szakaszban megmutattuk, hogy a résztest feletti konvexitás esetén a szeparációs tétel végtelen dimenziós változata jelenik meg, ezért ez a megközelítés kontrollfüggvény-sorozattal írható le.

A továbbiakban legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$T_n = \left\{ (t_1, \ldots, t_n) \in ([0,1] \cap \mathbb{F})^n \ : \ \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\}$$

és

$$G_n \ : \ T_n \times D^n \to \mathbb{R}.$$

3.2.2. Definíció. *Legyen X vektortér $\mathbb{F}$ felett, $D \subset X$ nemüres, $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\varphi : D \to \mathbb{R}$ függvény $\mathbb{F}$-affin a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve, ha megoldja a*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi(x_i) + G_n(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n) \tag{3.4}$$

egyenletet minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in D$ és $(t_1, \ldots, t_n) \in T_n$ esetén.

3.2.3. Definíció. *Legyen X vektortér $\mathbb{F}$ felett, $D \subset X$ nemüres, $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\varphi : D \to \mathbb{R}$ függvény $\mathbb{F}$-konvex a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve, ha megoldja az*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) + G_n(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n) \tag{3.5}$$

egyenlőtlenséget minden minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in D$ és $(t_1, \ldots, t_n) \in T_n$ esetén.

Definiáljuk a következő halmazt:

$$\mathcal{F} := \{\varphi : D \to \mathbb{R} \ : \ \varphi \ \mathbb{F}\text{-affin a } (G_n) \text{ kontrollfüggvény-sorozatra nézve}\}$$

A következőkben azokat az f és g valós értékű, a D halmazon értelmezett függvényeket vizsgáljuk, melyek teljesítik az

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i) + G_n(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n) \tag{3.6}$$

függvényegyenlőtlenséget minden minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in D$ és $(t_1, \ldots, t_n) \in T_n$ esetén.

3.2.4. Megjegyzés. Ha a (3.6) egyenlőtlenségből kivonjuk a (3.4) egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy

$$(f - \varphi)\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i (g - \varphi)(x_i),$$

ami a $g = f$ esetben azt jelenti, hogy az $f - \varphi$ függvény $\mathbb{F}$-konvex.

3.2.5. Állítás. *Ha a $p : D \to \mathbb{R}$ leképezés $\mathbb{F}$-konvex és $\varphi \in \mathcal{F}$, akkor a $h = p + \varphi$ függvény $\mathbb{F}$-konvex a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve.*

3.2.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Ekkor $f, g : D \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor teljesíti a (3.6) egyenlőtlenséget minden minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in D$ és $(t_1, \ldots, t_n) \in T_n$ esetén, ha létezik egy $h : D \to \mathbb{R}$ valós értékű $\mathbb{F}$-konvex függvény a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve úgy, hogy az*

$$f \leq h \leq g$$

teljesül a D halmazon.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik olyan $h : D \to \mathbb{R}$ valós értékű $\mathbb{F}$-konvex függvény a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve úgy, hogy $f \leq h \leq g$ fennáll a D halmazon. Ekkor

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le h\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} t_i h(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n)$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n).$$

Tegyük most fel, hogy az f és g függvények teljesítik a (3.6) egyenlőtlenséget, valamint $\varphi \in \mathcal{F}$, vagyis (3.4) is teljesül. A kettőt egymásból kivonva az

$$(f - \varphi)\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} t_i (g - \varphi)(x_i),$$

egyenlőtlenséghez jutunk, melyből 3.1.1. Tétel alapján következik, hogy létezik olyan h^* $\mathbb{F}$-konvex függvény, amire

$$(f - \varphi)(x) \le h^*(x) \le (g - \varphi)(x) \quad (x \in D).$$

Így a $h = h^* + \varphi$ választással h a g és f függvények közé eső $\mathbb{F}$-konvex függvény a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve. □

3.2.7. Megjegyzés. Világos, hogy ha $\varphi : D \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és

$$G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) - \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi(x_i)$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ és $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ esetén, melyből következően $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Adott $G_n : T_n \times D^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat esetén azonban nem látszik egyszerűnek a kérdés, hogy teljesül-e az $\mathcal{F}$ halmaz nemüressége.

3.2.8. Példa. Amennyiben a $\varphi(x) = \exp(x)$, a következő egyszerű számítással megmutatható, hogy az x_0-lal történő eltolás a kontrollfüggvény-sorozat elemeinek értékét úgy módosítja, hogy $\exp(x_0)$ szorzótényezőt kapnak:

$$\begin{aligned}
G_n(t_1,\dots,t_n,x_1+x_0,\dots,x_n+x_0) &= \exp\left(\sum_{i=1}^n t_i(x_i+x_0)\right) - \sum_{i=1}^n t_i\exp(x_i+x_0)\\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i + x_0\right) - \exp(x_0)\sum_{i=1}^n t_i\exp(x_i)\\
&= \exp(x_0)\,\exp\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right) - \exp(x_0)\sum_{i=1}^n t_i\exp(x_i)\\
&= \exp(x_0)\,G_n(t_1,\dots,t_n,x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

3.2.9. PÉLDA. A $\varphi(x)=\log(x)$ $(x>0)$ esetén azt kapjuk, hogy az $x_1,\dots,x_n$ pontok tetszőleges $y>0$ számmal való szorzása a kontrollfüggvény-sorozat elemeit nem változtatja meg:

$$\begin{aligned}
G_n(t_1,\dots,t_n,x_1y,\dots,x_ny) &= \log\left(\sum_{i=1}^n t_ix_iy\right) - \sum_{i=1}^n t_i\log(x_iy)\\
&= \log\left(y\sum_{i=1}^n t_ix_i\right) - \sum_{i=1}^n t_i(\log(x_i)+\log(y))\\
&= \log(y) + \log\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right) - \sum_{i=1}^n t_i\log(x_i) - \log(y)\\
&= G_n(t_1,\dots,t_n,x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

3.2.10. KÖVETKEZMÉNY. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}\neq\emptyset$ és $f:D\to\mathbb{R}$ közelítőleg $\mathbb{F}$-konvex a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve, azaz*

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right) \le \sum_{i=1}^n t_if(x_i) + G_n(t_1,\dots,t_n,x_1,\dots,x_n) + \varepsilon \tag{3.7}$$

minden $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in D$ *és* $(t_1, \ldots, t_n) \in T_n$ *és rögzített* $\varepsilon > 0$ *esetén. Ekkor létezik olyan h, a D halmazon értelmezett valós értékű* $\mathbb{F}$*-konvex függvény a* (G_n) *kontrollfüggvény-sorozatra nézve, hogy*

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x \in D).$$

Bizonyítás. Első lépésként írjuk át a (3.7) egyenlőtlenséget olyan alakba, ahol mindkét oldalból kivonjuk az $\frac{\varepsilon}{2}$ számot. Ekkor

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) + G_n(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n) + \frac{\varepsilon}{2},$$

melyet tovább alakítva

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{n} t_i \left(f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + G_n(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n).$$

Továbbá a (3.6) egyenlőtlenségben az f függvényt az $f - \frac{\varepsilon}{2}$, a g függvényt pedig az $f + \frac{\varepsilon}{2}$ leképezéssel helyettesítve és végül a 3.2.6. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy létezik olyan h függvény, ami $\mathbb{F}$-konvex a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve, valamint

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq h(x) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x \in D).$$

Innen következik az állítás. □

4. A Rolewicz-tétel variációi közelítőleg Jensen-konvex függvényekre

4.1. Közelítő konvexitás egy résztestre vonatkozóan

Ebben a fejezetben Rolewicz tételéhez [Rol79, 4. Lemma] (lásd az 1.2. szakaszban) hasonlóan olyan – bizonyos értelemben közelítőleg konvex függvényekre vonatkozó – függvényegyenlőtlenségeket vizsgálunk, amelyekben a hibatag végül elhagyhatónak bizonyul. Az ilyen jellegű eredményeket a szakirodalomban hiperstabilitásnak nevezzük.

A [BP06] publikációban Boros Zoltán és Páles Zsolt által definiált, és a 2. fejezet első szakaszában ismertetett $\mathbb{F}$-algebrailag nyíltság és $\mathbb{F}$-konvexitás fogalmát ebben a fejezetben is használni fogjuk. Elsőként azonban definiálnunk kell, hogy mit értünk az X tér elemeinek $\mathbb{F}$-normáján:

4.1.1. Definíció. *Legyen $\mathbb{F}$ az $\mathbb{R}$ egy részteste és X egy vektortér $\mathbb{F}$ felett. Az $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ leképezést $\mathbb{F}$-normának nevezzük, ha teljesülnek rá a következő feltételek:*

(i) bármely $0 \neq x \in X$ esetén $\|x\| > 0$, valamint $\|0\| = 0$;

(ii) bármely $c \in \mathbb{F}$ és $x \in X$ mellett teljesül, hogy $\|cx\| = |c|\,\|x\|$;

(iii) bármely $x, y \in X$ elemekre $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

A fejezet során legyen D az X tér egy $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex részhalmaza, $c \ge 0$ és $p > 1$. Abból a célból, hogy újrafogalmazzuk az (1.10) egyenlőtlenségben megjelenő $f : D \to \mathbb{R}$ függvényre vonatkozó feltételeket (minden $x, y \in D$ és $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$ esetén), speciális differenciákat és differencia hányadosokat vezetünk be. Az első észrevételünk, hogy az (1.10) egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, ha $t = 0$, $t = 1$ vagy $x = y$, ezért elegendő az (1.10) egyenlőtlenséget abban az esetben tekinteni, amikor $x, y \in D$ és $t \in]\,0, 1[\,\cap \mathbb{F}$ úgy, hogy $x \ne y$.

A könnyebb számolás érdekében írjunk az (1.10) egyenlőtlenségben x helyére z-t:

$$f(tz + (1 - t)y) \le tf(z) + (1 - t)f(y) + c\big(t(1 - t)\,\|z - y\|\,\big)^p$$

Nyilván ha $y, z \in D$, $y \ne z$ és $t \in]0, 1[\,\cap \mathbb{F}$, valamint bevezetjük az $x = tz + (1 - t)y$, $u = y - z$, $s = t$ és $q = 1 - t$ helyettesítéseket, akkor $s, q \in \mathbb{F}_+$, $u \in X$, $z = x - qu$ és $y = x + su$, azaz

$$f(x) \le sf(x - qu) + qf(x + su) + c\big(qs\,\|u\|\,\big)^p.$$

Itt a $q + s$ értékkel vagy annak p-edik hatványával a megfelelő helyeken osztva a fejezetben vizsgált egyenlőtlenséghez jutunk:

$$f(x) \le \frac{s}{q + s} f(x - qu) + \frac{q}{q + s} f(x + su) + c\left[\frac{qs}{q + s}\right]^p \|u\|^p. \tag{4.1}$$

Mivel $q + s = 1$, ezért ez az átalakítás valójában érdemi változást nem okoz.

Megfordítva, ha a (4.1) egyenlőtlenségben $x \in D$, $u \in X$ és $q, s \in \mathbb{F}_+$ úgy, hogy $z = x - qu \in X$ és $y = x + su \in X$, akkor a $t = \frac{s}{q+s} \in]\,0, 1[\,\cap \mathbb{F}$

és $x = tz + (1 - t)y$, továbbá ezen helyettesítésekkel visszakapjuk az (1.10) egyenlőtlenséget. Így a következő állítás fogalmazható meg:

4.1.2. ÁLLÍTÁS. *Legyen $D \subset X$ egy $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex halmaz, $c \geq 0$, $p > 1$. Egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor oldja meg az* (1.10) *egyenlőtlenséget minden $x, y \in D$ és $t \in [0, 1] \cap \mathbb{F}$ esetén, ha f teljesíti a* (4.1) *egyenlőtlenséget minden olyan $x \in D$, $s, q \in \mathbb{F}_+$ és $u \in X$ esetén, amelyekre $x - qu$, $x + su \in D$.*

Feltesszük, hogy D, c, p és f teljesíti az előző állítás feltételeit. Ekkor a következő lemmák fogalmazhatók meg:

4.1.3. LEMMA. *Tegyük fel, hogy $x \in D$, $s, q \in \mathbb{F}_+$ és $u \in X$ olyanok, hogy $x - qu$, $x + su \in D$. Ekkor a következő két egyenlőtlenség ekvivalens a* (4.1) *egyenlőtlenséggel:*

$$\frac{f(x) - f(x - qu)}{q} \leq \frac{f(x + su) - f(x)}{s} + c\left[\frac{qs}{q + s}\right]^{p-1} \|u\|^p, \tag{4.2}$$

$$\frac{f(x) - f(x - qu)}{q} \leq \frac{f(x + su) - f(x - qu)}{q + s} + c\left[\frac{s}{q + s}\right]^{p} q^{p-1}\|u\|^p. \tag{4.3}$$

BIZONYÍTÁS. A (4.1) egyenlőtlenséget szorozzuk meg a $q + s$ összeggel. Így a következő alakhoz jutunk:

$$(q + s)f(x) \leq sf(x - qu) + qf(x + su) + c\frac{(qs)^p}{(q + s)^{p-1}}\|u\|^p. \tag{4.4}$$

Ha itt a tagokat úgy csoportosítjuk, hogy

$$s(f(x) - f(x - qu)) \leq q(f(x + su) - f(x)) + c\frac{(qs)^p}{(q + s)^{p-1}}\|u\|^p,$$

majd osztunk s-sel és q-val, akkor a (4.2) egyenlőtlenség adódik. Ha pedig a (4.4) egyenlőtlenséget a

$$(q+s)(f(x)-f(x-qu)) \le q(f(x+su)-f(x-qu)) + c\frac{(qs)^p}{(q+s)^{p-1}}\|u\|^p$$

alakba írjuk és a $q(q+s)$-sel osztunk, akkor a (4.3) egyenlőtlenséget kapjuk vissza. □

Ha a (4.3) egyenlőtlenségben $x-qu$ helyére a kerül, az

$$\frac{f(a+qu)-f(a)}{q} \le \frac{f(a+(q+s)u)-f(a)}{q+s} + c\left[\frac{s}{q+s}\right]^p q^{p-1}\|u\|^p \tag{4.5}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Így megfogalmazhatjuk a következő lemmát:

4.1.4. Lemma. *A* (4.1) *egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn minden $x \in D$, $s,q \in \mathbb{F}_+$ és $u \in X$ esetén $x-qu, x+su \in D$ mellett, akkor és csak akkor, ha a* (4.5) *egyenlőtlenség teljesül minden olyan $a \in D$, $q,s \in \mathbb{F}_+$, $u \in X$ esetén, amelyekre $a+(q+s)u \in D$.*

A fenti lemmák segítségével belátható a következő tétel:

4.1.5. Tétel. *Legyen $D \subset X$ egy $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt $\mathbb{F}$-konvex halmaz, $c \ge 0$, $p > 1$ és $f : D \to \mathbb{R}$ olyan leképezés, hogy f megoldása az* (1.10) *egyenlőtlenségnek minden $x,y \in D$ és $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén. Ekkor f teljesíti az* (1.10) *egyenlőtlenséget $c = 0$ esetén is, azaz az f függvény $\mathbb{F}$-konvex.*

Bizonyítás. Legyen $x \in D$ és $u \in X$. Definiáljuk az $S_{\mathbb{F}}f(x,u)$ halmazt a következőképpen

$$S_{\mathbb{F}}f(x,u) := \left\{\frac{f(x+su)-f(x)}{s} \;:\; s \in \mathbb{F}_+ \text{ úgy, hogy } x+su \in D\right\}.$$

Megmutatjuk, hogy az $S_{\mathbb{F}}f(x,u)$ halmaz alulról korlátos. Legyen $s, q \in \mathbb{F}_+$ olyan, hogy $x + su$, $x - qu \in D$. A (4.2) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\frac{f(x+su)-f(x)}{s} \geq \frac{f(x)-f(x-qu)}{q} - c\left[\frac{qs}{q+s}\right]^{p-1}\|u\|^p$$
$$\geq \frac{f(x)-f(x-qu)}{q} - cq^{p-1}\|u\|^p,$$

ami mutatja, hogy $S_{\mathbb{F}}f(x,u)$ valóban alulról korlátos. Jelölje a bizonyítás további részében $d_{\mathbb{F}}f(x,u)$ az $S_{\mathbb{F}}f(x,u)$ halmaz infimumát, vagyis $d_{\mathbb{F}}f(x,u) := \inf S_{\mathbb{F}}f(x,u) \in \mathbb{R}$ és legyen $\varepsilon > 0$. Mivel

$$\lim_{d\to 0+} c\|u\|^p d^{p-1} = 0,$$

létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$c\|u\|^p\delta^{p-1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Továbbá van olyan $r \in \mathbb{F}_+$, hogy $x + ru \in D$ és

$$\frac{f(x+ru)-f(x)}{r} < d_{\mathbb{F}}f(x,u) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen most $\overline{\delta} := \min\{\delta, r\} > 0$. Ha $t \in \mathbb{F}$-re $0 < t < \overline{\delta}$, akkor $0 < t < r$ és a (4.5) egyenlőtlenségben q helyére t, s helyére $r - t$ írásával, valamint az a helyére x-et helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x+tu)-f(x)}{t} \leq \frac{f(x+ru)-f(x)}{r} + c\left[\frac{r-t}{r}\right]^p t^{p-1}\|u\|^p$$
$$\leq \frac{f(x+ru)-f(x)}{r} + c\|u\|^p t^{p-1}$$
$$< d_{\mathbb{F}}f(x,u) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d_{\mathbb{F}}f(x,u) + \varepsilon.$$

Így

$$d_{\mathbb{F}}f(x,u) = \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \frac{f(x+su)-f(x)}{s}.$$

A (4.2) egyenlőtlenségben az $x + su$, $x - qu \in D$ feltételeket teljesítő $q, s \in \mathbb{F}_+$ számok esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -\frac{f(x+q(-u))-f(x)}{q} &= \frac{f(x)-f(x-qu)}{q} \\ &\leq \frac{f(x+su)-f(x)}{s} + c\left[\frac{qs}{q+s}\right]^{p-1}\|u\|^p, \end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$-\lim_{q\to 0,\ q\in\mathbb{F}_+}\frac{f(x+q(-u))-f(x)}{q} \leq \frac{f(x+su)-f(x)}{s} + cs^{p-1}\|u\|^p,$$

ami azt adja, hogy

$$-d_{\mathbb{F}}f(x,-u) \leq \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+}\left[\frac{f(x+su)-f(x)}{s} + cs^{p-1}\|u\|^p\right]$$

és így

$$-d_{\mathbb{F}}f(x,-u) \leq d_{\mathbb{F}}f(x,u). \tag{4.6}$$

A (4.6) egyenlőtlenségből minden $q, s \in \mathbb{F}_+$, $u \in X$ és $x \in D$ esetén, ahol $x - qu, x + su \in D$, adódik a következő:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(x-qu)}{q} &= -\frac{f(x+q(-u))-f(x)}{q} \\ &\leq -d_K f(x,-u) \leq d_K f(x,u) \\ &\leq \frac{f(x+su)-f(x)}{s}. \end{aligned}$$

Így beláttuk, hogy f megoldása a (4.1) egyenlőtlenségnek $c = 0$ mellett is (azaz hibatag nélkül). A 4.1.2. Állításból pedig szintén $c = 0$ esetén kapjuk, hogy f az (1.10) egyenlőtlenségnek is megoldása $c = 0$ esetén, ahogyan az a tételben szerepelt. □

4.1.6. Megjegyzés. Jensen [Jen06] megmutatta (lásd még: [Kuc09]), hogy minden Jensen-konvex függvény $\mathbb{Q}$-konvex. Így abban az esetben, amikor $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, az utolsó tételünk azt mondja ki, hogy egy f függvény abban az értelemben közelítőleg Jensen-konvex, hogy teljesíti az (1.10) egyenlőtlenséget a 0 és 1 közötti t racionális számokra, akkor az f függvény valójában Jensen-konvex.

4.2. Rolewicz-tétel közelítő Jensen-konvexitásra

A szakaszban szereplő tétel bizonyításához definiálnunk kell a Δ_h^2 differencia operátort a következő rekurzióval. Ha I egy nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$, legyen

$$\begin{aligned}
\Delta_h^1 f(x) &= f(x+h) - f(x) \qquad (x \in I,\ h \in \mathbb{R}\ :\ x+h \in I),\\
\Delta_h^2 f(x) &= \Delta_h^1 \Delta_h^1 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\\
&\qquad\qquad (x \in I,\ h \in \mathbb{R}\ :\ x+2h \in I),
\end{aligned}$$

valamint az $f : I \to \mathbb{R}$ másodrendű alsó Dinghas intervallum deriváltját egy $\xi \in I$ pontban, mint

$$\underline{D}^2 f(\xi) := \liminf_{\substack{(x,h)\to(\xi,0)\\ x\le\xi\le x+2h}} \frac{\Delta_h^2 f(x)}{h^2}.$$

A következő állítás Gilányi és Páles [GP01] 1. Következményének egy speciális esete (lásd még [BN15] 2. Állítást megelőző bekezdés):

4.2.1. Állítás. *Egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény Jensen-konvex akkor és csak akkor, ha $\underline{D}^2 f(\xi) \ge 0$ bármely $\xi \in I$ esetén.*

A következő eredmény megmutatja, hogy a közelítő Jensen-konvexitásból következik a Jensen-konvexitás, ha a hibafüggvény kellően kicsi a nulla egy környezetében.

4.2.2. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, d_I az I intervallum hossza és $J_I = [0, d_I[$. Legyen $\psi : J_I \to [0, +\infty[$ olyan, hogy*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\psi(t)}{t^2} = 0.$$

Ha egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldja az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} + \psi(|x-y|)$$

egyenlőtlenséget bármely $x, y \in I$ esetén, akkor f Jensen-konvex.

Bizonyítás. Vegyük az $x \in I$ elemet és egy h pozitív valós számot úgy, hogy $y = x + 2h \in I$. Ekkor $\frac{x+y}{2} = x + h$, $|x - y| = 2h$, és azt kapjuk, hogy

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \ge -2\psi(2h). \tag{4.7}$$

Ennek mindkét oldalát elosztva h^2-tel, a (4.7) egyenlőtlenséget átírhatjuk a

$$\frac{\Delta_h^2 f(x)}{h^2} \ge -2\frac{\psi(2h)}{h^2}. \tag{4.8}$$

alakba. Most legyen $\xi \in I$ tetszőleges és vegyük a (4.8) egyenlőtlenség mindkét oldalának limes inferiorját úgy, hogy h tart 0-hoz és x tart ξ-hez úgy, hogy $x \le \xi \le x + 2h$. Azt kapjuk, hogy

$$\underline{D}^2 f(\xi) \ge 0.$$

Így a 4.2.1. Állításból következik, hogy az f függvény Jensen-konvex. □

Az előző tételhez hasonló eredményt bizonyított Makó és Páles is az [MP11] publikáció 5. Tételében és annak következményében. Az ő tételük valójában általánosabbnak tűnik, azonban a bizonyítása is sokkal összetettebb. A tételünk rövid bizonyítása könnyen általánosítható a a magasabb rendű Jensen-konvexitás esetére, ahogyan az a disszertáció következő fejezetében, valamint a [BN15] 3. részében látható.

5. Magasabb rendben közelítőleg konvex függvények

5.1. Eszközök és tételek valós változós függvényekre

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $n \in \mathbb{N}$ és $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ az I páronként különböző pontjai. Jelölje $[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f]$ az f függvény osztott differenciáját az $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ pontokban, melyet a

$$[x_0\,;\, f] = f(x_0)\,,$$
$$[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f] - [x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f]}{x_{n+1} - x_0}$$

rekurzióval definiálhatunk, ahol $n \in \mathbb{N}$. Hopf [Hop26] és Popoviciu [Pop45] definíciója szerint egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény n-edrendben konvex, ha

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\,;\, f] \geq 0$$

teljesül minden $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ I-beli pont esetén. Jól ismert (és könnyen belátható), hogy az elsőrendű konvexitás a hagyományos értelemben vett konvexitással egyezik meg. Számos eredményt fogalmaztak meg az n-edrendben konvex függvényekre vonatkozóan. Többek között a [GP08, Kuc09, PW05, Pop45, RV73, Was06, Was07] publikációkban.

Bevezetve az $x_0 = x$, $x_2 = y$ és $x_1 = tx + (1-t)y$ jelöléseket, könnyen megkapható, hogy

$$t = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} \qquad \text{és} \qquad 1 - t = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0},$$

továbbá az (1.7) egyenlőtlenség átírható a következő alakba:

$$0 \le [x_0, x_1, x_2\,;\, f] + C\frac{\alpha(\,|x_2 - x_0|\,)}{(x_2 - x_0)^2}\,.$$

A fő eredményünk bizonyításához be kell vezetnünk a Δ_h^n jelölést is, mivel használni fogjuk a differencia operátorok fogalmát. Ezt a következő rekurzióval definiáljuk:

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x) \qquad (x \in I,\ h \in \mathbb{R}\ :\ x + h \in I),$$

$$\Delta_h^{n+1} f(x) = \Delta_h^1 \Delta_h^n f(x) \qquad (x \in I,\ h \in \mathbb{R}\ :\ x + (n+1)h \in I),$$

A magasabb rendű Jensen-konvexitás fogalma T. Popoviciuhoz ([Pop34, Pop45]) köthető: Egy $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt n-edrendben Jensen-konvexnek hívunk (ahol $n \in \mathbb{N}$), ha

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \ge 0$$

minden $x \in I,\ h \ge 0$ esetén úgy, hogy $x + (n+1)\,h \in I$. A fenti egyenlőtlenséget teljesítő függvények tulajdonságait lásd például [BW40, Bul71, Pop45], [Kuc09, XV. Fejezet], [RV73, VIII.83], és azok irodalomjegyzékében. Az n-edrendű Jensen-konvexitást magasabb dimenzióba történő általánosításait R. Ger [Ger72, Ger74] vizsgálta.

Az világos, hogy a differenciák kifejezhetők az osztott differencia tagjaival, így az n-edrendben konvex függvények n-edrendben Jensen-konvexek is. Popoviciu [Pop34] azt az eredményt kapta, hogy az állítás folytonos függvények esetén megfordítható. Ciesielski [Cie59, 1. Tétel] bizonyította, hogy az n-edrendben Jensen-konvex függvények folytonossága (egy nyílt intervallumon) következik azok bármely pozitív mértékű halmazon való korlátosságából. Ezt a két eredményt összekombinálva kimondható a következő állítás:

5.1.1. Állítás. *Legyen I egy nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény n-edrendben Jensen-konvex. Ha f korlátos az $E \subset I$ pozitív mértékű halmazon, akkor az f leképezés n-edrendben konvex.*

A magasabb rendű konvexitás egy lokális jellemzését Gilányi és Páles végezte el egy valamivel általánosabb környezetben [GP01]. Legyen $t_1, \ldots, t_{n+1}$ rögzített pozitív valós számok esetén $T = (t_1, \ldots, t_{n+1})$. Legyen

$$\Delta_h^T f(x) := \Delta_{t_1 h} \ldots \Delta_{t_{n+1} h} f(x)$$

olyan, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$ és $h > 0$ esetén $x + (t_1 + \cdots + t_{n+1})\, h \in I$. Azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény T-konvex, ha $\Delta_h^T f(x) \geq 0$ minden $x \in I$ és $h > 0$ esetén úgy, hogy $x + (t_1 + \cdots + t_{n+1})\, h \in I$. Világos, hogy a T-konvexitás és cT-konvexitás minden $c > 0$ számra ekvivalens. Abban az esetben, ha $t_1 = \cdots = t_{n+1} = 1$, a T-konvexitás fogalma megegyezik az n-edrendű Jensen-konvexitás definíciójával.

Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény alsó T-Dinghas intervallum deriváltját egy $\xi \in I$ pontban a következő képlettel definiáljuk:

$$\underline{D}^T f(\xi) := \liminf_{\substack{(x,h)\to(\xi,0)\\ x\le\xi\le x+(t_1+\cdots+t_{n+1})h}} \frac{\Delta_h^T f(x)}{(t_1 h)\ldots(t_{n+1}h)}.$$

Ennek speciális eseteként kapjuk a magasabb rendű alsó Dinghas intervallum derivált definícióját:

$$\underline{D}^{n+1} f(\xi) := \liminf_{\substack{(x,h)\to(\xi,0)\\ x\le\xi\le x+(n+1)h}} \frac{\Delta_h^{n+1} f(x)}{h^{n+1}}.$$

Gilányi és Páles [GP01, 1. Következmény] szoros kapcsolatot bizonyítottak a fenti két fogalom között. Nevezetesen megmutatták, hogy egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor T-konvex, ha minden $\xi \in I$ pont esetén $\underline{D}^T f(\xi) \ge 0$. Abban a speciális esetben, amikor $t_1 = \cdots = t_{n+1} = 1$, a következő állítást kapjuk:

5.1.2. Állítás. *Egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor n-edrendben Jensen-konvex, ha $\underline{D}^{n+1} f(\xi) \ge 0$ minden $\xi \in I$-re.*

Az állítás felhasználásával könnyen igazolható a következő Rolewicz-típusú tétel:

5.1.3. Tétel. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $I_n^* = \left\{\frac{x-y}{n+1} : x, y \in I,\ y < x\right\}$ és $\psi : I_n^* \to \mathbb{R}$ úgy, hogy $\lim_{h\to 0+} \frac{\psi(h)}{h^{n+1}} = 0$, továbbá tetszőleges $x \in I$ és $h > 0$ olyanok, hogy $x + (n+1)h \in I$ esetén teljesül a*

$$\Delta_h^{n+1} f(x) + \psi(h) \ge 0$$

egyenlőtlenség, akkor az f függvény n-edrendben Jensen-konvex.

Bizonyítás. Legyen $\xi \in I$ tetszőleges. Ekkor

$$\underline{D}^{n+1} f(\xi) = \liminf_{\substack{(x\,,\,h)\to(\xi\,,\,0)\\ x\le\xi\le x+(n+1)h}} \frac{\Delta_h^{n+1} f(x)}{h^{n+1}} = \liminf_{\substack{(x\,,\,h)\to(\xi\,,\,0)\\ x\le\xi\le x+(n+1)h}} \frac{\Delta_h^{n+1} f(x) + \psi(h)}{h^{n+1}} \ge 0.$$

Így az 5.1.2. Állításból következik, hogy f n-edrendben Jensen-konvex. □

A szakasz hátralévő részében a következő tételt bizonyítjuk a fenti eredmények felhasználásával.

5.1.4. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, jelölje $\nu(I)$ az I intervallum hosszát, továbbá legyen $n \in \mathbb{N}$ és $J_I =]0, \nu(I)[$, valamint legyen a $\varphi : J_I \to [0, +\infty[$ olyan függvény, amely teljesíti a*

$$\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0$$

feltételt. Ha egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény minden olyan $x_j \in I$ $(j = 0, 1, \ldots, n, n+1)$ pontok esetén, amelyekre teljesül az $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ feltétel, megoldja az

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f] + \varphi(x_{n+1} - x_0) \ge 0 \tag{5.1}$$

egyenlőtlenséget, akkor f n-edrendben konvex.

Bizonyítás. Tekintsünk egy $x \in I$ pontot és egy h pozitív valós számot úgy, hogy $x + (n+1)\,h \in I$ $(n \in \mathbb{N})$. Az (5.1) feltételt az

$$x_i = x + i \cdot h \qquad (i = 0, 1, \ldots, n, n+1),$$

pontokra felírva kapjuk, hogy

$$[x, x+h, \ldots, x+(n+1)\,h\,;\, f] + \varphi\left((n+1)\,h\right) \ge 0\,. \tag{5.2}$$

Egy jól ismert azonosság [Kuc09, 15.2.5. Lemma] alapján a fenti egyenlőtlenség első tagja teljesíti a

$$[x, x+h, \dots, x+(n+1)\,h\,;\, f] = \frac{\Delta_h^{n+1} f(x)}{(n+1)!\, h^{n+1}}$$

egyenletet. Az első tagot ebbe az alakba átírva a (5.2) egyenlőtlenség felírható

$$\frac{\Delta_h^{n+1} f(x)}{h^{n+1}} \geq -(n+1)!\varphi\left((n+1)\,h\right) \tag{5.3}$$

formában. Most legyen $\xi \in I$ tetszőleges és vegyük az (5.3) egyenlőtlenség mindkét oldalának limes inferiorát úgy, hogy h a 0-hoz, x pedig a ξ értékhez tartson, amikor $x \leq \xi \leq x+(n+1)\,h$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\underline{D}^{n+1} f(\xi) \geq 0.$$

Az 5.1.2. Állításból ezáltal következik, hogy f n-edrendben Jensen-konvex.

Másrészt megmutatjuk, hogy f lokálisan korlátos. Ehhez legyen $\delta > 0$ olyan, hogy a $t \in \,]\,0, \delta\,[$ szám esetén $\varphi(t) < 1$, továbbá $y_0 \in I$ legyen tetszőlegesen rögzített és $r > 0$ olyan, hogy $2r < \delta$, valamint $I_0 := \,]\,y_0 - r\,,\, y_0 + r\,[\, \subset I$. Ekkor tetszőleges $x_j \in I_0$ $(j = 0, 1, \dots, n, n+1)$ esetén, ami teljesíti az $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ feltételt, az (5.1) egyenlőtlenségből

$$[x_0, \dots, x_{n+1}\,;\, f] \geq -\varphi\left(x_{n+1} - x_0\right) > -1\,.$$

adódik. A $g : I_0 \to \mathbb{R}$ leképezést $g(x) = f(x) + x^{n+1}$ alakban definiálva, és az osztott differencia linearitását felhasználva (lásd: [GN11, 2. Lemma]) kapjuk, hogy

$$[x_0, \dots, x_{n+1}\,;\, g] = [x_0, \dots, x_{n+1}\,;\, f] + \left[x_0, \dots, x_{n+1}\,;\, x^{n+1}\right].$$

Továbbá könnyen megmutatható (lásd: [GN11, 3. Lemma]), hogy $[x_0, \dots, x_n\,;\, x^n] = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ különböző pontok esetén, vagyis

$$[x_0, \ldots, x_{n+1}\,;\, g] \geq -1 + 1 = 0\,.$$

Így $g : I_0 \to \mathbb{R}$ n-edrendben konvex is.

Felhasználva a [Kuc09, 15.8.1. Tétel] állítását, azt mondhatjuk, hogy a g függvény folytonos ($n > 1$ esetén folytonosan differenciálható is), így g, és ebből adódóan f is korlátos az I_0 bármely zárt részintervallumán. Az 5.1.1. Állítás segítségével így pedig azt kapjuk, hogy f n-edrendben konvex. □

5.2. Magasabb rendben konvex függvények vektortereken

Ebben az alfejezetben jelölje $\mathbb{R}^m_+$ azon $x \in \mathbb{R}^m$ elemek halmazát, amelyeknek első nemzérus koordinátája pozitív:

$$\mathbb{R}^m_+ = \bigcup_{i=1}^{m} \Big\{ x = (x_1\,, \ldots\,, x_m) \in \mathbb{R}^m \,|\, x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0\,,\ x_i > 0 \Big\}\,.$$

Ekkor $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m_+ \cup (-\mathbb{R}^m_+) \cup \{0\}$. Az $x, y \in \mathbb{R}^m$ vektorokra azt mondjuk, hogy $x > y$, ha $x - y \in \mathbb{R}^m_+$ és $x < y$, ha $y > x$. Tehát bármely két $x, y \in \mathbb{R}^m$ vektorra $x = y$, vagy $x < y$ vagy $x > y$. Ha $x > y$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ pozitív, akkor $\alpha x > \alpha y$, és ha $\alpha < 0$, akkor $\alpha x < \alpha y$. Továbbá

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Legyen $D \subset \mathbb{R}^m$ egy konvex halmaz és $f : D \to \mathbb{R}$ egy függvény. Legyenek $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in D$ páronként különböző kollineáris pontok, valamint a h értéke legyen

$$h := \frac{\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_0)}{\|x_{n+1} - x_0\|} \; (x_{n+1} - x_0) .$$

Így $h > 0$. Mivel $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ kollineárisak, felírhatók a következő alakban:

$$x_i = x_0 + \lambda_i h , \qquad i = 0\,,\ 1\,,\ \ldots\,,\ n\,,\ n+1$$

(nyilvánvalóan $\lambda_0 = 0$). Az f függvény $[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f]$ osztott differenciája az $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ pontokban a következő rekurzióval definiált (lásd: [Nör24], [Pop34] vagy [Ger72]):

$$[x_0\,;\, f] = f(x_0)\,,$$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\,;\, f] - [x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, f]}{\lambda_{n+1} - \lambda_0}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ebből látszik, hogy az $[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\,;\, f]$ osztott differencia inkább a λ_i értékek különbségtől, semmint maguktól a λ_i értékektől függ ($i = 0, 1, \ldots, n+1$).

Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ és $D \subset \mathbb{R}^m$ egy nyílt konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvény n-edrendben konvex, ha f teljesíti az

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f] \geq 0$$

egyenlőtlenséget minden olyan $x_j \in D$ ($j = 0, 1, \ldots, n, n+1$) esetén, ahol $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ kollineáris pontok.

Ezen általánosítást felhasználva a következő tétel mondható ki:

5.2.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^m$ egy nyílt konvex halmaz, $\nu(D)$ jelölje a D halmaz átmérőjét, továbbá $J_D = \,]0, \nu(D)[$ és $n, m \in \mathbb{N}$. Legyen a $\varphi : J_D \to$*

$[0, +\infty[$ *függvény olyan, ami teljesíti a*

$$\lim_{t \to 0+} \varphi(t) = 0$$

feltételt. Ha egy $f : D \to \mathbb{R}$ *függvény megoldja az*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \,;\, f] + \varphi(\|x_{n+1} - x_0\|) \geq 0 \tag{5.4}$$

egyenlőtlenséget minden olyan $x_j \in D$ $(j = 0, 1, \ldots, n, n+1)$ *esetén, ahol* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ *kollineárisak, akkor* f *n-edrendben konvex.*

Bizonyítás. Legyenek $y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} \in D$ tetszőleges kollineáris pontok, amelyek között fennáll az $y_0 < y_1 < \cdots < y_n < y_{n+1}$ kapcsolat. Most tekintsük a

$$h = \frac{y_{n+1} - y_0}{\|y_{n+1} - y_0\|} \in \mathbb{R}^m$$

egységvektort és $\overline{\lambda}_0\,, \overline{\lambda}_1\,, \ldots, \overline{\lambda}_n\,, \overline{\lambda}_{n+1} \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy

$$y_i = y_0 + \overline{\lambda}_i \cdot h$$

teljesül minden $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ esetén. Mivel a $\Psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ leképezést a $\Psi(\lambda) = y_0 + \lambda \cdot h$ kifejezéssel definiáljuk (minden $\lambda \in \mathbb{R}$ mellett), ezért Ψ folytonos és megőrzi a konvex kombinációkat. Ebből adódóan létezik egy olyan I nyílt intervallum, hogy $\overline{\lambda}_i \in I$ $(i = 0, 1, \ldots, n, n+1)$ és $\Psi(\lambda) \in D$ minden $\lambda \in I$ esetén. A fentiekből következik, hogy $0 = \overline{\lambda}_0 < \overline{\lambda}_1 < \cdots < \overline{\lambda}_n < \overline{\lambda}_{n+1}$. Továbbá definiáljuk a $g : I \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$g(\lambda) = f(y_0 + \lambda h)\,.$$

Felhasználva a pontok számára vonatkozó indukciót, megmutathatjuk, hogy minden $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, ahol $\lambda_i \in I$ és $x_i = y_0 + \lambda_i h$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ esetén a

$$[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \,;\, g] = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \,;\, f] \tag{5.5}$$

egyenlőség teljesül. Nevezetesen $n = 0$ esetén (ez az az eset, amikor egyetlen pontunk van), azt kapjuk, hogy

$$[\lambda_0\,;\, g] = g(\lambda_0) = f(y_0 + \lambda_0 h) = f(x_0) = [x_0\,;\, f]\,.$$

Feltéve, hogy az (5.5) egyenlet teljesül minden $n + 1$ egymást követő pontra, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}\,;\, g]\\
&\qquad = \frac{[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}\,;\, g] - [\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n\,;\, g]}{\lambda_{n+1} - \lambda_0}\\
&\qquad = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f] - [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\,;\, f]}{\lambda_{n+1} - \lambda_0}\\
&\qquad = [x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f].
\end{aligned}$$

Most legyen $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1}$ olyan, hogy $\lambda_i \in I$ $(i = 0, 1, \ldots, n, n + 1)$, továbbá legyen $x_i = y_0 + \lambda_i h$ minden $i = 0, 1, \ldots, n, n + 1$ számra. Ekkor $x_j \in D$ $(j = 0, 1, \ldots, n, n + 1)$ úgy, hogy $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ kollineáris pontok. Így az (5.4) egyenlőtlenség fennáll. Vegyük észre, hogy

$$\|x_{n+1} - x_0\| = \|(\lambda_{n+1} - \lambda_0)h\| = (\lambda_{n+1} - \lambda_0) \cdot \|h\| = \lambda_{n+1} - \lambda_0$$

és az (5.5) egyenlőtlenség segítségével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & [x_0\,,\, x_1\,,\, \ldots\,,\, x_n\,,\, x_{n+1}\,;\, f] + \varphi(\|x_{n+1} - x_0\|)\\
=\ & [\lambda_0\,,\, \lambda_1\,,\, \ldots\,,\, \lambda_n\,,\, \lambda_{n+1}\,;\, g] + \varphi(\lambda_{n+1} - \lambda_0)\,.
\end{aligned}$$

Így felhasználva az 5.1.4. Tételt, látható, hogy a g leképezés n-edrendben konvex. Speciálisan,

$$0 \leq \left[\overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n, \overline{\lambda}_{n+1}\,;\, g\right] = [y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}\,;\, f]\,.$$

Mivel $y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} \in D$ tetszőleges kollineáris pontok voltak, melyek teljesítették az $y_0 < y_1 < \ldots < y_n < y_{n+1}$ feltételt, sikerült megmutatnunk az f függvény n-edrendű konvexitását. $\square$

Összefoglaló

A disszertációban olyan függvények vizsgálatával foglalkoztunk, amelyek bizonyos megengedett hibával teljesítik a konvexitási egyenlőtlenséget a súlyokra vonatkozó megszorítások mellett, úgy mint közelítő Jensen-konvexitás, résztestre vonatkozó közelítő konvexitás. Ennek megfelelően a továbbiakban $\mathbb{F}$ a valós számok egy résztestét jelöli, X pedig egy vektorteret $\mathbb{F}$ felett.

Elsőként a hibatagot tartalmazó tartófüggvényeket, más néven szubgradienseket határoztuk meg, majd ennek felhasználásával a hibatagra vonatkozó feltevések mellett egyfajta differenciálhatóságot igazoltunk a második fejezetben. Nevezetesen, az $\mathbb{F}$-konvex és $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt halmazok, valamint az $\mathbb{F}$-konvex függvények fogalmának bevezetését követően ismertettük a fejezetben vizsgált $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex függvény definícióját és kimondtunk egy tételt, mely az $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex függvényre fogalmaz meg ekvivalens állításokat és egyfajta tartótulajdonságot:

Tétel. *Legyen $D \subseteq X$ nemüres, $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex halmaz, $\alpha : D^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ egy páros leképezés (ahol $D^* = D - D$) és $f : D \to \mathbb{R}$ egy függvény. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(i) f $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex D-n, azaz

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \\ + t\alpha((1-t)(x-y)) + (1-t)\alpha(t(y-x))$$

teljesül minden $x, y \in D$ és minden $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén;

(ii) minden olyan $r, s \in \mathbb{F}_+$, $u \in D$ és $h \in X$ esetén, ahol $u - sh$, $u + rh \in D$, teljesül az

$$\frac{f(u) - f(u-sh) - \alpha(-sh)}{s} \le \frac{f(u+rh) - f(u) + \alpha(rh)}{r}$$

egyenlőtlenség;

(iii) létezik egy $A : D \times X \to \mathbb{R}$ leképezés, amelyre fennáll az

$$f(u+rh) - f(u) \ge rA(u,h) - \alpha(rh)$$

egyenlőtlenség minden $u \in D$, $r \in \mathbb{F}$ és $h \in X$ esetén, ahol $u + rh \in D$.

Ezen tétel felhasználásával Rolewicz differenciálhatósági tételeivel analóg módon igazoltunk bizonyos regularitási tulajdonságokat a közelítően $\mathbb{F}$-konvex függvényekre:

TÉTEL. *Legyen $D \subseteq X$ egy nemüres, $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex halmaz és $\alpha : D^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ egy olyan páros függvény, hogy minden $h \in X$ esetén az $r \mapsto \alpha(rh)$ leképezés (mely minden olyan $r \in \mathbb{F}_+$ esetén értelmezett, amikor $rh \in D^*$) folytonos és teljesíti a*

$$\lim_{\mathbb{F}_+ \ni r \to 0} \frac{\alpha(rh)}{r} = 0$$

feltételt. Ha $f : D \to \mathbb{R}$ $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex és $A : D \times X \to \mathbb{R}$ az előző tétel (iii) állításában és bizonyításában leírt leképezés, akkor minden $u \in D$ és $h \in X$

esetén

$$A(u,h) = \lim_{s\to 0,\ s\in\mathbb{F}_+} \frac{f(u+sh)-f(u)}{s}.$$

Továbbá a $h \mapsto A(u,h)$ $(h \in X)$ *leképezés pozitív* $\mathbb{F}$*-homogén és szubadditív minden* $u \in D$*-re.*

A fejezet végén egy egyszerű példán keresztül ($\alpha(x) = c\|x\|^p$ esetén) szemléltettük, hogy a hibatag nem minden esetben tűnik el, majd egy megjegyzés keretében megmutattuk, hogy az $(\alpha, \mathbb{F})$-konvex függvények halmaza bővebb a konvexitási egyenlőtlenséget $\varphi(t(1-t)\|x-y\|)$ hibataggal teljesítő függvények halmazánál $\alpha(u) = \varphi(\|u\|)$ esetén.

A harmadik fejezetben alkalmas kontollfüggvényekre nézve közelítőleg (résztest felett) konvex függvényekkel történő szeparálhatóságot karakterizáltunk, amiből stabilitási tételt nyertünk. Elsőként Baron, Matkowski és Nikodem szeparációs tételének egy absztraktabb változatát bizonyítottuk.

TÉTEL. *Legyen* X *vektortér az* $\mathbb{F}$ *test felett,* D *az* X *egy* $\mathbb{F}$*-konvex,* $\mathbb{F}$*-algebrailag nyílt részhalmaza, továbbá* f *és* g *a* D *halmazon értelmezett valós függvények. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) létezik egy $\mathbb{F}$*-konvex* $p : D \to \mathbb{R}$ *függvény, melyre* $f \le p \le g$*;*

(ii) bármely $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in D$, $t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ *esetén, ahol* $t_1 + \ldots + t_n = 1$ *teljesül, igaz a következő egyenlőtlenség:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i). \tag{6.1}$$

Az előző tételben a résztest feletti konvexitás esetén a szeparációs tétel végtelen dimenziós változata jelenik meg, ezért a (6.1) egyenlőtlenség hibatagot tartalmazó általánosítása kontrollfüggvény-sorozattal írható le. Ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén definiáltuk a

$$T_n = \left\{(t_1, \dots, t_n) \in ([0,1] \cap \mathbb{F})^n \ : \ \sum_{j=1}^{n} t_j = 1\right\}$$

halmazt és $G_n \ : \ T_n \times D^n \to \mathbb{R}$ kontrollfüggvényeket, továbbá a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve $\mathbb{F}$-affin és $\mathbb{F}$-konvex valós függvényeket az $\mathbb{F}$ feletti X vektortér $D \subset X$ nemüres, $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt, $\mathbb{F}$-konvex részhalmazán.

A későbbiekben definiáltuk a (G_n) kontrollfüggvény-sorozatra nézve $\mathbb{F}$-affin és $\mathbb{F}$-konvex leképezéseket és vizsgáltuk a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) \tag{6.2}$$

egyenlőtlenséget ($n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ esetén). A fejezet fő eredményeként elegendő feltételt adtunk arra, hogy az előző egyenlőtlenséget teljesítő f és g függvények szeparálhatók legyenek:

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy létezik* (G_n) *kontrollfüggvény-sorozatra nézve* $\mathbb{F}$-*affin leképezés. Ekkor* $f, g \ : \ D \to \mathbb{R}$ *akkor és csak akkor teljesíti a* (6.2) *egyenlőtlenséget minden* $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ *és* $x_1, \dots, x_n \in D$ *esetén, ha létezik egy* $h : D \to \mathbb{R}$ *valós értékű* $\mathbb{F}$-*konvex függvény a* (G_n) *kontrollfüggvény-sorozatra nézve úgy, hogy*

$$f \le h \le g$$

teljesül a D *halmazon.*

A tétel következményeként pedig stabilitási tételt is igazoltunk.

Végül hiperstabilitás jellegű (Rolewicz tételeivel analóg vagy azokat általánosító) eredményeket bizonyítottunk résztest felett, illetve magasabb rendű (Jensen)-konvexitásra.

A negyedik fejezetben a közelítő Jensen-konvexitással foglalkoztunk eltűnő hibatagok esetén. Ehhez definiáltuk az $\mathbb{F}$-norma fogalmát az $\mathbb{F}$ test feletti X vektortéren, majd $c \geq 0$, $p > 1$, $f : D \to \mathbb{R}$ esetén elvégeztük a vizsgált

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + c\big(t(1-t)\,\|x-y\|\,\big)^p \tag{6.3}$$

egyenlőtlenség ekvivalens átalakításait (ahol $x, y \in D$ és $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$). A (6.3) egyenlőtlenségből kapott, az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenségre vonatkozó lemmákat felhasználva pedig bizonyítottuk a következő tételt:

TÉTEL. *Legyen $D \subset X$ egy $\mathbb{F}$-algebrailag nyílt $\mathbb{F}$-konvex halmaz, $c \geq 0$, $p > 1$ és $f : D \to \mathbb{R}$ olyan leképezés, hogy f megoldása a* (6.3) *egyenlőtlenségnek minden $x, y \in D$ és $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ esetén. Ekkor f megoldás $c = 0$ esetén is, azaz az f függvény $\mathbb{F}$-konvex.*

Ezt követően ismertettük az alábbi tétel igazolásához szükséges eszközöket és eredményeket, majd megfogalmaztuk tételünket, mely megmutatja, hogy a közelítő Jensen-konvexitásból következik a Jensen-konvexitás, ha a hibafüggvény kellően kicsi a nulla egy környezetében.

TÉTEL. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, d_I az I intervallum hossza és $J_I = [0, d_I[$. Legyen $\psi : J_I \to [0, +\infty[$ olyan, hogy*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\psi(t)}{t^2} = 0.$$

Ha egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldja az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \psi(|x-y|)$$

egyenlőtlenséget bármely $x, y \in I$ esetén, akkor f Jensen-konvex.

A disszertáció a magasabb rendben közelítőleg konvex függvényekre vonatkozó eredményeink leírásával zárul. Ehhez ismertettük az osztott differencia fogalmát és ehhez kapcsolódóan az n-edrendű konvexitást. Majd megmutattuk, hogyan jutottunk el a vizsgált függvényegyenlőtlenséghez. Ezt követően bemutattuk a tételünk bizonyításához szükséges fogalmakat és korábbi eredményeket, úgy mint a differencia operátor, magasabb rendű Jensen-konvexitás és a magasabb rendű alsó Dinghas intervallum derivált, valamint Gilányi és Páles eredménye az n-edrendű Jensen-konvexitásra vonatkozóan. Ezek felhasználásával igazoltuk a következő Rolewicz-típusú tételt:

TÉTEL. *Ha* $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $I_n^* = \left\{\frac{x-y}{n+1} : x, y \in I,\ y < x\right\}$ *és* $\psi : I_n^* \to \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\lim_{h\to 0+} \frac{\psi(h)}{h^{n+1}} = 0$, *továbbá tetszőleges* $x \in I$ *és* $h > 0$ *olyanok, hogy* $x + (n+1)\,h \in I$ *esetén teljesül a*

$$\Delta_h^{n+1} f(x) + \psi(h) \geq 0$$

egyenlőtlenség, akkor az f *függvény* n*-edrendben Jensen-konvex.*

Az előző tétel és ismert regularitási tételek segítségével beláttuk a következő tételt:

TÉTEL. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *egy nyílt intervallum, jelölje* $\nu(I)$ *az* I *intervallum hosszát, továbbá legyen* $n \in \mathbb{N}$ *és* $J_I =]0, \nu(I)[$, *valamint legyen a* $\varphi : J_I \to [0, +\infty[$ *olyan függvény, amely teljesíti a* $\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0$ *feltételt. Ha egy* $f : I \to \mathbb{R}$ *függvény minden olyan* $x_j \in I$ *pontok esetén* $(j = 0, 1, \ldots, n, n+1)$, *amelyekre teljesül az* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ *feltétel, megoldja az*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f] + \varphi(x_{n+1} - x_0) \geq 0$$

egyenlőtlenséget, akkor f n*-edrendben konvex.*

Végül az előző tétel általánosításaként kiterjesztettük az eredményt nyílt konvex halmazon értelmezett függvényekre is:

Tétel. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^m$ *egy nyílt konvex halmaz,* $\nu(D)$ *jelölje a* D *halmaz átmérőjét, továbbá* $J_D =]\,0, \nu(D)[$ *és* $n, m \in \mathbb{N}$*. Legyen a* $\varphi : J_D \to [0, +\infty[$ *függvény olyan, ami teljesíti a* $\lim_{t \to 0+} \varphi(t) = 0$ *feltételt. Ha egy* $f : D \to \mathbb{R}$ *függvény megoldja az*

$$\big[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f\big] + \varphi(\|x_{n+1} - x_0\|) \geq 0$$

egyenlőtlenséget minden olyan $x_j \in D$ $(j = 0, 1, \ldots, n, n+1)$ *esetén, ahol* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ *kollineárisak, akkor* f n*-edrendben konvex.*

Summary

In the dissertation, we investigated functions that fulfill the inequality of convexity with certain admissible error terms and restrictions on the weights (e.g. approximate Jensen-convexity, approximate convexity with respect to a subfield). For this prupose, let $\mathbb{F}$ denote a subdield of real numbers and X be a linear space over $\mathbb{F}$.

For the beginning, in the second chapter we determined the support functions (subgradients) containing an error term, then using this we proved a differentiability property under some assumptions on the error term. Namely, we introduced the concepts of $\mathbb{F}$-convex sets, $\mathbb{F}$-algebraically open sets, and $\mathbb{F}$-convex functions. Then we described the concept of $(\alpha, \mathbb{F})$-convex functions and formulated a theorem which contained equivalent statements and a kind of support property for $(\alpha, \mathbb{F})$-convex functions:

Theorem. *Let $D \subseteq X$ be a nonempty, $\mathbb{F}$-algebraically open, $\mathbb{F}$-convex set, $\alpha : D^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ be an even function (where $D^* = D - D$), and let $f : D \to \mathbb{R}$ be a function. Then the following statements are equivalent:*

i) f is $(\alpha, \mathbb{F})$-convex on D, i.e.,

$$
\begin{aligned}
f(tx + (1-t)y) \le\, & tf(x) + (1-t)f(y) \\
& + t\alpha((1-t)(x-y)) + (1-t)\alpha(t(y-x))
\end{aligned}
$$

holds for every $x, y \in D$ *and* $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$*;*

ii) the inequality

$$\frac{f(u) - f(u-sh) - \alpha(-sh)}{s} \le \frac{f(u+rh) - f(u) + \alpha(rh)}{r}$$

is satisfied for all $r, s \in \mathbb{F}_+$, $u \in D$, $h \in X$*, where* $u - sh, u + rh \in D$*;*

iii) there exists a function $A : D \times X \to \mathbb{R}$ *such that*

$$f(u+rh) - f(u) \ge rA(u,h) - \alpha(rh)$$

for all $u \in D$, $r \in \mathbb{F}$, $h \in X$*, where* $u + rh \in D$*.*

Using this theorem, we proved certain regularity properties for approximately $\mathbb{F}$-convex functions with sufficiently small errors, in the spirit of Rolewicz.

THEOREM. *Let* $D \subseteq X$ *be a nonempty,* $\mathbb{F}$*-algebraically open,* $\mathbb{F}$*-convex set and* $\alpha : D^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *be an even function such that, for every* $h \in X$*, the mapping* $r \mapsto \alpha(rh)$ *(defined for all* $r \in \mathbb{F}_+$ *that fulfill* $rh \in D^*$*) is continuous and satisfies*

$$\lim_{\mathbb{F}_+ \ni r \to 0} \frac{\alpha(rh)}{r} = 0\,.$$

If $f : D \to \mathbb{R}$ *is* $(\alpha, \mathbb{F})$*-convex and* $A : D \times X \to \mathbb{R}$ *is the mapping described in statement (iii) and the proof of the previous Theorem, then*

$$A(u,h) = \lim_{s \to 0,\ s \in \mathbb{F}_+} \frac{f(u+sh) - f(u)}{s}$$

for all $u \in D$ *and* $h \in X$*. Moreover, the mapping* $h \mapsto A(u,h)$ $(h \in X)$ *is positively* $\mathbb{F}$*-homogeneous and subadditive for every* $u \in D$*.*

At the end of this chapter, we illustrated by a simple example (when $\alpha(x) = c||x||^p$) that the error term does not disappear in every case. Then in a remark we showed that the set of $(\alpha, \mathbb{F})$-convex functions contains the set of those functions which satisfied the convexity inequality with the error term $\varphi(t(1-t)||x-y||)$ with $\alpha(u) = \varphi(||u||)$.

In the third chapter we characterized the separability with an approximately convex function (over a subfield and with respect to appropriate control functions) from which we obtained a stability theorem. First we proved a more abstract version of a separation theorem of Baron, Matkowski and Nikodem.

THEOREM. *Let X be a vector space over $\mathbb{F}$, D be an $\mathbb{F}$-convex, $\mathbb{F}$-algebraically open subfield of X, and f and g be real functions on D. Then the following statements are equivalent:*

(i) there exists an $\mathbb{F}$-convex function $p : D \to \mathbb{R}$ such that $f \leq p \leq g$;

(ii) the inequality

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i)$$

is fulfilled for every $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in D$, $t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \cap \mathbb{F}$, if $t_1 + \ldots + t_n = 1$.

In the previous theorem, in the case of convexity over a subfield, an infinite dimensional variation of the separation theorem appeared, hence this approach could be described with a control function sequence. Hence we defined the set

$$T_n = \left\{(t_1, \ldots, t_n) \in ([0,1] \cap \mathbb{F})^n \ : \ \sum_{j=1}^{n} t_j = 1\right\}$$

and the control functions $G_n : T_n \times D^n \to \mathbb{R}$ for all $n \in \mathbb{N}$, and the notion of $\mathbb{F}$-affine and $\mathbb{F}$-convex real functions with a control function sequence (G_n)

on an $\mathbb{F}$-algebraically open, $\mathbb{F}$-convex nonempty subset D of X (where X is a vector space over $\mathbb{F}$). After that we defined the set $\mathcal{F} := \{\varphi : D \to \mathbb{R} : \varphi$ is $\mathbb{F}$-affine with a cotrol function sequence$(G_n)\}$ and investigated the functional inequality

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i) + G_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) \tag{7.1}$$

fulfilled for all $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$.

As the main result of this chapter we proved that the condition $\mathcal{F} \neq \emptyset$ implies the separability of functions f and g which solve the above inequality:

THEOREM. *Suppose that $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Then $f, g : D \to \mathbb{R}$ satisfy inequality* (7.1) *for every $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ and $x_1, \dots, x_n \in D$ if and only if there exists an $\mathbb{F}$-convex function $h : D \to \mathbb{R}$ with the control function sequence (G_n) such that*

$$f \le h \le g$$

is satisfied on D.

At the end of the third chapter we obtained a stability theorem from the previous theorem.

Finally, we proved hiperstability-type results (analogue or more general forms of Rolewicz's theorems) over a subfield and for (Jensen-)convexity of higher order.

In the fourth chapter we investigated approximately Jensen-convex functions with vanishing error terms. For this we defined the $\mathbb{F}$-norm of an element of X (where X is a vector space over $\mathbb{F}$), then by performing appropriate substitutions we formulated equivalent versions of the inequality

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + c\big(t(1-t)\,\|x-y\|\,\big)^p \tag{7.2}$$

for all $x, y \in D$ and $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$ (where $c \geq 0$ and $p > 1$ are fixed, while $f : D \to \mathbb{R}$ is arbitrary). Using the lemmas for the reformulated inequalities we proved the following result:

THEOREM. *Let $D \subset X$ be an $\mathbb{F}$-algebraically open and $\mathbb{F}$-convex set, $c \geq 0$, $p > 1$ and $f : D \to \mathbb{R}$ such that f satisfies inequality* (7.2) *for every $x, y \in D$ and $t \in [0,1] \cap \mathbb{F}$. Then f satisfies the inequality with $c = 0$ as well, thus f is $\mathbb{F}$-convex.*

Then we described the tools and results necessary to verify the following theorem which shows that approximately Jensen-convex functions are, in fact, Jensen-convex if the error term is sufficiently small in a neighborhood of zero.

THEOREM. *Let $I \subset \mathbb{R}$ be an open interval, d_I be the length of the interval I, and $J_I = [0, d_I[$. Let the function $\psi : J_I \to [0, +\infty[$ satisfy*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\psi(t)}{t^2} = 0.$$

If a function $f : I \to \mathbb{R}$ satisfies

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \psi(|x-y|)$$

for all $x, y \in I$, then f is Jensen-convex.

The dissertation terminates with the results on approximately convex functions in higher order. For this, we described the concept of divided differences and this enabled us to introduce convexity of order n. Then we showed how to get the functional inequality of approximate convexity of higher order. After that we presented the required notations and earlier results, such as the notion of difference operator, Jensen convexity of higher order, lower Dinghas interval derivative of higher order, and the result for Jensen-convexity of order n by Gilányi and Páles, which we used in the proof of our theorem. Hence we proved the following Rolewicz-type result:

THEOREM. *If* $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $I_n^* = \left\{\frac{x-y}{n+1} \ : \ x, y \in I, \ y < x\right\}$ *and* $\psi : I_n^* \to \mathbb{R}$ *such that* $\lim_{h\to 0+} \frac{\psi(h)}{h^{n+1}} = 0$*, and for all* $x \in I$ *and* $h > 0$ *such that* $x + (n+1)\,h \in I$ *the inequality*

$$\Delta_h^{n+1} f(x) + \psi(h) \geq 0$$

is fulfilled, then the function f *is Jensen-convex of order* n*.*

These results helped us to prove the following theorem:

THEOREM. *Let* $I \subset \mathbb{R}$ *be an open interval,* $\nu(I)$ *denote the length of the interval* I*,* $n \in \mathbb{N}$*, and* $J_I =]0, \nu(I)[$*. Let the function* $\varphi : J_I \to [0, +\infty[$ *satisfy* $\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0$*. If a function* $f : I \to \mathbb{R}$ *satisfies the inequality*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\, ;\, f] + \varphi(x_{n+1} - x_0) \geq 0$$

for all $x_j \in I$ $(j = 0, 1, \ldots, n, n+1)$*, such that* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$*, then* f *is convex of order* n*.*

Finally, using some technical tools we could extend this theorem to the case where the domain is an open convex set.

THEOREM. *Let* $D \subset \mathbb{R}^m$ *be an open and convex set,* $\nu(D)$ *denote the diameter of the set* D*,* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $J_D =]\,0, \nu(D)[$*. Let the function*

$\varphi : J_D \to [0, +\infty[$ *satisfy* $\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0$. *If a function* $f : D \to \mathbb{R}$ *satisfies the inequality*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\,;\, f] + \varphi(\|x_{n+1} - x_0\|) \geq 0$$

for all $x_j \in D$ $(j = 0, 1, \ldots, n, n+1)$ *such that* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ *are collinear points, then* f *is convex of order* n.

A dolgozatban felhasznált saját publikációk

[BN13] Z. Boros and N. Nagy, *Approximately convex functions*, Annales Univ. Sci. Budapest, **40** (2013), 143–150.

[BN15] Z. Boros and N. Nagy, *Generalized Rolewicz theorem for convexity of higher order*, Math. Ineq. and Appl., **18**/4 (2015), 1275–1281.

[BN17] Z. Boros and N. Nagy, *Approximate convexity with respect to a subfield*, Acta. Math. Hungar., **152**/2 (2017), 464–472.

[Nag16] N. Nagy, *Approximately Jensen-convex functions*, Publ. Math. Debrecen, **89**/1-2 (2016), 89–96.

A DOLGOZATBAN IDÉZETT TOVÁBBI KÖZLEMÉNYEK

[Ada16] M. Adamek, *On a problem connected with strongly convex functions*, Math. Ineq. and Appl., **19**/4 (2016), 1287–1293.

[BMN94] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem, *A sandwich with convexity*, Math. Pannonica **5** (1994), 139–144.

[BD15] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Annalen **76**/4 (1915), 514–526.

[BW40] R. P. Boas and D. V. Widder, *Functions with positive differences*, Duke Math. J. **7**/1 (1940), 496–503.

[BP06] Z. Boros and Zs. Páles, *$\mathbb{Q}$-subdifferential of Jensen-convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **321** (2006), 99–113.

[Bul71] P. S. Bullen, *A criterion for n-convexity*, Pacific J. Math. **36**/1 (1971), 81–98.

[CP93] E. Casini and P. L. Papini, *A counterexample to the infinity version of the Hyers-Ulam stability theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 885–890.

[Cie59] Z. Ciesielski, *Some properties of convex functions of higher orders*, Ann. Polon. Math. **7**/1 (1959), 1–7.

[Ger72] R. Ger, *Convex functions of higher order in Euclidean spaces*, Ann. Polon. Math. **25**/3 (1972) 293–302.

[Ger74] R. Ger, *n-convex functions in linear spaces*, Aequationes Math. **10**/2-3 (1974), 172–176.

[GN11] R. Ger and K. Nikodem, *Strongly convex functions of higher order*, Nonlinear Anal. **74**/2 (2011),661–665.

[GP01] A. Gilányi and Zs. Páles, *On Dinghas-type derivatives and convex functions of higher order*, Real Anal. Exchange **27**/2 (2001/2002), 485–494.

[GP08] A. Gilányi and Zs. Páles, *On convex functions of higher order*, Math. Inequal. Appl. **11**/2 (2008), 271–282.

[Gre52] J. W. Green, *Approximately convex functions*, Duke Math. J. **19** (1952), 499–504.

[HP04] A. Házy and Zs. Páles, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36**/3 (2004), 339–350.

[HUL01] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Hop26] E. Hopf, *Über die Zusammenhänge zwishen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften*, Dissertation, Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin, Berlin, 1926.

[HU52] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828.

[Jen06] J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégualités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30**/1 (1906), 175–193.

[Kuc09] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, 2^{nd} Edition*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[Lac99] M. Laczkovich, *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. **58**/1-2 (1999), 135–142.

[LNT00] D. T. Luc, H. V. Ngai and M. Théra, *Approximate convex functions*, J. Nonlinear and Convex Anal. **1** (2000), 155–176.

[MNP12] J. Makó, K. Nikodem and Zs. Páles, *On strong* $(\alpha, \mathbb{F})$*-convexity*, Math. Inequal. Appl. **15**/2 (2012), 289–299.

[MP11] J. Makó and Zs. Páles, *Strengthening of strong and approximate convexity*, Acta Math. Hungar. **132** (2011), 78-91.

[MP12] J. Makó and Zs. Páles, *On* φ*-convexity*, Publ. Math. Debrecen **80**/1-2 (2012), 107–126.

[MN10] N. Merentes, K. Nikodem, *Remarks on strongly convex functions*, Aequationes Math. **80**/1-2 (2010), 193–199.

[MN16] N. Merentes, K. Nikodem, *Strong convexity and separation theorems*, Aequationes Math. **90**/1-2 (2016), 47–55.

[NP11] K. Nikodem and Zs. Páles, *Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions*, Banach J. Math. Anal. **5**/1 (2011) 83–87.

[NPW99] K. Nikodem, Zs. Páles, S. Wąsowicz, *Abstract separation theorem of Rodé type and their applications* Ann. Pol. Math. **72** (1999), 207–217.

[NN93] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118**/1 (1993), 103–108.

[Nör24] N. E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzialrechnung*, Berlin, 1924.

[Olb15] A. Olbryś, *On separation by h-convex functions*, Tatra Mt. Math. Publ., **62** (2015), 105–111.

[Pál03] Zs. Páles, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **131**/1 (2003), 243–252.

[PW05] A. Pinkus and D. Wulbert, *Extending n-convex functions* Studia Math. **171**/2 (2005) 125–152.

[Pop34] T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles* Mathematica (Cluj) **8**/1 (1934), 1–85.

[Pop45] T. Popoviciu, *Les Fonctions Convexes* Hermann et Cie, Paris, 1945.

[RV73] A. W. Roberts and D. E. Varberg, *Convex Functions* Academic Press, New York, London, 1973.

[Roc70] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[Rol79] S. Rolewicz, *On γ-paraconvex multifunctions*, Math. Japonica **24** (1979), 293–300.

[Rol00] S. Rolewicz, *On $\alpha(\cdot)$-paraconvex and strongly $\alpha(\cdot)$-paraconvex multifunctions*, Control Cybernet. **29** (2000), 367–377.

[Rol02] S. Rolewicz, *On $\alpha(\cdot)$-monotone multifunctions and differentiability of strongly $\alpha(\cdot)$-paraconvex functions*, Control Cybernet. **31**/3 (2002), 601–619.

[Rol05] S. Rolewicz, *Paraconvex analysis*, Control Cybernet. **34**/3, (2005), 951–965.

[TT09a] J. Tabor and J. Tabor, *Generalized approximate midconvexity*, Control Cybernet. **38**/3 (2009), 655–669.

[TT09b] J. Tabor and J. Tabor, *Takagi functions and approximate midconvexity*, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009), 729–737.

[TT12] Jacek Tabor and Józef Tabor, *Paraconvex, but not strongly, Takagi functions*, Control Cybernet. **41**/3, (2012), 545–559.

[TTZ10] J. Tabor, J. Tabor and M. Żołdak, *Optimality estimations for approximately midconvex functions*, Aequat. Math. **80** (2010), 227–237.

[Was06] Sz. Wąsowicz, *Some properties of generalized higher-order convexity* Publ. Math. Debrecen **68**/1-2 (2006), 171–182.

[Was07] Sz. Wąsowicz, *Support-type properties of convex functions of higher order and Hadamard-type inequalities* J. Math. Anal. Appl.**332**/2 (2007) 1229–1241.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/71/2018.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Nagy Noémi
Neptun kód: D148PE
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10047367

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (3)

1. Boros, Z., **Nagy, N.**: Approximate convexity with respect to a subfield.
   Acta Math. Hung. 152 (2), 464-472, 2017. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-017-0701-y
   IF: 0.583 (2016)

2. **Nagy, N.**: Approximately Jelsen-convex functions.
   Publ. Math. Debr. 89 (1-2), 89-96, 2016. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2016-7332
   IF: 0.431

3. Boros, Z., **Nagy, N.**: Approximately convex functions.
   Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 40, 143-150, 2013. ISSN: 0138-9491.

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

4. Boros, Z., **Nagy, N.**: Generalized Rolewicz theorem for convexity of higher order.
   Math. Inequal. Appl. 18 (4), 1275-1281, 2015. ISSN: 1331-4343.
   DOI: http://dx.doi.org/10.7153/mia-18-99
   IF: 0.544

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

További közlemények

Magyar nyelvű absztrakt kiadványok (1)

5. **Nagy, N.**: Determinánsos módszer alkalmazása egy függvényegyenlet megoldására. In: Tudományos Mozaik. 9. köt. 2. rész : Régi dilemmák - új megoldások. Szerk.: biz.: Daubner Katalin, Miklósné Zakar Andrea, Balázs Judit, Tomori Pál Főiskola, Kalocsa, 33-50, 2012. ISBN: 9789638816216

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 1,558
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 1,558

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2018.03.14.