

Lineáris Algebra

Tárgynév:	Lineáris Algebra					
Rövid név:	Lineáris Algebra			Kód:	GEMANI13-B	
Angol név:	Linear Algebra					
Tanszék:	Analízis Tanszék					
Tárgyfelelős:	Veres Laura					
Előtanulmányok:	-			Kódja:	-	
Kredit:	5		Követelmény:	aláírás és kollokvium		
Heti óraszámok:	Előadás:	2	Gyakorlat:	2	Labor:	-
Oktatási cél:	A lineáris algebra alapjainak elsajátítása.					
Tárgy tartalom:	A 3-dimenziós valós vektortér, vektoralgebra, egyenes és sík egyenletei, vektorterek, lineáris függőség, függetlenség, bázis, dimenzió, komplex számok, művelet, polinomok, műveletek gyöktényezős alak, mátrixok, mátrix műveletek, mátrix rangja, determináns, mátrix inverze, bázistranszformáció, homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek, megoldhatóság, megoldási módszerek, lineáris leképezések, karakterisztikus polinom, sajátvektor, sajátérték.					
Irodalom:	Dr. Szarka Zoltán-Dr. Raisz Péterné Dr. Matematika I (egyetemi tankönyv) Obádovics J. Gyula: Lineáris Algebra példákkal http://zeus.nyf.hu/~kovacs/linalg1.pdf					
Jellemző oktatási módok:						
Oktatási nyelv:	Magyar					
Előadás:	Minden hallgatónak előadás, tábla használatával					
Gyakorlat:	Tantermi gyakorlatok, táblahasználat					
Labor:	-					
Évközi feladatok, zárthelyik:	Két évközi zárthelyi dolgozat.					
Lezárási feltételek:	A tárgy lezárásának módja: aláírás+vizsga. Az aláírás és a vizsgajegy megszerzésének feltételei: a gyakorlatok 60%-án való aktív részvétel és a két félévközi zárthelyi mindegyikének legalább 50%-os teljesítése. A zárthelyi dolgozat értékelése: 0-24 pont: elégtelen, 25-30 pont: elégséges, 31-36 pont: közepes, 37-42 pont: jó, 43-50 pont: jeles. A vizsgadolgozat 100 pontos, 50 ponttól sikeres és a ponthatárok a fentebbi kétszeresei. Mindkét zárthelyi dolgozat az előadásokon elhangzott matematikai képletek, definíciók számonkérésével kezdődik (5x2 pont), a vizsgadolgozatban 10x2 pont. A legalább elégséges jegy megszerzéséhez a beugró legalább 50%-os teljesítése szükséges. Amennyiben valaki ezt nem éri el, a dolgozat további része nem kerül kijavításra. A zárthelyi dolgozatok és a pótzárthelyi dolgozatok ideje az alábbi részletes ütemtervben látható.					

Ütemterv

- 1-2. hét A 3-dimenziós valós vektortér, vektorok, vektorok közötti műveletek, összeadás, kivonás, skalárral való szorzás, a műveletek tulajdonságai, Descartes koordinátarendszer és koordináták, számolás koordinátákkal, skaláris szorzás. A skaláris szorzat tulajdonságai, vektorok merőlegessége, egy vektornak egy másikra vonatkozó merőleges vetületi vektora, vektor hossza, vektorok által kifeszített paralelogramma és háromszög területe.
3. hét Vektoriális szorzás, vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal, vektorok vegyes szorzata, vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata. A 3-dimenziós valós vektortér egyeneseinek, síkjainak egyenletei, irányvektor, normálvektor fogalma,
4. hét Valós vektortér definíciója, példák vektorterekre. Lineáris kombináció definíciója, lineáris függőség, függetlenség, generátorrendszer, bázis, dimenzió.
- 5-6. hét Komplex számok, algebrai alak, trigonometrikus alak, műveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) algebrai és trigonometrikus alakokban. n -edik hatvány kiszámolása, n -edik gyök kiszámolása a trigonometrikus alak felhasználásával.
7. hét Zárthelyi dolgozat.
8. hét Polinomok, összeadás, szorzás, maradékos osztás, egész együtthatós polinomok egész és racionális gyökeinek meghatározása, Horner-elrendezés.
9. hét Polinomok maradékos osztása, az Algebra alaptétele, polinomok gyökszerkezete. Mátrixok, mátrixok összeadása, skalárral való szorzása, mátrixok szorzása, a műveletek tulajdonságai, mátrix inverze, az inverz kiszámítása pivotálással.
10. hét Mátrix sajátértéke, sajátvektora. Determinánsok, a determináns függvény, determinánsok tulajdonságai, determinánsok kiszámítása több módszerrel.
11. hét Determináns kifejtése sor, illetve oszlop szerint, ferde kifejtési tétel, mátrix inverzének kiszámítása adjungált algebrai aldeterminánsokkal.
- 12-13. hét Lineáris egyenletrendszer definíciója, vektoros alakja, mátrixos alakja, megoldhatósága, pontosan egy, végtelen sok megoldás. Megoldása különböző módszerekkel. II. zárthelyi dolgozat.
14. hét Pótzárthelyi dolgozat

Miskolc, 2019. szeptember 1.

Dr. Veres Laura

NÉV:.....

Neptun kód:.....

I Zárthelyi dolgozatdolgozat
Lineáris algebra c. tárgyból

1. Számítsa ki az $\left(\overline{(2 + 2\sqrt{3}i)} \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right)^4$ értékét. Számításait végezze el algebrai és trigonometrikus alakban is! (16pont)

2. Oldja meg a komplex számok halmazán $z^6 + 3iz^3 = 0$ egyenletet! (8 pont)

3. Adott az $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = (-1, 0, 2t)$ és $\vec{c} = -\vec{k}$ vektor. (16 pont)

Számítsa ki az alábbiakat:

a) $\vec{a} \cdot (-2\vec{c})$

b) Számítsa ki $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorok által kifeszített háromszög területét;

c) Határozza meg a t paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}$ merőleges legyen a $\vec{b}$ vektorra;

d) Határozza meg a t paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek?

e) Írja fel annak a síknak az egyenletét amely párhuzamos az $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorokkal és átmegy a $P(-1, 2, 0)$ ponton.

NÉV:.....

Neptun kód:.....

II Zárthelyi dolgozatdolgozat-A
Lineáris algebra c. tárgyból

1. Bontsa fel gyöktényezős alakra ! (16pont)

$$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$$

2. Számítsa ki: (8 pont)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

3. Számítsa ki az A mátrix inverzét és rangját! Ellenőrzés!(16 pont)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

NÉV:.....
Neptun kód:.....

Vizsgárhelyi dolgozat
I. éves Gépészmérnöki Kar hallg. részére
Lineáris algebra (GEMAN 113-B) c. tárgyból

1. Bontsa lineáris gyöktényezők szorzatára a $P(x) = 2x^6 - 128$ polinomot! (16 pont)

2.Legyen

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \quad .$$

$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7$$

Oldja meg az egyenletrendszert és számítsa ki az együtthatómátrix rangját! (18 pont)

3. Ha tudjuk, hogy x_1, x_2, x_3 a

$x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 4x + 12 = 0$ egyenlet **valós gyökei**, számítsa ki az alábbi determinánst

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_3 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \quad (26 \text{ pont}) \text{ (Horner módszert használjon.)}$$

3. Adott az $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = (3, -2, t)$ és $\vec{c} = 2\vec{j}$ vektor. (6+4+10 pont)

Számítsa ki az alábbiakat:

a) Határozza meg a t paramétert értékét úgy, hogy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok bázist alkossanak!

b) Számítsa ki $\vec{c}$ és $\vec{a}$ hajlásszögét?

c) Írja fel annak a $v = (1, -2, 1)$ vektort az $x = 1$ -re kapott bázisban.

Akinek a beugróban nincs legalább 5 jó válasza, annak az eredménye elégtelen!

Értékelés: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles

NÉV:.....

Neptun kód:.....

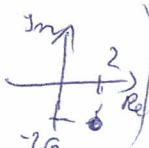
I Zárthelyi dolgozatdolgozat
Lineáris algebra c. tárgyból

1. Számítsa ki az $\left(\overline{(2+2\sqrt{3}i)} \cdot \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right)^4$ értékét. Számításait végezze el algebrai és trigonometrikus alakban is! (16pont)

$$E = \left(\overline{(2+2\sqrt{3}i)} \cdot \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = (2-2\sqrt{3}i) \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} (2(1-\sqrt{3}i) \cdot \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}))\right)^4$$

$$= \left(\frac{1}{4} (1-\sqrt{3}i)(1+i\sqrt{3})\right)^4 = \left(\frac{1}{4} \cdot (1^2 - (\sqrt{3}i)^2)\right)^4 = \left(\frac{1}{4} \cdot (1+3)\right)^4 = 1^4 = 1$$

$$2-2\sqrt{3}i = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \varphi = \arctan \frac{-2\sqrt{3}}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$


$$E = \left(4 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right)^4 =$$

$$= \left(\cos \frac{6\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi}{3}\right)^4 = \left(\cos 2\pi + i \sin 2\pi\right)^4 = \cos 8\pi + i \sin 8\pi =$$

$$= \cos 2\pi + i \sin 2\pi$$

2. Oldja meg a komplex számok halmazán $z^6 + 3iz^3 = 0$ egyenletet! (8 pont)

$$z^6 + 3iz^3 = z^3(z^3 + 3i) = 0$$

$$z^3 = 0 \quad z_{1,2,3} = 0$$

$$z^3 + 3i = 0$$

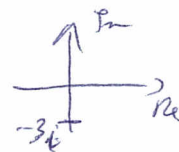
$$z = \sqrt[3]{-3i} = \sqrt[3]{3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) \quad k=0,1,2$$

$$w_0 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$$



3. Adott az $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = (-1, 0, 2t)$ és $\vec{c} = -\vec{k}$ vektor. (16 pont)
Számítsa ki az alábbiakat:

$$\vec{a} = (4, -2, 1) \\ \vec{c} = (0, 0, -1)$$

a) $\vec{a} \cdot (-2\vec{c}) = (4, -2, 1) \cdot (0, 0, 2) = 0 + 0 + 2 = 2$

b) Számítsa ki $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorok által kifeszített háromszög területét;

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - (-4)\vec{j} + 0\vec{k} = (2, 4, 0) \\ T_{\Delta} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

c) Határozza meg a t paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}$ merőleges legyen a $\vec{b}$ vektorra;

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 + 0 + 2t = 0 \quad t = 2$$

d) Határozza meg a t paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek?

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ lin. független} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) = 2 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ esetén} \\ \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ lin. független}$$

e) Írja fel annak a síknak az egyenletét amely párhuzamos az $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorokkal és átmegy a $P(-1, 2, 0)$ ponton.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{c} = (2, 4, 0)$$

$$Ax + By + Cz - D = 0 \quad D = \vec{n} \cdot \vec{P}_0 \quad \vec{n} = (A, B, C)$$

$$D = (2, 4, 0) \cdot (-1, 2, 0) = -2 + 8 + 0 = 6$$

$$2x + 4y - 6 = 0$$

NÉV:.....

Neptun kód:.....

II Zárthelyi dolgozatdolgozat-A

Lineáris algebra c. tárgyból

1. Bontsa fel gyöktényezős alakra! (16pont)

$$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$D_1 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

$$D_2 = \{\pm 1, \pm 2\}$$

Lehetséges gyökök $(\frac{p}{q})$

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4$$

x^3	x^2	x	x^0	
2	-1	-8	4	
2	1	-7	3	1
2	3	-2	0	2

$$\checkmark \quad x_1 = 2$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{matrix} 1/2 \\ -2 \end{matrix}$$

$$2(x-2)(x+2)(x-\frac{1}{2}) = 0$$

2. Számítsa ki: (8 pont)

$$\begin{aligned}
 & + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 0 - 18 - (0 - 40 + 18) \\
 & \quad \quad \quad \begin{matrix} 4 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix} \\
 & \quad \quad \quad = -4 - 18 + 40 - 18 = 0
 \end{aligned}$$

3. Számítsa ki az A mátrix inverzét és rangját! Ellenőrzés! (16 pont)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 - (-2 - 8) = 10 \neq 0 \quad \exists A^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & +4 & 0 \\ -3 & 4 & +5 \\ 1 & +2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ -3/10 & 2/5 & 1/2 \\ 1/10 & 1/5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{vagy} \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ellenőrzés: } A^{-1} \cdot A = E$$

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = E$$

$$\text{Rang: } \det A \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3$$

NÉV:.....

Neptun kód:.....

Vizsgázárthelyi dolgozat

I. éves Gépészmérnöki Kar hallg. részére

Lineáris algebra (GEMAN 113-B) c. tárgyból

1. Bontsa lineáris gyöktényezőik szorzatára a $P(x) = 2x^6 - 128$ polinomot! (16 pont)

$$P(x) = 2(x^6 - 64) = 2(x^6 - 2^6) = 2(x^3 - 2)(x^3 + 2) = 2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$P(x) = 2(x - 2)(x + 2)(x - (-1 + \sqrt{3}i))(x - (-1 - \sqrt{3}i))(x - (1 + \sqrt{3}i))(x - (1 - \sqrt{3}i))$$

2. Legyen

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1$$

$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7$$

Oldja meg az egyenletrendszert és számítsa ki az együtthatómátrix rangját! (18 pont)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 3 \\ 2 & 1 & -5 & | & 1 \\ 3 & -2 & -3 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 3 \\ 0 & 7 & -9 & | & -5 \\ 0 & 7 & -9 & | & -2 \end{pmatrix}$$

az egyenletrendszernek
nincs megoldása, összefüggetlen

$$\text{rang } A = 2$$

$$\text{vagy } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 3 \\ 0 & 7 & -9 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{tiltott sor}$$

3. Ha tudjuk, hogy x_1, x_2, x_3 a

$x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 4x + 12 = 0$ egyenlet **valós gyökei**, számítsa ki az alábbi determinánst

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_3 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \quad (26 \text{ pont}) \quad (\text{Horner módszert használjon.})$$

$$D_1 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\} \quad D_2 = \{\pm 1\}$$

Lehetséges gyökök $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ 1 & -3 & -3 & 9 & -4 & 12 \\ \hline 1 & -2 & -5 & 4 & 0 & 12 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -5 & -1 & -6 & 0 & 2 & \checkmark & x_1 = -2 \\ \hline 1 & -2 & -3 & 2 & -8 & -1 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -3 & 0 & -2 & \checkmark & x_2 = 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & \checkmark & x_3 = 3 \end{array}$$

a gyökök sorrendje felcserélhető!

$$x^2 + 1 = 0 \quad x = \pm i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_3 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot -2 - 2 \cdot 12 - 2 \cdot (-15) = 2$$

4. Adott az $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = (3, -2, t)$ és $\vec{c} = 2\vec{j}$ vektor. (6+4+10 pont)

Számítsa ki az alábbiakat:

$$\vec{a} = (-2, 0, 2)$$

$$\vec{c} = (0, 2, 0)$$

a) Határozza meg a t paramétert értékét úgy, hogy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok bázist alkossanak!

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ bázis $\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ lin. függetlenek

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & t \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & t \end{vmatrix} = -2(-2t-6) = 0 \quad t = -3$$

Tehát bázist alkotnak ha $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

b) Számítsa ki $\vec{c}$ és $\vec{a}$ hajlásszögét?

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

c) Írja fel annak a $\vec{v} = (1, -2, 1)$ vektort az $x = 1$ -re kapott bázisban.

$$\vec{v} = \vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}z \quad \begin{aligned} -2x + 3y &= 1 \\ -2y + 2z &= -2 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} -2x + 3y &= 1 & x &= \frac{1}{4} \\ 2y + 2z &= -2 & y &= -\frac{1}{2} \\ -4z &= 6 & z &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{v}_B = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

Akinek a beugróban nincs legalább 5 jó válasza, annak az eredménye elégtelen!

Értékelés: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles