

Lineáris Algebra

Tárgynév:	Lineáris Algebra					
Rövid név:	Lineáris Algebra			Kód:		
Angol név:	Linear Algebra					
Tanszék:	Analízis Tanszék					
Tárgyfelelős:	Veres Laura					
Előtanulmányok:	-			Kódja:	-	
Kredit:	5		Követelmény:	aláírás és kollokvium		
Heti óraszámok:	Előadás:	2	Gyakorlat:	2	Labor:	-
Oktatási cél:	A lineáris algebra alapjainak elsajátítása.					
Tárgy tartalom:	Halmazelmélet, Komplex számok, Polinomok, Vektoralgebra, Mátrixok, Determinánsok, Lineáris egyenletrendszerek.					
Irodalom:	Dr. Szarka Zoltán-Dr. Raisz Péterné Dr. Matematika I (egyetemi tankönyv) Dr. Szarka Zoltán-Dr. Kovács Béla: Matematika I (példatár) Obádovics J. Gyula: Lineáris Algebra példákkal					
Jellemző oktatási módok:						
Oktatási nyelv:	Magyar					
Előadás:	Minden hallgatónak előadás, tábla használatával					
Gyakorlat:	Tantermi gyakorlatok, táblahasználat					
Labor:	-					
Évközi feladatok, zárthelyik:	Egy évközi zárthelyi dolgozat.					
Lezárási feltételek:	A tárgy lezárásának módja: aláírás+vizsga. Az aláírás és a vizsgajegy megszerzésének feltétele a félévközi zárthelyi legalább 50%-os teljesítése. A zárthelyi dolgozat és a vizsgadolgozat értékelése: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles.					

Ütemterv

1. ea. Halmazelmélet. Komplex számok, algebrai alak, trigonometrikus alak, műveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) algebrai és trigonometrikus alakokban. n -edik hatvány kiszámolása, n -edik gyök kiszámolása a trigonometrikus alak felhasználásával. Egyenletek.
2. ea Polinomok, összeadás, szorzás, maradékos osztás, egész együtthatós polinomok egész és racionális gyökeinek meghatározása, Horner-elrendezés. Polinomok maradékos osztása, az Algebra alaptétele, polinomok gyökszerkezete, racionális gyökkel rendelkező harmadfokú egyenlet megoldása.
- Mátrixok, mátrixok összeadása, skalárral való szorzása, mátrixok szorzása, a műveletek tulajdonságai, mátrix inverze.
3. ea Determinánsok, a determináns függvény, determinánsok tulajdonságai, kiszámítása pivotálással. Determináns kifejtése sor, illetve oszlop szerint, ferde kifejtési tétel, mátrix inverzének kiszámítása. Lineáris egyenletrendszer definíciója, vektoros alakja, mátrixos alakja, megoldhatósága, pontosan egy, végtelen sok megoldás. A megoldás menete pivotálással, Cramer-módszerrel, Gauss módszerrel, a megoldhatóság eldöntése.
4. ea A 3-dimenziós valós vektortér, vektorok, vektorok közötti műveletek, a műveletek tulajdonságai, Descartes koordinátarendszer és koordináták, számolás koordinátákkal. Skaláris szorzás, Vektoriális szorzás, vegyes szorzat, egy vektornak egy másikra vonatkozó merőleges vetületi vektora, vektor hossza, vektorok által kifeszített paralelogramma és háromszög területe, vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata. A 3-dimenziós valós vektortér egyeneseinek, síkjainak egyenletei, irányvektor, normálvektor fogalma. Valós vektortér definíciója, példák vektorterekre. Lineáris kombináció definíciója, lineáris függőség, függetlenség, generátorrendszer, bázis, természetes bázis, dimenzió.
- 5.ea/gy Zárthelyi dolgozat.

Miskolc, 2019. szeptember 1.

Dr. Veres Laura

NÉV:.....

Neptun kód:.....

Szak:.....

Zárthelyi dolgozat-B

I. éves Gépészmérnöki Kar levelezős hallg. részére

Lineáris algebra c. tárgyból

1. Számítsa ki az alábbi kifejezéseket:

$$\frac{1 - \sqrt{3}i}{2 + 2i}, \sqrt[3]{i(1 - i)}. \quad (8+10 \text{ pont})$$

2. Oldja meg a következő egyenletet Horner-elrendezést használva: (14 pont)

$$x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 = 0$$

3. Adottak az $A(1,2,-1); B(2,0,1); C(3,-1,2)$ pontok. (12+6 pont)

a) Számítsa ki a pontok által meghatározott háromszög területét!

e) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a pontokra!

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

4. Legyen $x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -6$.

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 5$$

Oldja meg az egyenletrendszert! (14 pont)

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Számítsa ki a mátrix inverzét. (14p)

Akinek az 1)-es feladatban nincs legalább 5 jó válasza, annak az eredménye elégtelen!
Értékelés: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles

NÉV:.....

Neptun kód:.....

Szak.:.....

Vizsgázárthelyi dolgozatsolgozat
I. éves Gépészmérnöki Kar lev. hallg. részére
Lineáris algebra, Algebra c. tárgyból

1.Számítsa ki az alábbi kifejezést algebrai és trigonometrikus alakban is! (20pont)

$$\left(\frac{2-2i}{1-i} \right)^{18}$$

2.Oldja meg a komplex számok halmazán $z^6 - 81iz^2 = 0$ egyenletet! (12 pont)

3. a) Bizonyítsa be, hogy $x^2 + 1$ osztja a $(x^{88} + x^{44} + 1)^{100} - 1$ polinomot.

b) Írja fel gyöktényezős alakban a következő polinomot: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$! Horner-elrendezést használva határozza meg a polinom -2-vel való behelyettesítési értékét! (20 pont)

4. Adott az $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = (4, 2, t)$ és $\vec{c} = -2\vec{k}$ vektor. (16 pont)

Számítsa ki az alábbiakat:

a) $\vec{a}(-2\vec{c})$

b) Számítsa ki $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített háromszög területét;

c) Határozza meg a t paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}$ merőleges legyen a $\vec{b}$ vektorra;

d) Határozza meg a t paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok lineárisan függők legyenek?

e) $\bar{a}$ és $\bar{c}$ hajlásszögét?

5. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P_1 (-4,2,-5)$, $P_2 (0,1,0)$, $P_3 (2,3,1)$ pontokra! (12 pont)

$$-5x_1 + 3x_2 - 13x_3 - 10x_4 = -27$$

6. Legyen $2x_1 - x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13$.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$$

Oldja meg az egyenletrendszert Gauss módszerrel! (20 pont)

NÉV:.....
 Neptun kód:.....
 Szak:.....

Zárthelyi dolgozat-B

I. éves Gépészmérnöki Kar levelezős hallg. részére
 Lineáris algebra c. tárgyból

1. Számítsa ki az alábbi kifejezéseket:

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2i}, \sqrt[3]{i(1-i)}. \quad (8+10 \text{ pont})$$

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2i} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{2+2i-2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i^2}{8} = \frac{(2+2\sqrt{3})+i(2-2\sqrt{3})}{8}$$

$$i(1-i) = i-i^2 = 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$W_2 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n} \right) \quad k=0, 1, \dots, n-1$$

$$W_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} \right) \quad k=0, 1, 2$$

$$W_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$W_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right)$$

$$W_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

2. Oldja meg a következő egyenletet Horner-elrendezést használva:

(14 pont)

$$x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 = 0$$

$$x^2(x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8) = 0$$

$$x^2=0 \quad x_{1,2}=0$$

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$D_8 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$$

$$D_1 = \{\pm 1\}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 1 \end{array} \quad \checkmark \quad x_3 = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 3 & 7 & 15 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 7 & 12 & 32 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 0 & 4 & 0 & -2 \end{array} \quad \checkmark \quad x_4 = -2$$

$$\cancel{x^2 + 4} \quad x^2 + 4 = 0 \quad x^2 = -4 \quad x_{5,6} = \pm 2i$$

3. Adottak az $A(1,2,-1); B(2,0,1); C(3,-1,2)$ pontok. (12+6 pont)

a) Számítsa ki a pontok által meghatározott háromszög területét!

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, -3, 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0, 1, 1) \quad (0\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$T_{\Delta} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ t.e.}$$

e) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a pontokra!

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad D = \vec{n} \cdot \vec{P}_0$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) \quad (\text{a pontból})$$

$$D = \vec{n} \cdot \vec{A} = (0, 1, 1) \cdot (1, 2, -1) = 0 + 2 - 1 = 1$$

$$y + z - 1 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

4. Legyen $x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -6$.

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 5$$

Oldja meg az egyenletrendszert! (14 pont)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 6 \\ 1 & -2 & -5 & | & -6 \\ 1 & 5 & -1 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 6 \\ 0 & -5 & -7 & | & -12 \\ 0 & 2 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 6 \\ 0 & -5 & -7 & | & -12 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{5} & | & -\frac{29}{5} \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \quad x_1 = 1$$

$$-5x_2 - 7x_3 = -12 \quad x_2 = 1$$

$$-\frac{29}{5}x_3 = -\frac{29}{5} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$M = \{(1, 1, 1)\}$$

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Számítsa ki a mátrix inverzét. (14p)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

létezik $A^{-1} \Leftrightarrow$ ha négyzetes & $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, R_3 \leftarrow R_3 + R_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + \frac{2}{5}R_2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \quad \exists A^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & +4 & 0 \\ -3 & 4 & +5 \\ 1 & +2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ -3/10 & 2/5 & 1/2 \\ 1/10 & 1/5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Akinek az 1)-es feladatban nincs legalább 5 jó válasza, annak az eredménye elégtelen!
Értékelés: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles

NÉV:.....

Neptun kód:.....

Szak:.....

Vizsgázárthelyi dolgozatladozat
 I. éves Gépészmérnöki Kar lev. hallg. részére
Lineáris algebra, Algebra c. tárgyból

1. Számítsa ki az alábbi kifejezést algebrai és trigonometrikus alakban is! (20 pont)

$$E = \left(\frac{2-2i}{1-i} \right)^{18}$$

$$E = \left(\frac{2-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \right)^{18} = \left(\frac{2(1-i)^2}{2} \right)^{18} = (1-2i+1)^{18} = (-2i)^{18} = (-2)^{18} \cdot i^{18} = -2^{18}$$

$$2-2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$E = \left(\frac{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \right)^{18} = \left(2 \left(\cos \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right)^{18} =$$

$$= 2^{18} \left(\cos 18 \cdot \frac{6\pi}{4} + i \sin 18 \cdot \frac{6\pi}{4} \right) = 2^{18} \left(\cos 27\pi + i \sin 27\pi \right) =$$

$$= 2^{18} \left(\cos \pi + i \sin \pi \right)$$

2. Oldja meg a komplex számok halmazán $z^6 - 81iz^2 = 0$ egyenletet! (12 pont)

$$z^2(z^4 - 81i) = 0$$

$$z_{1,2} = 0$$

$$z^4 = 81i = 81 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

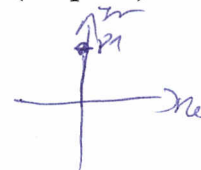
$$W_k = \sqrt[4]{81} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} \right) \quad k=0,1,2,3$$

$$W_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

$$W_1 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right)$$

$$W_2 = 3 \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right)$$

$$W_3 = 3 \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right)$$



3. a) Bizonyítsa be, hogy $x^2 + 1$ osztja a $(x^{88} + x^{44} + 1)^{100} - 1$ polinomot.

b) Írja fel gyöktényezős alakban a következő polinomot: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$! Horner-elrendezést használva határozza meg a polinom -2-vel való behelyettesítési értékét! (20 pont)

$$a) x^2 + 1 = 0 \quad x = \pm i$$

$$P(i) = (i^{88} + i^{44} + 1)^{100} - 1 = (1 + 1 + 1)^{100} - 1 \neq 0 \quad \text{Teljesen nem osztható}$$

$$P(-i) =$$

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x(x-1)^3$$

x^4	x^3	x^2	x	x^0	
1	-3	3	-1	0	
1	-5	13	-27	54	-2

4. Adott az $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = (4, 2, t)$ és $\vec{c} = -2\vec{k}$ vektor. (16 pont)

$$\vec{a} = (-2, 1, 2) \quad \vec{c} = (0, 0, -2)$$

Számítsa ki az alábbiakat:

a) $\vec{a} \cdot (-2\vec{c}) = (-2, 1, 2) \cdot (0, 0, 4) = 0 + 0 + 2 \cdot 4 = 8$

b) Számítsa ki $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorok által kifeszített háromszög területét;

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2, -4, 0)$$

$$T_{\Delta} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 0^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2}$$

c) Határozza meg a t paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}$ merőleges legyen a $\vec{b}$ vektorra;

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 + 2 + 2t = 0 \quad t = 3$$

d) Határozza meg a t paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok lineárisan függetlenek?

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & t \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ esetén lineárisan függetlenek

e) $\vec{a}$ és $\vec{c}$ hajlásszögét?

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{0+0-4}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}} = \frac{-4}{6} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(-\frac{4}{6}\right)$$

5. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P_1 (-4,2,-5)$, $P_2 (0,1,0)$, $P_3 (2,3,1)$ pontokra! (12 pont)

$$Ax + By + Cz - D = 0 \quad D = \vec{n} \cdot \vec{P}$$

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (4, -1, 5)$$

$$\overrightarrow{P_1 P_3} = (6, 1, 6)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-11, 6, 10)$$

$$D = \vec{n} \cdot \vec{P}_1 = 44 + 12 - 50 = 6$$

$$S: -11x + 6y + 10z - 6 = 0$$

$$-5x_1 + 3x_2 - 13x_3 - 10x_4 = -27$$

6. Legyen $2x_1 - x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13$.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$$

Oldja meg az egyenletrendszert Gauss módszerrel! (20 pont)

$$\begin{array}{l} \text{vess} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 3 & -13 & -10 & -27 \\ 2 & -1 & 6 & 5 & 13 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} \leftrightarrow \text{①}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & 5 & 13 \\ -5 & 3 & -13 & -10 & -27 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{⑤}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & -27 \end{array} \right) \textcircled{2} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \quad \text{összeírható kétváltozós l.e.n}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 - 3t$$

$$x_1 = -3 + 10t$$

$$x_2 + 2x_3 = 5 + t$$

$$x_2 = 7t - 1$$

$$x_3 = 3 - 3t$$

$$x_3 = 3 - 3t$$

$$x_4 = t, t \in \mathbb{R}$$

$$x_4 = t, t \in \mathbb{R}$$