5.) Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(t)=\begin{cases}\frac{t+1}{2}, & \text{ha } -1<t<1,\\ 0, & \textit{egyébként.}\end{cases}$

Számítsa ki a $P(0<\xi<0{,}5)$ valószínűséget!

(8 pont)

$P(0<\xi<0{,}5) = \int_0^{0,5} f(t)\,dt = \int_0^{0,5}\frac{t+1}{2}\,dt =$ 1p 1p 1p

$= \frac{1}{2}\int_0^{0,5} t+1\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^{0,5} =$ 1p 1p

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\left(\frac{0}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right] = \frac{5}{16}$ 2p 1p

ME Analízis Intézeti Tanszék

MINTA III.

Név: ……………………………………………

NEPTUN kód: ……………………………

Zárthelyi dolgozat a Gazdaságtudományi Kar
I. éves levelező hallgatói részére

1.) Vizsgálja meg az alábbi sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából! Számítsa ki a sorozat határértékét és az $\varepsilon = 10^{-2}$ -hoz tartozó küszöbszámot! (8 pont)

$a_n = \frac{1-3n}{n+3}$ $\quad a_n > a_{n+1}$

$\frac{1-3n}{n+3} > \frac{-2-3n}{n+4}$ 1p

$(1-3n)(n+4) > (-2-3n)(n+3)$

$4-3n^2-11n > -6-3n^2-11n$

$4 > -6 \to \forall n \in \mathbb{N}$-re igaz

szig. mon. ↘ 2p

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-3n}{n+3} = -3$ 1p

$-3 \le a_n \le -\frac{1}{2}$ korlátos 1p

$|a_n - A| < \varepsilon \to \left|\frac{1-3n}{n+3}+3\right| < \frac{1}{100}$ 1p

$\left|\frac{1-3n+3(n+3)}{n+3}\right| = \frac{10}{n+3}$

$\frac{10}{n+3} < \frac{1}{100}$ 1p

$1000 < n+3$

$997 < n$

$N = 998$ küszöbszám 1p

2.) Határozza meg az alábbi határértékeket: (9 pont)

$\lim_{x\to\infty}\frac{2+x^4}{2x^5-3x+2}+\left(\frac{3}{x}\right)^2 = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^5}+\frac{x^4}{x^5}}{\frac{2x^5}{x^5}-\frac{3x}{x^5}+\frac{2}{x^5}}+\left(\frac{3}{x}\right)^2 = \frac{0}{2}+0^2 = 0$ 2p 1p

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x}\right)^{2x} = e^{-4}$ 3p

$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\sin 3x} = \frac{1-e^0}{\sin 0} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{\cos(3x)\,3} = -\frac{1}{3}$ 1p 1p 1p

Minta III.

ME Analízis Intézeti Tanszék

3.) Adott az $f(x)=-x^4+x^2$ függvény. Adja meg a függvény értelmezési tartományát, zérus helyét. Van-e inflexiós pontja f(x)-nek? Hol konvex/konkáv a függvény? (8 pont)

1p

$D_f = x \in \mathbb{R}$; Zh.: $f(x)=0=x^2(-x^2+1) \to x=0$; $x=\pm 1$ 1p

2p

$f'(x)=-4x^3+2x$; $f''(x)=-12x^2+2$; $f'''(x)=-24x$

Inflexiós pont: $f''(x)=0=-12x^2+2 \to x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\left.\begin{array}{l} f'''\left(x=\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-24\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\neq 0 \to \text{van inf pont} \\ f'''\left(x=\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)=-24\cdot\frac{-1}{\sqrt{6}}\neq 0 \to \text{van inf pont} \end{array}\right\} \text{2p}$$

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$x=-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; +\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$x=\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	inf	$\smile$	inf.	$\frown$

2p

4.) Számítsa ki az alábbi integrálokat: (9 pont)

$\int \sqrt{x^3}+e^x-\cos x\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+e^x-\sin x+C$ 3p

$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|+C$ 3p

$\int_1^3 \ln x\,dx =$ levezetés másik minta Zh-ban $=$

$= 3\cdot\ln 3-2$ 3p

5.) Egy dobozban 30 kék és 20 sárga egyforma nagyságú kislabda található, ~~egyszerre~~ visszatevéssel kihúzunk 5 db-ot.
Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztott labdák között legfeljebb 2 db kék lesz!
Mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 db sárga lesz a kiválasztott labdák között! (8 pont)

Visszatevéssel $P(A)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ 1p ; $p=\frac{s}{N}=\frac{30}{50}$

$N=50$; $n=5$, $s=30$ (kék) 2p ; $q=1-p$

A: legfeljebb 2 db kék: $k\le 2$

B: pontosan 3 db sárga $\equiv$ pontosan 2 db kék, $k=2$

1p

$P(A)=P(k=0)+P(k=1)+P(k=2)$ = behelyettesíteni!

$P(k=0)=\binom{5}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^5$; $P(k=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^4$;

$P(k=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3$ 3p

$P(B)=P(k=2)=$

1p