4. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(t)=\begin{cases}\frac{8}{3}t^{-3}, & \text{ha } 1<t<2,\\ 0, & \text{egyébként..}\end{cases}$

Számítsa ki a $P(\xi<1,5)$ valószínűséget! (8 pont)

$$P(\xi<1,5)=\int_{-\infty}^{1,5} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{1} 0\,dt+\int_{1}^{1,5}\frac{8}{3}t^{-3}\,dt=$$

1p 2p

$$=0+\frac{8}{3}\int_{1}^{1,5}t^{-3}\,dt=\frac{8}{3}\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_{1}^{1,5}=$$

1p 1p 1p

$$=\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[(1,5)^{-2}-1^{-2}\right]=-\frac{4}{3}\Big[\underbrace{\frac{4}{9}-1}_{-\frac{5}{9}}\Big]=$$

2p

$$=\frac{20}{27}$$

ME Analízis Intézeti Tanszék

MINTA I

Név :……………………………………………

NEPTUN kód:…………………………

Zárthelyi dolgozat a Gazdaságtudományi Kar
I. éves levelező hallgatói részére

1. Határozza meg az alábbi határértékeket: (12 pont)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+x^2}{2x^2-3x+2}+\left(\frac{3}{x}\right)^2=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}+\left(\frac{3}{x}\right)^2=\frac{0+1}{2-0+0}+0^2=$$

2p 1p

$$=\frac{1}{2}$$

1p

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}\right)^{6}=\left(e^4\right)^6=e^{24}$$

2p 1p 1p

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin 5x}=\cancel{\lim_{x\to 0}}\;\frac{\cos 0-1}{\sin(0)}=\frac{1-1}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'H}{=}$$

1p 1p

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos(5x)\cdot 5}=\frac{-\sin(0)}{5\cdot\cos(0)}=\frac{0}{5}=0$$

1p 1p

Minta I.

ME Analízis Intézeti Tanszék

2.) Adott az $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ függvény. Adja meg a függvény értelmezési tartományát, zérus helyét. Van-e szélsőértéke f(x)-nek? Hol növekvő/csökkenő és konvex/konkáv a függvény? Vázolja a függvény grafikonját! (15 pont)

1p

$D_f: x \in \mathbb{R}$, Zh. $f(x)=0=(x-1)^2(x+2) \to \underline{x=1}$, $\underline{\underline{x=-2}}$ 2p

$f'(x)=2(x-1)(x+2)+(x-1)^2(1+0)=$ 2p

$=[(2x+4)+(x-1)](x-1)=(3x+3)(x-1)$

1p

$f''(x)=3(x-1)+(3x+3)(1-0)=6x$

Szélsőérték: $f'(x)=0=(3x+3)(x-1) \begin{matrix} \nearrow x=1 \\ \searrow x=-1 \end{matrix}$ 2p

$f''(x=1)=6\cdot 1=6>0 \to$ van szélsőérték, min. 1p

$f''(x=-1)=-6<0 \to$ van szélsőérték, max. 1p

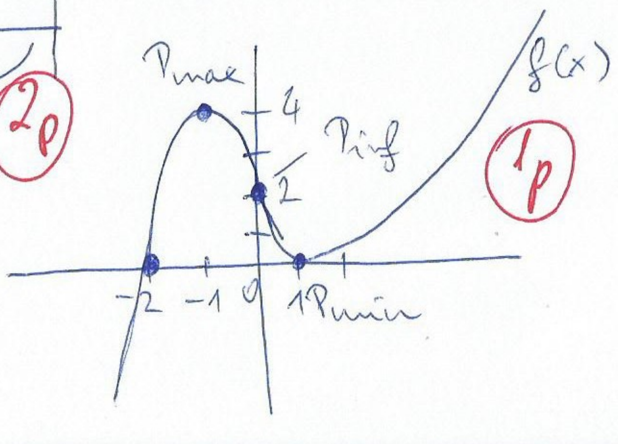
x	$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,+1)$	$x=+1$	$(+1,+\infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	max.	↘	min.	↗

2p $P_{max}=(-1,4)$, $P_{min}=(1,0)$

x	$(-\infty,0)$	$x=0$	$(0,+\infty)$
f''	−	0	+
f	⌒	inf.	⌣

$P_{inf.}=(0,2)$

2p



1p

3. Számítsa ki az alábbi integrálokat: (7 pont)

$\int x^5+e^x-\cos x\,dx=\dfrac{x^6}{6}+e^x-\sin x+C$ 3p

$\int_1^2 \ln x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x \to u'=\frac{1}{x} \\ v'=1 \to v=x \end{matrix}\right|=[x\cdot\ln x]_1^2-\int_1^2 \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{1}dx=$ $\quad [x]_1^2$

2p 2p

$=2\cdot\ln 2-1\cdot\ln 1-(2-1)=\underline{\underline{2\ln 2-1}}$

4. Egy dobozban 20 piros és 30 zöld kislabda található, visszatevés nélkül kihúzunk 5 db-ot, mi a valószínűsége, hogy a kiválasztott labdák között legfeljebb 2 db zöld lesz! (8 pont)

$N=20+30=50$, $n=5$, $s=30$ (zöld)

$k\le 2$ 2p

Visszatevés nélkül

$P(A)=\dfrac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ 1p

1p 1p

$P(k\le 2)=P(k=0)+P(k=1)+P(k=2)$

$P(k=0)=\dfrac{\binom{30}{0}\binom{20}{5}}{\binom{50}{5}}=\dfrac{1\cdot\frac{20!}{5!\cdot 15!}}{\frac{50!}{5!\cdot 45!}}$ 1p

$P(k=1)=\dfrac{\binom{30}{1}\binom{20}{4}}{\binom{50}{5}}$; $P(k=2)=\dfrac{\binom{30}{2}\binom{20}{3}}{\binom{50}{5}}$

1p 1p