Határérték-tételek véletlen mezőkre

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Karácsony Zsolt

Témavezető: Dr. Fazekas István

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2010.

Határérték-tételek véletlen mezőkre

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Karácsony Zsolt

Témavezető: Dr. Fazekas István

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2010.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács *Matematika- és Számítástudományok* Doktori Iskola *Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott matematika* programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2010. november 18.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy *Karácsony Zsolt* doktorjelölt 2003 – 2006 között a fent megnevezett Doktori Iskola *Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és alkalmazott matematika* programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2010. november 18.

a témavezető aláírása

Határérték tételek véletlen mezőkre

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a Matematika tudományágban

Írta: Karácsony Zsolt okleveles matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok
Doktori Iskolája (Valószínűségelmélet, matematikai statisztika és
alkalmazott matematika programja) keretében

Témavezető: Dr. Fazekas István

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Terdik György (DE-TTK)	....
tagok:	Dr. Baran Sándor (DE-TTK)	....
	Dr. Jeney András (ME-GÉIK)	....

A doktori szigorlat időpontja: 2010. április 29.

Az értekezés bírálói:

Dr.	....
Dr.	....
Dr.	....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: 20 . . ..

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Elsősorban témavezetőmnek, Dr. Fazekas Istvánnak, a sok segítségért, a kutatási módszertani útmutatásaiért, az adott inspirációkért, a türelméért és a szigorúságáért, ami nélkül ez a disszertáció sem készülhetett volna el.

Ugyancsak köszönettel tartozom a Debreceni Egyetem Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszékének, valamint a Miskolci Egyetem Alkalmazott Matematikai Tanszékének, hogy támogattak a tanulmányaim során. Elsősorban Dr. Fegyverneki Sándort szeretném kiemelni, aki minden segítséget megadva motivált a dolgozatom elkészítése során.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni szüleimnek és barátaimnak, hogy mindenben segítettek, támogattak, biztattak és végig mellettem álltak.

Tartalomjegyzék

Jelölések

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$	pozitív, illetve nem negatív természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	egész számok halmaza
$\mathbb{R}$	valós számok halmaza
$\mathbb{N}^d, \mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d$	d-dimenziós tér rácspontjai
$\mathbf{n}$	d-dimenziós vektor
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	valószínűségi mező
$\mathcal{F}$	σ-algebra
$\mathbb{P}(A)$	az A esemény valószínűsége
$\mathrm{I}\{A\}$	az A halmaz indikátor függvénye
$\mathbb{E}$	várható érték
$\mathrm{var}(.)$	szórásnégyzet
$\mathrm{cov}(.,.)$	kovariancia
$\otimes$	Kronecker-szorzat
$\Rightarrow$	eloszlásbeli konvergencia
$\mathcal{N}(m, \Sigma)$	normális eloszlás m várható értékkel és Σ kovariancia-mátrixszal
$a_n = \mathrm{o}(b_n)$	a_n/b_n sorozat nullához konvergál
$a_n = \mathrm{O}(b_n)$	a_n/b_n sorozat korlátos
c, C	konstans
$\|\mathcal{D}\|$	$\mathcal{D}$ véges halmaz számossága
K	magfüggvény
$L^p(\mathcal{C})$	a $\mathcal{C}$-mérhető függvények L^p tere

1. fejezet

Bevezetés

A határérték-tételekhez tartozó témakörök a valószínűségszámítás legfontosabb, legtöbbet kutatott fejezetei közé tartoznak. Dolgozatomban határérték-tételeket bizonyítok különböző feltételek esetén.

Disszertációm első részében autoregressziós típusú martingál mezőket tanulmányozok. Közismert, hogy a martingáloknak sokfajta általánosítása létezik. A Doob-féle martingál konvergencia tételt többparaméterű esetre Cairoli általánosította (lásd [Cai70]). Vektor értékű martingálokra pedig Chatterji terjesztette ki (lásd [Cha68]). Az ő eredményeit Fazekas István általánosította többparaméterű esetre (lásd [Faz83]).

MacQueen 1973-ban bevezette a lineáris martingál fogalmát ([MQ73]). Megmutatta, hogy az általa vizsgált folyamat sokkal közelebb áll a martingálokhoz, mint a stacionárius folyamatokhoz, ha az együtthatókra bizonyos feltételek teljesülnek. Az általa tekintett speciális esetben a Doob-féle martingál konvergencia tétel is teljesül. Dolgozata utolsó részében több példát is ad, ahol lehet alkalmazni a lineáris martingálokat.

Ezt az autoregresszív sémát azóta a szakirodalomban már többen vizsgálták ([Hey80], [Faz87], [Tom01]). Kétparaméterű esetre való kiterjesztésével Fazekas István foglalkozott a 80-as évek közepén. Kiindulva Fazekas István korábbi eredményeiből ([Faz87], [Faz88]), sikerült kiterjeszteni az autoregressziós típusú martingálokra vonatkozó eredményeket d-paraméterű esetre is, amely természetesen tartalmazza a már korábban elkészített egy-, illetve kétparaméterű esetet is speciális esetként (2.21. Tétel). Itt már magának a d-paraméteres autoregressziós típusú martingál mező fogalmának a kialakítása is saját eredmény, nemcsak ezen folyamat alkalmas reprezentációja és a konvergencia tételek igazolása. A bizonyításban új ötleteket kellett felhasználni, mert a korábbi eredményekben használt módszerek nem voltak alkalmazhatóak a d-paraméterű esetben. A 2-nél magasabb dimenziós paramétertér esetén bevezetett új formalizmus a vec operátoron és a Kronecker-szorzaton alapul. Felhasználtam továbbá a Burkholder-egyenlőtlenség általános alakját is, amely Fazekas István cikkében található meg (lásd [Faz05]).

A disszertáció második és harmadik részében határérték-tételeket bizonyítok úgynevezett „sűrűsödő-növekvő" sémára. A „sűrűsödő-növekvő" eset lényegesen eltér a tisztán sűrűsödő esettől. A sűrűsödő tulajdonság azt jelenti, hogy a megfigyelések helyei egyre sűrűbbek egy rögzített tartományban (lásd [Cre91]). A sűrűsödő esetben több jól ismert becslés sem konzisztens (lásd [Lah96]). Ebben az esetben nem várható a becslések aszimptotikus normalitása, mert hiányzik egy alkalmas centrális határeloszlás-tétel.

A „sűrűsödő-növekvő" tartomány esetén a megfigyeléseink egyre sűrűbbek, miközben a tartomány „mérete" is tart a végtelenhez. Ezt a gondolatot ilyen explicit formában először Lahiri vetette fel, majd egyre többen kezdtek foglalkozni ezzel a témával, hiszen ez a megközelítés hasznos lehet a földtudományok, meteorológia, környezetvédelem, képfeldolgozás stb. területein is. Ezen tudományterületeken számos olyan folyamatot tanulmányoznak, amely térben vagy időben folytonosan változik. A gyakorlatban nem tudjuk folytonosan megfigyelni a folyamatokat, ezért véges adathalmazokat és diszkrét becsléseket használunk.

Ezekben a fejezetekben gyengén függő valószínűségi mező létezését feltételezzük. Ehhez használjuk az úgynevezett α-keverő tulajdonságot.

Természetesen több keverő tulajdonság is létezik mind folyamatokra, mind mezőkre, ezeket az alábbiakban foglaljuk össze.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és legyenek $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ rész σ-algebrái $\mathcal{A}$-nak. A $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ σ-algebrák közti függőség leírására a következő együtthatókat vezették be a szakirodalomban:

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha(\mathcal{B}, \mathcal{C}) &= \sup_{B\in\mathcal{B}, C\in\mathcal{C}} |\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)|, \\
\beta = \beta(\mathcal{B}, \mathcal{C}) &= \mathbb{E}(\sup_{C\in\mathcal{C}} |\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(C|\mathcal{B})|), \\
\varphi = \varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) &= \sup_{B\in\mathcal{B}, \mathbb{P}(B)>0, C\in\mathcal{C}} |\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(C|B)|, \\
\rho = \rho(\mathcal{B}, \mathcal{C}) &= \sup_{X\in L^2(\mathcal{B}), Y\in L^2(\mathcal{C})} |\operatorname{corr}(X, Y)|.
\end{aligned}$$

Az együtthatók között a következő egyenlőtlenségek érvényesek (lásd [Dou94]):

$$\begin{aligned}2\alpha &\leq \beta \leq \varphi,\\ 4\alpha &\leq \rho \leq 2\sqrt{\varphi}.\end{aligned}$$

További egyenlőtlenségek megtalálhatók a [Dou94] és [Bra05] művekben.

A korábban bevezetett keverési együtthatók a következő intervallumból vehetnek fel értékeket:

$$\begin{aligned}0 &\leq \alpha(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq 1/4,\\ 0 &\leq \beta(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq 1,\\ 0 &\leq \varphi(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq 1,\\ 0 &\leq \rho(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq 1.\end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ akkor és csakis akkor független, ha a következő négy feltétel valamelyike teljesül:

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{B},\mathcal{C}) &= 0,\\ \beta(\mathcal{B},\mathcal{C}) &= 0,\\ \varphi(\mathcal{B},\mathcal{C}) &= 0,\\ \rho(\mathcal{B},\mathcal{C}) &= 0.\end{aligned}$$

Az α együtthatót Rosenblatt ([Ros56]), a β együtthatót Kolmogorov (vö. [WR59]), a φ együtthatót Ibragimov ([Ibr59]), a ρ együtthatót Kolmogorov és Rozanov ([KR60]) az említett cikkeikben vezették be. Továbbá számos más függőségi mérték is bevezetésre került (lásd [Bra83]).

Legyen $X = (X_k, k \in \mathbb{Z})$ valószínűségi változóknak egy (nem feltétlenül stacionárius) sorozata. Definiáljuk az $\mathcal{F}_J^L$ σ-algebrát a következőképpen:

$$\mathcal{F}_J^L = \sigma(X_k : J \leq k \leq L, k \in \mathbb{Z}), \quad -\infty \leq J \leq L \leq \infty.$$

Definiáljuk a következő együtthatókat minden $n \geq 1$ esetén ([Bra05]):

$$\alpha(n) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^{j}, \mathcal{F}_{j+n}^{\infty}),$$
$$\beta(n) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \beta(\mathcal{F}_{-\infty}^{j}, \mathcal{F}_{j+n}^{\infty}),$$
$$\varphi(n) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(\mathcal{F}_{-\infty}^{j}, \mathcal{F}_{j+n}^{\infty}),$$
$$\rho(n) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \rho(\mathcal{F}_{-\infty}^{j}, \mathcal{F}_{j+n}^{\infty}).$$

Azt mondjuk, hogy az X sztochasztikus folyamat erősen keverő (azaz α-keverő), ha $\lim_{k\to\infty} \alpha(k) = 0$. Ez a feltétel specifikálja az X múlt és jövő aszimptotikus függetlenségét. Hasonlóan vezethetők be a β, φ és ρ-keverő fogalmak is.

A folyamat keverő tulajdonságára az alábbiak érvényesek:

$$\varphi\text{-keverő} \Rightarrow \beta\text{-keverő} \Rightarrow \alpha\text{-keverő},$$
$$\varphi\text{-keverő} \Rightarrow \rho\text{-keverő} \Rightarrow \alpha\text{-keverő}.$$

Megmutatható, hogy az implikációk nem megfordíthatók (lásd [Dou94], [Bra05]).

Véletlen mezők esetén az α-keverő feltételt a következőképpen vezetjük be (lásd [Guy95]). Az $\{\varepsilon(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in T\}$, $T \subseteq \mathbb{R}^d$, α-keverési együtthatója:

$$\alpha(r, u, v) = \sup\{\alpha(\mathcal{F}_{I_1}, \mathcal{F}_{I_2}) \ : \ \varrho(I_1, I_2) \geq r, \ |I_1| \leq u, \ |I_2| \leq v\},$$

a szuprémum a T minden I_1 és I_2 véges részhalmazára veendő, $\mathcal{F}_{I_i} = \sigma\{\varepsilon(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in I_i\}$, $i = 1, 2$.

Az első központi határeloszlás-tételeket keverő véletlen sorozatokra Rosenblatt bizonyította ([Ros56]) α-keverő esetre, valamint Ibragimov ([Ibr62]) a φ-keverő esetre. A dolgozatom szempontjából fontos előzmény, hogy Ibragimov és Linnik ([IL71]) α-keverő folyamatokra, Guyon ([Guy95]) α-keverő mezőkre, Fazekas és Kukush ([FK00]) pedig α-keverő mezők esetén „sűrűsödő-növekvő" sémára bizonyítanak határérték-tételeket. Fazekas és Kukush nem közöl részletes bizonyítást, ezért jelen munkám második részében rögzítem a bizonyítás lépéseinek részleteit (lásd a 3.5. Tétel és a 3.6. Tétel bizonyítását), valamint foglalkozom a tétel p-dimenziós kiterjesztéseivel is.

A dolgozatom harmadik részének témája a regressziós függvény magfüggvényes becslése. A magfüggvényes becsléseket széles körben tanulmányozza a szakirodalom. Nadaraya és Watson ([Nad64], [Wat64]) 1964-ben közölt eredményeit számos cikkben feldolgozták és általánosították. Ezeket az eredményeket többek között Rao ([Rao83]), Devroye és Győrfi ([DG85]), valamint Bosq ([Bos98]) foglalta össze. A magfüggvényes becslések egy fontos tulajdonsága az aszimptotikus normalitás, melyet több cikkben is tanulmányoztak. Például 1972-ben Schuster ([Sch72]) diszkrét esetben bizonyított aszimptotikus normalitást, míg 2001-ben Cai ([Cai01]) folytonos esetben látott be hasonló eredményt. A regressziós függvény magfüggvényes becslésének vizsgálata szorosan kapcsolódik a sűrűségfüggvény becsléséhez (lásd [CL86], [BMP99], [FC06]). Ezen eredményekből kiindulva sikerült a regressziós függvény aszimptotikus normalitását bizonyítani α- keverő mezőkre „sűrűsödő-növekvő" tartományt tekintve. Ezen tételt tekintem a dolgozat legfontosabb eredményének (4.1. Tétel). Dolgozatomból, illetve Fazekas István korábbi eredményeiből ([FC06]) kiderül, hogy ez az eset a diszkrét és a folytonos idejű esetek között helyezkedik el. Pontosabban szólva, a határeloszlás kovariancia struktúrája a diszkrét és a folytonos idejű határeloszlások lineáris kombinációjaként adódik.

Dolgozatomat két példával zárom, melyen keresztül szemléltetem a határeloszlást. A numerikus példák jól mutatják az előbb jelzett speciális kovariancia struktúrát.

2. fejezet

Autoregressziós típusú martingál mezők

2.1. Bevezetés

A disszertáció első részében a lineáris martingálok többparaméteres kiterjesztésével foglalkozom, és fő eredményként majdnem mindenütti konvergenciát bizonyítok. Ez az eredmény speciális esetként tartalmazza Fazekas István eredményeit is (lásd [Faz87], [Faz88]).

Közismert, hogy a martingáloknak sokfajta alkalmazása és általánosítása létezik. Számos vizsgálat alapját a Doob-féle martingál konvergencia tétel szolgáltatta, amit itt most mi is felidézünk.

2.1. Tétel. *(Doob, [Doo53]) Legyen* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *szubmartingál. Tegyük fel, hogy* $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$. *Ekkor* $\lim_n X_n = X_\infty$ *létezik* 1 *valószínűséggel és* $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$.

A Doob-féle martingál konvergencia tételt többparaméterű esetre Cairoli általánosította (lásd [Cai70]). Vektor értékű martingálokra pedig Chatterji terjesztette ki (lásd [Cha68]). Az ő eredményeit Fazekas István általánosította többparaméterű esetre (lásd [Faz83]).

Közismert, hogy a valószínűségbeli és az L^p-beli ($p \geq 1$) konvergencia metrizálható (mind valós, mind Banach-térbeli értékű valószínűségi változókra). Így ezek esetén az egyparaméterű esetből adódik a többparaméterű sorozatok konvergenciája.

A majdnem biztos konvergencia (általában) nem metrizálható. Így az egyparaméterű esetből nem lehet közvetlenül következtetni a többparaméterűre. Sőt, Cairoli ([Cai70]) bebizonyította, hogy d-paraméterű martingál esetén a konvergencia feltétele:

$$\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|(\log^+ \|X_{\mathbf{n}}\|^{d-1}) < \infty.$$

Gut ([Gut76]) belátta, hogy a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye akkor és csak akkor érvényes, ha

$$\mathbb{E}\|X_{\mathbf{1}}\|(\log^+ \|X_{\mathbf{1}}\|^{d-1}) < \infty.$$

Itt $X_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in \mathbb{N}^d$, függetlenek és azonos eloszlásúak (lásd [Faz83] Theorem 5.3.).

A B Banach-térbeli martingálok elméletének alapjai (pl. B-beli valószínűségi változók feltételes várható értéke) Scalora ([Sca61]) cikkében található meg. Chatterji 1968-ban ([Cha68]) B-beli martingálokra bizonyította, hogy a valós martingál konvergencia tétel csak akkor érvényes, ha kiegészítő feltételeket teszünk fel. Például, ha $X_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ alakú, ahol $\mathbb{E}\|X\| < \infty$, akkor $X_{\mathbf{n}}$ konvergál L^1-ben és majdnem biztosan. Vagy például, ha B Radon-Nikodym tulajdonságú, akkor az $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ martingál $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\| < \infty$ esetén majdnem biztosan konvergál.

MacQueen a martingálok következő kiterjesztését kezdte el vizsgálni (lásd [MQ73]): legyen $(\xi_t, F_t, t = 1, 2, \dots)$ valószínűségi változók adaptált sorozata, ami teljesíti a

$$\mathbb{E}(\xi_s|F_{s-1}) = a_1\xi_{s-1} + \cdots + a_m\xi_{s-m} \tag{2.1}$$

feltételt, ahol m rögzített egész, $s > m$, és $a_1, \dots, a_m$ nem véletlen együtthatók. A (2.1)-ből kapjuk, hogy

$$\xi_s = a_1\xi_{s-1} + \cdots + a_m\xi_{s-m} + \delta_s,$$

ahol δ_s martingál differencia. MacQueen megmutatta, hogy a ξ_s folyamat sokkal közelebb áll a martingálokhoz, mint a stacionárius folyamatokhoz, ha az a_k együtthatók pozitívak és $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ teljesül. Ebben a speciális esetben a Doob-féle martingál konvergencia tétel is teljesül (lásd [MQ73], Section 3). Dolgozata utolsó részében több példát is ad, ahol lehet alkalmazni a lineáris martingálokat.

Ezt az autoregresszív sémát azóta a szakirodalomban már többen vizsgálták ([Hey80], [Faz87], [Tom01]). Kétparaméterű esetre Fazekas István terjesztette ki. Kiindulva Fazekas István korábbi eredményeiből ([Faz87], [Faz88]), sikerült kiterjeszteni az autoregressziós típusú martingálokra vonatkozó eredményeket d-paraméterű esetre, amelyek természetesen tartalmazzák a már korábban elkészített egy, illetve kétparaméterű esetet is speciális esetként. A bizonyításban új ötleteket kellett felhasználni, mert a korábbi eredményekben használt módszerek nem voltak alkalmazhatóak a d-paraméterű esetben. A 2-nél magasabb dimenziós paramétertér esetén bevezetett új formalizmus a vec operátoron és a Kronecker-szorzaton alapul. Felhasználtam továbbá a Burkholder-egyenlőtlenség általános alakját is, amely Fazekas István cikkében található meg (lásd [Faz05]).

2.2. Definíciók és előzmények

A továbbiakban a következő jelöléseket fogjuk használni: legyen d egy pozitív rögzített egész szám. Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ jelöljön d-dimenziós vektorokat. (pl. $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_d) \in \mathbb{N}_0^d$).

Felhasználjuk még az $\mathbf{1} := (1, ..., 1) \in \mathbb{N}^d$ és $\mathbf{0} := (0, ..., 0) \in \mathbb{N}_0^d$ jelöléseket. A relációkat $\mathbb{N}_0^d$-ban koordinátánként értelmezzük, azaz $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$, ha $m_i \leq n_i$, $i = 1, \ldots, d$; továbbá $\mathbf{m} < \mathbf{n}$, ha $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ és $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$. A $\max, \min, \to$ relációkat szintén koordinátánként értelmezzük. Például: $\mathbf{n} \to \infty$, ha $n_i \to \infty$ minden $i = 1, \ldots, d$ esetén.

Egy d-dimenziós vektor logaritmusának „abszolút értékén” a

$$|\log\ \mathbf{n}| := \prod_{i=1}^{d} \log^+ n_i$$

kifejezést értjük, ahol $\log^+ x = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x \geq e \\ 1, & \text{ha } x < e. \end{cases}$

A továbbiakban legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $X_\mathbf{n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, valószínűségi változók egy d-paraméterű sorozata, és legyen $\mathcal{F}_\mathbf{n} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$-re.

Jelölje $\overline{\mathbf{n}}$ az $\mathbf{n}$ vektor bizonyos koordinátáinak a halmazát és jelölje $\underline{\mathbf{n}}$ a maradék koordinátáit az $\mathbf{n}$ vektornak. Jelöljük $(\underline{\mathbf{n}}, \infty)$-el azon d hosszúságú sorozatokat, amelyek $\mathbf{n}$ azon koordinátáit tartalmazzák, amelyek elemei $\underline{\mathbf{n}}$-nek, míg $\mathbf{n}$ többi koordinátája legyen ∞-nel egyenlő. Például, ha $\underline{\mathbf{n}}$ az $\mathbf{n}$ második és harmadik koordinátáját tartalmazza, akkor $(\underline{\mathbf{n}}, \infty) = (\infty, n_2, n_3, \infty, \ldots, \infty)$ és $(\overline{\mathbf{n}}, \infty) = (n_1, \infty, \infty, n_4, \ldots, n_d)$.

Jelölje $\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)}$ az $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ σ-algebrák által generált σ-algebrát, ahol $\mathbf{k} \leq (\underline{\mathbf{n}},\infty)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$. Például a fenti esetben $\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)} = \sigma\{\mathcal{F}_{\mathbf{k}} : k_2 \leq n_2, k_3 \leq n_3\}$, és $\mathcal{F}_{(\overline{\mathbf{n}},\infty)} = \sigma\{\mathcal{F}_{\mathbf{k}} : k_1 \leq n_1, k_4 \leq n_4, \ldots, k_d \leq n_d\}$.

Legyen $(B, \|.\|)$ valós, szeparábilis Banach-tér . Jelölje $c(B)$ a B-beli konvergens sorozatok halmazát. Ha $X = (x_1, x_2, \ldots) \in c(B)$, legyen $\|X\|_c = \sup_i \|x_i\|$. Definiáljuk teljes indukcióval a $c^d(B)$ tereket (és a normát ebben a térben), azaz $c^d(B) = c(c^{d-1}(B))$. Jelölje $c_0(B)$ a 0-hoz konvergáló sorozatok halmazát (0 eleme B-nek).

Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}_{\mathbf{m}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathbf{n}}$ minden $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$-re. Továbbá, hogy $X_{\mathbf{n}}$ $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$-mérhető és integrálható (azaz $\mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}| < \infty$) minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$-re. Azt mondjuk, hogy $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ martingál, ha

$$\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}+\mathbf{k}} \,|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}) = X_{\mathbf{n}}$$

teljesül m.m., minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ és $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$ esetén.

Ebben a fejezetben végig feltesszük, hogy

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{\mathbf{l}}|\mathcal{F}_{\mathbf{m}})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\right) = \mathbb{E}\left(X_{\mathbf{l}}|\mathcal{F}_{\min\{\mathbf{m},\mathbf{n}\}}\right) \tag{2.2}$$

teljesül minden $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ esetén. Ezt a tulajdonságot gyakran alkalmazzák többparaméterű martingálok elméletében (lásd [Faz83]).

A fő eredményünk bizonyításához szükségünk lesz a (2.2)-nél kissé erősebb feltételre is, amelyet az alábbiakban elemzünk. Tetszőleges véges várható értékű η-ra:

$$\mathbb{E}\left(\eta \mid \mathcal{F}_{\mathbf{n}}\right) = \mathbb{E}\left(\ldots\ \mathbb{E}\left(\eta \mid \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_1)}\right)\ \ldots \mid \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_d)}\right) \tag{2.3}$$

az $(1, \ldots, d)$ minden $(i_1, \ldots, i_d)$ permutációja esetén, ahol $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i)} = \sigma\{\mathcal{F}_{\mathbf{l}} : l_i = n_i\}$ minden rögzített $\mathbf{n}$-re és i-re (az $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i)}$ képletben (i) a megfelelő koordináta).

Valójában $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i)}$ speciális esete az $\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)}$-nek, hiszen $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i)} = \mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)}$, ha $(\underline{\mathbf{n}},\infty) = (\infty, \ldots, \infty, n_i, \infty, \ldots, \infty)$.

Könnyű belátni, hogy (2.3)-ból következik a következő tulajdonság

$$\mathbb{E}\left\{\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\right\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\eta|\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)}\}|\mathcal{F}_{(\overline{\mathbf{n}},\infty)}\}, \tag{2.4}$$

minden véges várható értékű η esetén. Ennek belátásához jelölje $\underline{\mathbf{n}}$ az $\mathbf{n}$

$i_1, \ldots, i_l$ koordinátáját. Alkalmazva (2.3)-t az $\mathbb{E}\{\eta|\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)}\}$-re, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\} \\ &= \mathbb{E}\{\ldots\mathbb{E}[\mathbb{E}\ldots[\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_1)}]\ldots|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_l)}]\ldots|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_d)}\} \\ &= \mathbb{E}\{\ldots\mathbb{E}[\ldots\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_{l+1})}]\ldots|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_d)}\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

mivel $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_1)}, \ldots, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_l)}$ tartalmazza $\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)}$-t.

Tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}})|\mathcal{F}_{(\overline{\mathbf{n}},\infty)}\} \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[\mathbb{E}\ldots[E(\eta|\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_{l+1})}]\ldots|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_d)}]|\mathcal{F}_{(\overline{\mathbf{n}},\infty)}\} \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\eta|\mathcal{F}_{(\underline{\mathbf{n}},\infty)}\}|\mathcal{F}_{(\overline{\mathbf{n}},\infty)}\}, \end{aligned}$$

ahol a második lépésben (2.5)-öt alkalmaztuk.

Továbbá a (2.4)-ből következik, hogy

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{m}})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}) = \mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\min\{\mathbf{m},\mathbf{n}\}}) \tag{2.6}$$

minden véges várható értékű η esetén. Speciálisan, (2.4)-ből következik (2.2). Közismert ([Kho02], 36 o.), hogy (2.6)-ból következik (2.3). Tehát végeredményként kapjuk, hogy (2.3), (2.4) és (2.6) ekvivalensek és adódik belőlük (2.2).

2.2. Állítás. *Legyenek* $\varepsilon_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, *független valószínűségi változók,* $\mathcal{F}_{\mathbf{n}} = \sigma\{\varepsilon_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \leq \mathbf{n}\}$. *Ekkor* $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, *teljesíti* (2.3)*-at.*

Bizonyítás. Először $d = 2$ esetre bizonyítjuk az állítást. Jelölje ξ_{12}, ξ_1 és ξ_2 a következő véletlen elemeket: $\xi_{12} = (\varepsilon_{ij} : i \leq n_1, j \leq n_2), \xi_1 = (\varepsilon_{ij} : i \leq n_1, j > n_2)$ és $\xi_2 = (\varepsilon_{ij} : j \leq n_2, i > n_1)$. Ekkor $\mathbb{E}(\eta|\xi_{12}, \xi_1) = f(\xi_{12}, \xi_1)$, ahol f mérhető függvény.

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\eta|\xi_{12}, \xi_1)|\xi_{12}, \xi_2\} \\ &= \mathbb{E}\{f(\xi_{12}, \xi_1)|\xi_{12}, \xi_2\} = g(\xi_{12}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ennek bizonyításához először vegyük észre, hogy a ξ_{12}, ξ_1 és ξ_2 függetlenségéből következik

$$\mathbb{E}\{f(\xi_{12}, \xi_1)|\xi_{12} = x_{12}, \xi_2 = x_2\} = \mathbb{E}(f(x_{12}, \xi_1)) = g(x_{12}),$$

ahol g mérhető függvény. Helyettesítsük be ξ_{12}-t és ξ_2-t ebbe az egyenletbe és megkapjuk (2.7)-et. Kihasználva, hogy $\mathcal{F}_{\mathbf{n}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}$, és hogy (2.7) teljesül, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}]|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\} = \mathbb{E}\{g(\xi_{12})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\}\\ &= g(\xi_{12}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}].\end{aligned}$$

Ha $d = 3$, akkor a bizonyítás a következőkön alapul. Jelölje $\xi_x, \xi_{xy}, \xi_{xz}$, és ξ_{xyz} a következő véletlen elemeket: $\xi_x = (\varepsilon_{ijk} : i \leq n_1, j > n_2, k > n_3), \xi_{xy} = (\varepsilon_{ij} : i \leq n_1, j \leq n_2, k > n_3), \xi_{xz} = (\varepsilon_{ij} : i \leq n_1, j > n_2, k \leq n_3)$ és $\xi_{xz} = (\varepsilon_{ij} : i \leq n_1, j \leq n_2, k \leq n_3)$. Hasonlóan definiáljuk a többi $\xi_y, \xi_z, ...$ véletlen elemet is.

Először legyen: $\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)}) = \mathbb{E}(\eta|\xi_{xyz}, \xi_{xy}, \xi_{xz}, \xi_x) = f(\xi_{xyz}, \xi_{xy}, \xi_{xz}, \xi_x)$. Észrevesszük, hogy $\xi_{xyz}, \xi_{xy}, \xi_{xz}, \xi_x$ függetlenek.

Másodszor:

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}\big] = \mathbb{E}\{f(\xi_{xyz}, \xi_{xy}, \xi_{xz}, \xi_x)|\xi_{xyz}, \xi_{xy}, \xi_{yz}, \xi_y\} = g(\xi_{xyz}, \xi_{xy})$$

adódik, hiszen (ξ_{xz}, ξ_x) és $(\xi_{xyz}, \xi_{xy}, \xi_{yz}, \xi_y)$ függetlenek.

Harmadszor, tekintsük a következő

$$\mathbb{E}\big\{\mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}\big]|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(3)}\big\} = \mathbb{E}\{g(\xi_{xyz}, \xi_{xy})|\xi_{xyz}, \xi_{zx}, \xi_{zy}, \xi_z\} = h(\xi_{xyz}),$$

hiszen ξ_{xy} és $(\xi_{xyz}, \xi_{zx}, \xi_{zy}, \xi_z)$ függetlenek.

Kihasználva, hogy $\mathcal{F}_{\mathbf{n}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(3)}$ és az előző egyenlőséget, adódik, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\} &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}\big)|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(3)}\big)|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\big)\\ &= \mathbb{E}(h(\xi_{xyz})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\big) = h(\xi_{xyz})\\ &= \mathbb{E}\big\{\mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)})|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}\big]|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(3)}\big\}.\end{aligned}$$

$d > 3$ esetén a bizonyítás hasonló módon történik. □

2.3. Martingál mezők konvergenciája

Első eredményem többparaméterű B-értékű martingálok egyenletes konvergenciájáról szól. Ez a tétel a [Faz83] Theorem 4.4. egy változata, melyben az egyenletes konvergenciát nem vizsgálták.

Először elevenítsük fel a Radon-Nikodym tulajdonságot (lásd [Cha68]). A B Banach-tér rendelkezik a Radon-Nikodym tulajdonsággal az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-re vonatkozóan, ha minden korlátos variációjú (azaz $V_\mu(\Omega) < \infty$, ahol $V_\mu(A) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(A_k)| \middle| A_k \in \mathcal{F}, A_k \subset A, A_k \text{ diszjunkt}\right\}$) B-értékű σ additív $\mu : \mathcal{F} \to B$ halmazfüggvény, amely abszolút folytonos $\mathbb{P}$-re nézve (azaz $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$, jelölésben $V_\mu \ll \mathbb{P}$) rendelkezik integrál reprezentációval, azaz létezik olyan $f \in L^1(\mathcal{F}, B)$, hogy $\mu(A) = \int_A f(s)\mathbb{P}(ds)$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén. Itt $L^1(\mathcal{F}, B)$ B-beli értékű, $\mathcal{F}$-mérhető.

Egy B térről azt mondjuk, hogy rendelkezik a Radon-Nikodym tulajdonsággal, ha az egység intervallum Borel-halmazán értelmezett Lebesgue-mértékre nézve rendelkezik a Radon-Nikodym tulajdonsággal.

Szükségünk lesz még a Fazekas István [Faz83] dolgozatában közölt következő eredményekre:

2.3. Lemma. *([Faz83] Lemma 2.4., 158 o.)*

1. *Legyen X_i ($i \in \mathbb{Z}$) B-értékű valószínűségi változó. Ha az X_i sorozat konvergens m.m., akkor $X = (X_1, X_2, \dots)$ $c(B)$-értékű valószínűségi változó.*

2. *Legyen $X = (X_1, X_2, \dots)$ $c(B)$-értékű valószínűségi változó és legyen $\mathcal{A}$ rész σ-algebrája $\mathcal{F}$-nek. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\|X\|_c < \infty$, akkor $(\mathbb{E}(X|\mathcal{A}))_i = \mathbb{E}(X_i|\mathcal{A})$ ($i \in \mathbb{Z}$), azaz a $c(B)$-beli feltételes várhatóértéket koordinátánként képezhetjük.*

2.4. Tétel. *([Faz83] Theorem 4.4., 162 o.) Legyen $\{X_\mathbf{m}, \mathcal{F}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d\}$ B-értékű martingál. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\{X_{(\mathbf{m},\mathbf{n})}|\mathcal{F}_{(\mathbf{k},\infty)}\} = X_{(\mathbf{k},\mathbf{n})}$, ha $\mathbf{k} \leq \mathbf{m}$, ahol*

$$(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (m_1, m_2, \dots, m_j, n_1, n_2, \dots, n_i) \in \mathbb{Z}^d,$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = (k_1, k_2, \dots, k_j, n_1, n_2, \dots, n_i) \in \mathbb{Z}^d,$$

és $\mathcal{F}_{(\mathbf{k},\infty)} = \sigma\{\bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^i} \mathcal{F}_{(\mathbf{k},\mathbf{n})}\}$, ($i + j = d$; $i, j \geq 1$). B rendelkezzen a Radon-Nikodym tulajdonsággal vagy legyen $X_\mathbf{m} = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\mathbf{m})$ alakú, valamely $X \in L^1(\mathcal{F}, B)$-re. Tegyük fel, hogy $\sup\limits_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}|X_\mathbf{m}|(\log^+ |X_\mathbf{m}|^{d-1}) < \infty$, ekkor $\lim\limits_{\mathbf{m}\to\infty} X_\mathbf{m}$ létezik m.m. (és L^1-ben $d \geq 2$ esetén).

A bizonyításban használni fogjuk a Cairoli-egyenlőtlenséget is.

2.5. Megjegyzés. (Cairoli-egyenlőtlenség, [Faz83] 158 o.)

$$t(\log^+ t)^{r-2}\log^+[t(\log^+ t)^{r-2}] \leq (r-1)t(\log^+ t)^{r-1},\ r\geq 2,\ t\geq 0.$$

2.6. Tétel. *Legyen B egy valós szeparábilis Banach-tér. Legyen $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, B-értékű martingál. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$ σ-algebra teljesíti a (2.4)-et. B rendelkezzen a Radon-Nikodym tulajdonsággal vagy legyen $X_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ alakú, valamely $X \in L^1(\mathcal{F}, B)$-re. Tegyük fel, hogy*

$$\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|(\log^+\|X_{\mathbf{n}}\|^{d-1}) < \infty.$$

Ekkor létezik egy olyan A esemény, melyre $\mathbb{P}(A) = 1$ és minden $\omega \in A$-ra teljesül a következő: ha az $\mathbf{n}$ tetszőleges koordinátái konvergálnak a ∞-hez, míg a maradék koordináták rögzítettek maradnak, akkor $X_{\mathbf{n}}(\omega)$ egyenletesen konvergál. (A határérték egy, a rögzített koordinátáktól függő valószínűségi változó.)

Egy kétparaméteres martingál esetén a tételbeli konvergencia a következőt jelenti. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor minden rögzített $\omega \in A$-ra igaz: minden n_2 esetén $\|X_{n_1,n_2}(\omega) - X_{\infty,n_2}(\omega)\| < \varepsilon$, ha $n_1 > n_{1\varepsilon}$; minden n_1 esetén $\|X_{n_1,n_2}(\omega) - X_{n_1,\infty}(\omega)\| < \varepsilon$, ha $n_2 > n_{2\varepsilon}$; továbbá $\|X_{n_1,n_2}(\omega) - X_{\infty,\infty}(\omega)\| < \varepsilon$, ha $n_1, n_2 > n_\varepsilon$.

A 2.6. Tétel bizonyítása. A bizonyítást d szerinti indukcióval végezzük.

$d = 1$ esetben az eredmény már ismert (lásd [Cha68]).

Tegyük fel, hogy a tétel érvényes a $d-1$-et meg nem haladó dimenziókra. Most belátjuk d-re, $d \geq 2$. (Rögzítjük az $\mathbf{n}$ utolsó koordinátáját.)

Látható, hogy $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, B értékű martingál, melyre teljesülnek a 2.4. Tétel feltételei. Fazekas István igazolja (lásd [Faz83]), hogy $X_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, és $X_{\mathbf{n}} \to X$ $(\mathbf{n} \to \infty)$ L^1-ben, ahol X $\mathcal{F}_\infty$-mérhető.

Belátjuk, hogy $X_{\mathbf{n}}$ konvergál 1 valószínűséggel egyenletesen, midőn $\mathbf{n}$-nek csupán néhány koordinátája tart a végtelenbe.

Legyen $Z^{(k)}_{\mathbf{m}} = X_{(\mathbf{m},k)}$, ahol $k \in \mathbb{N}$ rögzített és $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{d-1}$ a futóindex. Ez egy $(d-1)$ indexes martingál, mely egyrészt $Z^{(k)}_{\mathbf{m}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{(\mathbf{m},k)})$ alakú. Innen

$$\begin{aligned} Z^{(k)}_{\mathbf{m}} &= X_{(\mathbf{m},k)} = \mathbb{E}\left(X_{(\mathbf{m},k)}|\mathcal{F}_{(\infty,k)}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{(\mathbf{m},k)})|\mathcal{F}_{(\infty,k)}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{(\infty,k)})|\mathcal{F}_{(\mathbf{m},k)}\right] = \mathbb{E}\left(Z^{(k)}_\infty|\mathcal{F}_{(\mathbf{m},k)}\right), \end{aligned}$$

ahol $Z_\infty^{(k)} = \mathbb{E}\left(X|\mathcal{F}_{(\infty,k)}\right)$.

Most felvázoljuk a bizonyítás fő ötletét: Használjuk ki azt, hogy $Z_{\mathbf{m}}^{(k)}$ (minden rögzített k-ra) egy $(d-1)$ paraméterű martingál. Az indukciós feltevés miatt $Z_{\mathbf{m}}^{(k)}$ egyenletesen konvergál, ha $\mathbf{m}$ koordinátáinak bármely részhalmaza tart a végtelenhez. A $Z_{\mathbf{m}}^{(k)}$ felépítése a következő. Ha $\mathbf{m}$-nek csak az utolsó koordinátája, azaz m_{d-1} tart a végtelenhez, akkor $Z_{\mathbf{m}}^{(k)}$ egy konvergens sorozat (1 valószínűséggel), azaz ez a sorozat $c(B)$-nek egy eleme. Tekintsük most azt az esetet, amikor m_{d-2} a futóindex. Ekkor az előző $c(B)$-beli elemekből álló sorozat konvergens. Tehát ez a $c(c(B))$-nek egy eleme. Végezetül $Z_{\mathbf{m}}^{(k)} \in \underbrace{c(\dots c}_{d-1}(B)) = c^{d-1}(B)$. Ténylegesen azt fogjuk megmutatni, hogy $X_{\mathbf{n}} \in c^d(B)$.

Rátérünk a pontos bizonyításra. Meg kell mutatni, hogy $Z_{\mathbf{m}}^{(k)}$ 1 valószínűséggel konvergens. Ennek igazolásához határozzuk meg a keresett határértéket.

Feltehető, hogy X $\mathcal{F}_\infty$-mérhető, ezért $X_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\mathbf{n}})$-ből következik, hogy $X_{\mathbf{n}} \to X$ L_1-ben.

Legyen $Z_{\mathbf{m}}^{(\infty)} = \mathbb{E}\left(X|\mathcal{F}_{(\mathbf{m},\infty)}\right)$. Ekkor $\left(Z_{\mathbf{m}}^{(\infty)}, \mathcal{F}_{(\mathbf{m},\infty)}\right)$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{d-1}$, egy martingál. A szubmartingál konvergencia tétel miatt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\|X\|(\log^+\|X\|)^{d-1} \le \sup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|(\log^+\|X_{\mathbf{n}}\|)^{d-1} \le K < \infty.$$

A Jensen-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\mathbb{E}\|Z_{\mathbf{m}}^{(\infty)}\|(\log^+\|Z_{\mathbf{m}}^{(\infty)}\|)^{d-1} \le \mathbb{E}\|X\|(\log^+\|X\|)^{d-1} \le K < \infty. \tag{2.8}$$

Azaz a $\left(Z_{\mathbf{m}}^{(\infty)}, \mathcal{F}_{(\mathbf{m},\infty)}\right)$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{d-1}$, martingál kielégíti a tétel feltételeit, ezért (az indukciós feltétel miatt) tekinthetjük ezt a martingált a $c^{d-1}(B)$ egy véletlen elemének.

Be kell látnunk, hogy

$$\mathbb{E}\left(Z^{(\infty)}|\mathcal{F}_{(\infty,k)}\right) = Z^{(k)} \tag{2.9}$$

teljesül minden k esetén. Itt $Z^{(\infty)} = \{Z_{\mathbf{m}}^{(\infty)} : \mathbf{m} \in \mathbb{N}^{d-1}\}$, valamint $Z^{(k)} = \{Z_{\mathbf{m}}^{(k)} : \mathbf{m} \in \mathbb{N}^{d-1}\}$. A (2.9) egyenlőséget minden rögzített $\mathbf{m}$ esetén bizonyítjuk. Az előzőekből:

$$\mathbb{E}\left(Z_{\mathbf{m}}^{(\infty)}|\mathcal{F}_{(\infty,k)}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X|\mathcal{F}_{(\mathbf{m},\infty)}\right)|\mathcal{F}_{(\infty,k)}\right] = \mathbb{E}\left(X|\mathcal{F}_{(\mathbf{m},k)}\right) = Z_{\mathbf{m}}^{(k)}.$$

Viszont ha $\mathbb{E}\|Z^{(\infty)}\|_{c^{d-1}(B)} < \infty$ teljesül, akkor a 2.3. Lemmából következik, hogy elegendő belátni (2.9)-et koordinátánként. (A $\|Z^{(\infty)}\|_{c^{d-1}(B)}$ kifejezésben a $c^{d-1}(B)$ tér normáját használjuk.)

A (2.8) miatt azt kapjuk, hogy $\sup_{\mathbf{m}} \mathbb{E}\|Z_{\mathbf{m}}^{(\infty)}\|(\log^+ \|Z_{\mathbf{m}}^{(\infty)}\|)^{d-1} < \infty$. Alkalmazva a 2.4. Tétel bizonyítását (lásd [Faz83]), a Cairoli-egyenlőtlenséget (2.5. Megjegyzés) és a teljes indukciót, kapjuk, hogy $\mathbb{E}\|Z^{(\infty)}\|_{c^{d-1}(B)} < \infty$. Tehát (2.9) érvényes. Ezért $Z^{(k)} \to Z^{(\infty)}$ m.m.

Most bebizonyítjuk, hogy ha tetszőlegesen sok koordináta az $\mathbf{n}$-ből tart a végtelenbe, akkor $X_{\mathbf{n}}$ egyenletesen konvergens 1 valószínűséggel. Osszuk fel $\mathbf{n}$-et részekre: $\mathbf{n} = (\mathbf{m}, \mathbf{l}, k)$, ahol $k \in \mathbb{N}$. A $c^{d-1}(B)$-beli esetre alkalmazva a martingál konvergencia tételt $\lim\limits_{k\to\infty} X_{(\mathbf{m},\mathbf{l},k)} = X_{(\mathbf{m},\mathbf{l},\infty)}$ a $c^{d-1}(B)$ térben m.m. Azaz minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan k_ε, hogy ha $k > k_\varepsilon$ akkor $\|X_{(\mathbf{m},\mathbf{l},k)} - X_{(\mathbf{m},\mathbf{l},\infty)}\| < \varepsilon$, minden $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ esetén. De $X_{(\mathbf{m},\mathbf{l},\infty)} \in c^{d-1}(B)$ teljesül, így $\|X_{(\mathbf{m},\mathbf{l},\infty)} - X_{(\mathbf{m},\infty,\infty)}\| < \varepsilon$ amikor $\mathbf{l}$ elegendően nagy. Ezekből $\|X_{(\mathbf{m},\mathbf{l},k)} - X_{(\mathbf{m},\infty,\infty)}\| < 2\varepsilon$, amikor k és $\mathbf{l}$ elegendően nagy.

Tehát az állítás bizonyítása teljes. $\square$

2.4. Az autoregresszív martingál mező definíciója

Ahhoz, hogy leírjuk a vizsgálandó $\xi_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, véletlen mező struktúráját, szükséges a Kronecker-szorzat (jelölje $\otimes$) és a vec operátor fogalma (lásd [MN88]).

2.7. Definíció. *Legyen A egy $m \times n$-es mátrix és legyen $\mathbf{a}_j$ az A mátrix j-edik oszlopa. Ekkor* vec A *egy $mn \times 1$-es vektor lesz a következő formában:*

$$\operatorname{vec} A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

Tehát a vec operátor átalakítja a mátrixot egy vektorrá úgy, hogy először az első oszlopot veszi, majd ez alá írja a második oszlopot, ez alá a harmadikat, ... (alapvető tulajdonságok megtalálhatók az [MN88]-ban).

A vec operátor egy d-dimenziós tömböt is egy vektorrá alakít át. Először az első index fut, azután a második és így tovább. Például tekintsünk egy 3-indexes tömböt, $A = (a_{ijk})_{i=1}^{l}{}_{j=1}^{m}{}_{k=1}^{n}$, ekkor

$$\operatorname{vec} A = (a_{111}, a_{211}, \ldots, a_{l11}, a_{121}, \ldots, a_{l21}, \ldots, a_{1mn}, \ldots, a_{lmn})^\top.$$

2.8. Definíció. *Legyen A $m \times n$-es, valamint B $p \times q$ dimenziós mátrixok. Ekkor a következő $mp \times nq$ alakú mátrixot*

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

az A és B mátrixok Kronecker-szorzatának nevezzük és $A \otimes B$-vel jelöljük.

A Kronecker-szorzat rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. $A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$;

2. $A \otimes B = (A \otimes I)(I \otimes B)$, ahol I jelöli az egységmátrixot;

3. Ha AC és BD is létezik, akkor

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD;$$

4. $\operatorname{vec}(ABC) = (C^\top \otimes A) \operatorname{vec} B$.

2.9. Definíció. *A $\{\xi_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, folyamatot autoregresszív típusú martingál mezőnek nevezünk, ha teljesülnek a következő feltételek:*

1. $\xi_{\mathbf{n}}$ $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$-mérhető és integrálható minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén,

2.

$$\mathbb{E}\left(\xi_{\mathbf{n}} | \mathcal{F}^{(j)}_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}\right) = a_1^{(j)}(n_j)\xi_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j} + a_2^{(j)}(n_j)\xi_{\mathbf{n}-2\mathbf{e}_j} + \ldots + a_m^{(j)}(n_j)\xi_{\mathbf{n}-m\cdot\mathbf{e}_j} \tag{2.10}$$

minden $\mathbf{n}$*-re és* j*-re, ahol* m *egy rögzített pozitív egész szám,* $n_j > m$, $j = 1, \ldots, d$, *továbbá* $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, \underbrace{1}_{j}, \ldots 0) \in \mathbb{N}_0^d$ *a* j*-edik egységvektor,* $j = 1, \ldots, d$, *és* $a_i^{(j)}(n_j)$ *nem negatív, nem véletlen együtthatók, amelyekre teljesül, hogy*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(j)}(n_j) = 1$$

minden $n_j = m+1, m+2, \ldots,\ \ j = 1, \ldots, d$ *esetén.*

Ha az $a_k^{(j)}(l)$ értékek nem függnek l-től, akkor $\xi_\mathbf{n}$-t *homogén autoregresszív martingál mező*nek nevezzük.

Legyen $\xi_\mathbf{n}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, egy d-paraméterű véletlen mező. A $\xi_\mathbf{n}$ segítségével megkonstruálunk egy új $X_\mathbf{n}$ véletlen mezőt. Az $X_\mathbf{n}$ mező értékeit d-paraméterű tömbök fogják alkotni. Minden rögzített $m \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén $(n_i \geq m, i = 1, \ldots, d)$ $X_\mathbf{n}$ a véletlen mező azon ξ_k elemeit tartalmazza, amelynek az indexei egy $\underbrace{m \times m \times \ldots \times m}_{d}$-es hiperkockába tartoznak. Pontosabban, legyen az $X_\mathbf{n}$ tömb $\mathbf{k}$-adik eleme $X_\mathbf{n}^\mathbf{k} = \xi_{\mathbf{n}-\mathbf{m}+\mathbf{k}}$, ahol $\mathbf{m} = (m, \ldots, m) \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_i = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, d$.

Ha a paramétereket az időnek tekintjük és $\mathbf{n}$ a jelen, akkor $X_\mathbf{n}$ tartalmazza a jelenbeli $\xi_\mathbf{n}$ értéket és $m^d - 1$ darab múltbeli értéket.

2.10. Állítás. *Legyen* $(\xi_\mathbf{n}, \mathcal{F}_\mathbf{n})$ *a 2.9. Definícióban bevezetett autoregresszív martingál mező és* $X_\mathbf{n}$ *a* $\xi_\mathbf{n}$*-ből származó tömbértékű véletlen mező. Ekkor*

$$\operatorname{vec}\left[\mathbb{E}\left(X_\mathbf{n} \mid \mathcal{F}^{(j)}_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}\right)\right] = \Big(\underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{d-j} \otimes A_j^{(n_j)} \otimes \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{j-1}\Big) \cdot \operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}) \tag{2.11}$$

teljesül minden $\mathbf{n}$*-re, ahol* $n_j > m$, $j = 1, \ldots, d$, *és* $A_j^{(l)}$ *minden* $j = 1, \ldots, d$, $l = m+1, m+2, \ldots$ *esetén a következő* $m \times m$*-es mátrixot*

$$A_j^{(l)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_m^{(j)}(l) & a_{m-1}^{(j)}(l) & \cdots & \cdots & a_1^{(j)}(l) \end{pmatrix}$$

jelöli.

Látható, hogy az $A_j^{(l)}$ mátrix egy Markov-lánc átmeneti mátrixa. Feltesszük, hogy $a_m^{(j)}(l) > 0$, ekkor a lánc irreducibilis. Ha ez a lánc aperiodikus, akkor ergodikus is. Ha $a_k^{(j)}(l) > 0$, akkor k a lánc utolsó állapotának a visszatérési ideje. Tehát, ha a $\{k : a_k^{(j)}(l) > 0\}$ számok legnagyobb közös osztója egyenlő 1-gyel, akkor a lánc aperiodikus.

A 2.10. Állítás bizonyítása. Meg kell határozni, hogy az egy lépéssel visszafelé vetítés hogyan alakul (azaz hogyan alakul a feltételes várható érték). Vegyük észre, hogy az $m \times m$-es mátrixok tételbeli d-szeres Kronecker-szorzatai a következőképpen alakulnak:

$$\Big(\underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{d-j} \otimes A_j^{(n_j)} \otimes \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{j-1}\Big) = I_1 \otimes A_j^{(n_j)} \otimes I_2,$$

ahol I_1 $m^{d-j} \times m^{d-j}$, illetve I_2 $m^{j-1} \times m^{j-1}$ dimenziós egységmátrixok. Ezért a szorzat egy olyan blokk-diagonális mátrix, amely főátlójába m^{d-j} darab tömb áll, melyek mindegyike

$$\begin{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{11} \end{pmatrix} \right. & \begin{pmatrix} a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{12} \end{pmatrix} & \dots \\ \begin{pmatrix} a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{22} \end{pmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

alakú. Vagyis ezek a blokkok m^2 darab $m^{j-1} \times m^{j-1}$ méretű diagonális mátrix-tömbből állnak. Az első mátrix főátlójában a_{11} áll, a második mátrix főátlójában a_{12} áll, és így tovább. Ezt a mátrixot meg kell szorozni egy m^d elemű vektorral (a $\operatorname{vec} X_{\mathbf{n}}$-nel).

Tekintsük az $X_{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n}$ fix) tömbben azokat az elemeket, melyeknek a j-ediken kívüli minden indexe egy értéken le van rögzítve, míg a j-edik indexe fut 1-től m-ig. Ezt a vektort jelölje $Y_{\mathbf{n}}(j)$. Az ugyanilyen módon $X_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}$-ből kapott vektort jelölje $Y_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}(j)$.

A (2.10) alapján látható, hogy

$$\mathbb{E}\left(Y_{\mathbf{n}}(j)|\mathcal{F}^{(j)}_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}\right) = A_j^{(n_j)} Y_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}(j). \tag{2.12}$$

Tehát csak azt kell látnunk, hogy

$$I \otimes \cdots \otimes I \otimes A_j^{(n_j)} \otimes I \otimes \cdots \otimes I \cdot \mathrm{vec}(X_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}) \tag{2.13}$$

alkalmas „része” éppen $A_j^{(n_j)} Y_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}(j)$-vel egyenlő.

A rövidség kedvéért legyen $A_j^{(n_j)} = A = (a_{st})$, $X_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j} = X_{\underline{\mathbf{k}}}$.

Először legyen $j = 1$. Ekkor a (2.13)-ban szereplő $I \otimes \cdots \otimes I \otimes A$ mátrix alakja

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix} = I \otimes \cdots \otimes I \otimes A \tag{2.14}$$

és a (2.13)-ban szereplő $\mathrm{vec}(X_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1})$ vektor alakja

$$(x_{111}, x_{211}, \dots, x_{m11}; x_{121}, x_{221}, \dots, x_{m21}; \dots; x_{1mm}, x_{2mm}, \dots, x_{mmm})^\top. \tag{2.15}$$

(Itt $d = 3$ esetet szemléltettük, de tetszőleges d esete lényegében ugyanilyen.) A fenti vektor egymás utáni m hosszúságú szeletei az $Y_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1}(1)$ lehetséges alakjai. Ezek képei, azaz a $A_1^{(n_1)} Y_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1}(1)$ alakú vektorok, éppen a fenti (2.14)-beli blokkdiagonális mátrixszal való szorzás útján adódnak a (2.15)-beli vektorból. Tehát $j = 1$ esetén kész a bizonyítás.

Most a $j > 1$ esetet képzeljük el úgy, hogy a d-t növeljük, így a (2.15)-beli vektorban minden koordináta indexe elé kell írnunk néhány indexet (éppen $j-1$-et) és ezek az indexek mindnyájan végigfutnak mind az m értéken.

Pl. $j = 3$ esetén x_{121} helyett az alábbi vektor jön be:

$$(x_{11121}, x_{21121}, \dots, x_{m1121}; x_{12121}, x_{22121}, \dots, x_{m2121}; \dots)^\top.$$

Tehát egyetlen koordináta helyett lesz $(j-1)\cdot m$ új koordináta, de a fix 121 utolsó indexrészlet csak ebben a $(j-1)\cdot m$ darab koordinátában szerepel, máshol nem. Látható, hogy a (2.12)-ben leírt transzformáció során azonosan viselkedő, azaz együtt kezelendő, vektor koordináták $(j-1)\cdot m$ távolságra lesznek egymástól. Így adódik az $\underbrace{I\otimes\cdots\otimes I}_{j-1}$ mátrixszal való Kronecker-szorzás a (2.13) formulában. Ez ugyanis a (2.14)-beli mátrixelemeit $(j-1)\cdot m$ távolságra viszi egymástól. $\square$

2.11. Állítás. *Legyen $X_{\mathbf{n}}$ tömbértékű véletlen mező, ami teljesíti a (2.11) egyenlőséget. Feltesszük továbbá, hogy (2.3) is teljesül. Ekkor az $(X_{\mathbf{n}},\mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ folyamatra a következő egyenlőség teljesül:*

$$\operatorname{vec}\left[\mathbb{E}(X_{\mathbf{n+t}}|\mathcal{F}_{\mathbf{n}})\right] = (A_d(n_d+t_d,n_d)\otimes\cdots \otimes A_2(n_2+t_2,n_2)\otimes A_1(n_1+t_1,n_1))\cdot \operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}}), \tag{2.16}$$

ahol

$$A_j(n_j+t_j,n_j) = A_j^{(n_j+t_j)}\cdot A_j^{(n_j+t_j-1)}\cdots A_j^{(n_j+1)} \tag{2.17}$$

minden $n_j>m,\ j=1,\dots,d$ és $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$, $\mathbf{t}\in\mathbb{N}_0^d$ esetén.

A fentiekben és a következőkben $A_j(n_j,n_j)=I$, ahol I az egységmátrixot jelöli.

A 2.11. Állítás bizonyítása. Legyen $A_i=A_i(n_i+t_i,n_i), i=1,\dots,d$. Vegyük észre, hogy az $A_d\otimes\cdots\otimes A_2\otimes A_1$ szorzat felbontható d darab mátrix szorzatára a következőképpen

$$A_d\otimes\cdots\otimes A_2\otimes A_1 = (A_d\otimes I\otimes\cdots\otimes I)(I\otimes A_{d-1}\otimes\cdots\otimes I)\cdots(I\otimes I\otimes\cdots\otimes A_1).$$

Felhasználva a (2.3) egyenlőséget, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(X_{\mathbf{n+t}}\mid\mathcal{F}_{\mathbf{n}}\right) = \mathbb{E}\left(\dots\ \mathbb{E}\left(X_{\mathbf{n+t}}\mid\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)}\right)\ \dots\mid\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(d)}\right).$$

Továbbá a 2.10. Állítás alapján

$$\operatorname{vec}\left[\mathbb{E}\left(X_{\mathbf{n+t}}\mid\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(1)}\right)\right] = (I\otimes I\otimes\cdots\otimes A_1)\cdot\operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}}),$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{vec}\left[\mathbb{E}\left(X_{\mathbf{n}+\mathbf{t}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(d)}\right)\right] = (A_d \otimes I \otimes \cdots \otimes I) \cdot \operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}}),$$

amiből adódik az állítás.

□

Általánosítva a (2.16)-os tulajdonságot, a következő fogalmat kapjuk.

2.12. Definíció. *Egy tömbértékű* $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbf{d}}$, *folyamatot* A*-martingál mezőnek nevezünk, ha teljesülnek a következők:*

1. $X_{\mathbf{n}}$ $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$*-mérhető és integrálható minden* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$*-re,*
2. *a (2.16) egyenlőség teljesül minden* $\mathbf{n}, \mathbf{t} \in \mathbb{N}^d$*-re, ahol az* $A_j(n_j+t_j, n_j)$ *mátrixok kielégítik a (2.17)-et. (Minden vizsgált* $A_j^{(l_j)}$ $m \times m$ *típusú mátrix nem véletlen.)*

2.13. Megjegyzés. Jelölje $\Delta_{\mathbf{n}}$ az $X_{\mathbf{n}}$ A-martingál mező martingál differencia mezőjét. Ekkor

$$\Delta_{\mathbf{n}} = \sum (-1)^{\sum_{k=1}^{d} \varepsilon_k} \mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} | \mathcal{F}_{\mathbf{c}}), \tag{2.18}$$

ahol $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d, \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_d)$ és $c_k = \varepsilon_k \cdot (n_k - 1) + (1 - \varepsilon_k) \cdot n_k$, minden $k = 1, \ldots, d$ és $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$ esetén. Az összegzést minden $\varepsilon_k = 0$ vagy $\varepsilon_k = 1$ értékre kell elvégezni, ahol $k = 1, \ldots, d$. A (2.18) egyenlőségben a $\mathbb{E}\left(X_{\mathbf{n}} | \mathcal{F}_{\mathbf{c}}\right)$ és az $(X_{\mathbf{c}})$ értékeik egyenlők 0-val, ha $\mathbf{c} \in \mathbb{N}_0^d \setminus \mathbb{N}^d$.

Ha (2.2) teljesül, akkor $\Delta_{\mathbf{n}}$ martingál differencia, azaz $\Delta_{\mathbf{n}}$ $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$-mérhető és $\mathbb{E}(\Delta_{\mathbf{n}} | \mathcal{F}_{\mathbf{m}}) = 0$, ha $\mathbf{m} \leq \mathbf{n},\ \mathbf{m} \neq \mathbf{n}$.

Ha (2.3) teljesül, akkor a (2.16) miatt

$$\begin{aligned} \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{n}}) = \sum (-1)^{\sum_{k=1}^{d} \varepsilon_k} & \left[\left[\varepsilon_d A_d^{(n_d)} + (1 - \varepsilon_d) I\right] \otimes \cdots \right. \\ & \left. \otimes \left[\varepsilon_1 A_1^{(n_1)} + (1 - \varepsilon_1) I\right]\right] \operatorname{vec}\left(X_{\mathbf{c}}\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.14. Megjegyzés. Ha $\xi_{\mathbf{n}}$ autoregresszív martingál mező és $\mathbf{X}_{\mathbf{n}}$ a neki megfelelő A-martingál mező, akkor

$$\operatorname{vec}\left(\Delta_{\mathbf{n}}\right) = \begin{pmatrix} \mathit{0} \\ \delta_{\mathbf{n}} \end{pmatrix},$$

ahol $\delta_{\mathbf{n}} = \sum (-1)^{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k} \mathbb{E}(\xi_{\mathbf{n}} | \mathcal{F}_{\mathbf{c}})$ és $\mathit{0} \in \mathbb{N}_0^{m^d - 1}$.

2.15. ÁLLÍTÁS. *Legyen* $X_{\mathbf{n}}$ *A-martingál mező, mely teljesíti* (2.3)*-at. Ekkor* $\operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}})$ *előállítható a következő alakban:*

$$\begin{aligned}\operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}}) = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{k_d=1}^{n_d} A_d(n_d,k_d)\otimes\cdots \\ \otimes A_1(n_1,k_1)\cdot\operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}),\ \mathbf{k}\in\mathbb{N}^d,\ \mathbf{k}\le\mathbf{n},\end{aligned} \tag{2.20}$$

ahol $A_j(k_j,k_j) = I,\ j = 1,\dots,d.$

Bizonyítás. Rögzített $\mathbf{n}$ esetén tekintsük a

$$Z_{\mathbf{k}} = [A_d(n_d,k_d)\otimes\cdots\otimes A_1(n_1,k_1)]\operatorname{vec}(X_{\mathbf{k}}),\ \mathbf{k}\le\mathbf{n},$$

mennyiségeket. Ekkor $Z_{\mathbf{n}} = \operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}})$. Továbbá, (2.20) a $Z_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}\le\mathbf{n}$, differencia sorozatának az összegzését tartalmazza. □

Például a $d = 1$ és $d = 2$ speciális esetekben kapjuk Fazekas István modelljeit ([Faz87], [Faz88]).

Ha $d = 1$, akkor

$$X_n = \begin{pmatrix} \xi_{n-m+1} \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben

$$\mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \begin{pmatrix} \xi_{n-m+1} \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ a_1\cdot\xi_{n-1}+\ldots+a_m\cdot\xi_{n-m} \end{pmatrix} = A\cdot X_{n-1}$$

teljesül. Ezt a modellt Fazekas István tanulmányozta ([Faz87]).

Tekintsük most a $d = 2$ esetet. Legyen $\mathbf{n} = (n_1,n_2), \mathbf{t} = (t_1,t_2)$. Ekkor

$$X_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \xi_{n_1-m+1,n_2-m+1} & \cdots & \xi_{n_1-m+1,n_2} \\ \xi_{n_1-m+2,n_2-m+1} & \cdots & \xi_{n_1-m+2,n_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n_1,n_2-m+1} & \cdots & \xi_{n_1,n_2} \end{pmatrix}.$$

Felhasználva az $[A_2 \otimes A_1] \cdot \mathrm{vec}(X_{\mathbf{n}}) = \mathrm{vec}(A_1 \cdot X_{\mathbf{n}} \cdot A_2^\top)$ és az $A_2 \otimes A_1 = (A_2 \otimes \mathrm{I}) \cdot (\mathrm{I} \otimes A_1)$ összefüggéseket, valamint azt, hogy

$$\mathrm{vec}[\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}+\mathbf{t}} \,|\mathcal{F}_{\mathbf{n}})] = A_2(n_2+t_2, n_2) \otimes A_1(n_1+t_1, n_1) \cdot \mathrm{vec}(X_{\mathbf{n}}),$$

a következő modellt kapjuk:

$$\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}+\mathbf{t}} \,|\mathcal{F}_{\mathbf{n}}) = A_1(n_1+t_1, n_1) \cdot X_{\mathbf{n}} \cdot A_2^\top(n_2+t_2, n_2).$$

Ezáltal megkaptuk a [Faz88]-ban vizsgált egyenlőséget.

2.5. A-martingál mezők konvergenciája

Ebben a részben az A-martingál mezőkre vonatkozó konvergencia-tételeket bizonyítunk a következő feltételek mellett.

Tegyük fel, hogy

(2.21) $$A_j(i_j+t_j, i_j) \to A_j(\infty, i_j), \text{ ha } t_j \to \infty, \text{ minden } i_j, j \in \mathbb{N}$$

és a konvergencia „gyors” a következő értelemben:

(2.22) $$\|A_j(\infty, i_j) - A_j(i_j+t_j, i_j)\| \le c_{t_j}^{(j)}, \qquad \forall i_j, j \in \mathbb{N},$$

ahol $\displaystyle\sum_{t_j=1}^{\infty} c_{t_j}^{(j)} < \infty$ minden j-re.

Szükségünk lesz a következő normára.

Az $A = (a_{ij})$ mátrix normája legyen $\|A\| = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$.

Felhasználjuk a fenti norma következő tulajdonságait:

1) $$\|A \cdot B\|^2 = \sum_i \sum_k \left(\sum_j a_{ij} \cdot b_{jk} \right)^2 \le \sum_i \sum_k \left(\sum_j a_{ij}^2 \cdot \sum_j b_{jk}^2 \right) = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.$$

Speciálisan $\|A \cdot \mathbf{v}\| \le \|A\| \cdot \|\mathbf{v}\|$, minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén.

2) $\|A\| \ge 0$, $\|A\| = 0 \iff A \equiv 0$,

3) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$,

4) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^\top \cdot A)$.

Az A és B mátrixok Kronecker-szorzatának normája a következőképpen számolható:

$$\begin{aligned}\|A \otimes B\|^2 &= \operatorname{tr}\left[(A \otimes B)^\top (A \otimes B)\right] = \operatorname{tr}\left[(A^\top \otimes B^\top)(A \otimes B)\right] \\ &= \operatorname{tr}(A^\top A)\operatorname{tr}(B^\top B) = \|A\|^2 \|B\|^2.\end{aligned}$$

Az $A_j(\infty, k_j) = \lim\limits_{t_j \to \infty} A_j(k_j + t_j, k_j)$ határérték mátrixokról feltesszük, hogy létezik egy olyan pozitív C konstans úgy, hogy

$$\|[A_d(\infty, k_d) \otimes \cdots \otimes A_1(\infty, k_1)] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}})\| \ge C \| \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}})\|, \tag{2.23}$$

teljesül, minden $\mathbf{k}$-ra.

Továbbá tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned}&\left\| \sum_{\mathbf{k}_S \le \mathbf{n}_S} A_d(\infty, k_d) \otimes A_{d-1}(\infty, k_{d-1}) \otimes \cdots \otimes A_1(\infty, k_1) \cdot \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \right\| \\ &\qquad \ge C \cdot \left\| \sum_{\mathbf{k}_S \le \mathbf{n}_S} D_{k_d} \otimes D_{k_{d-1}} \otimes \cdots \otimes D_{k_1} \cdot \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \right\|,\end{aligned} \tag{2.24}$$

ahol $\mathbf{k}_S$ a $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ olyan koordinátáit tartalmazza, amelyek $S \subseteq \{1, \ldots, d\}$ elemei, továbbá $D_{k_l} = I$, ha $l \notin S$, illetve $D_{k_l} = A_l(\infty, k_l)$, ha $l \in S$.

Az $X_{\mathbf{n}}$ tanulmányozásához vezessük be az $Y_{\mathbf{n}}$ martingált. Ezt a martingált az $X_{\mathbf{n}}$ kísérő martingáljának nevezzük és a következő egyenlőséggel definiáljuk:

$$\operatorname{vec}(Y_{\mathbf{n}}) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{k_d=1}^{n_d} A_d(\infty, k_d) \otimes \cdots \otimes A_2(\infty, k_2) \otimes A_1(\infty, k_1) \cdot \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}})$$

minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$-re. Tudjuk, hogy ha (2.2) teljesül, akkor $\Delta_{\mathbf{n}}$ martingál differencia. Ezért (2.2) fennállása esetén, $Y_{\mathbf{n}}$ martingál.

2.16. Lemma. *Tegyük fel, hogy* (2.3) *és* (2.21) *teljesül. Ha*

$$\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\varphi(\| \operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}})\|) < C < \infty,$$

ahol $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *egy nemcsökkenő konvex függvény, akkor a kísérő martingálra* $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\varphi(\| \operatorname{vec}(Y_{\mathbf{n}})\|) < C$ *szintén teljesül.*

Bizonyítás. Legyen

$$\operatorname{vec}(Y_{\mathbf{i}}^{\mathbf{t}}) = \sum_{k_1=1}^{i_1} \sum_{k_2=1}^{i_2} \cdots \sum_{k_d=1}^{i_d} [A_d(t_d, k_d) \otimes \cdots \otimes A_2(t_2, k_2) \otimes A_1(t_1, k_1)] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}),$$

ahol $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ rögzített, $\mathbf{t} \geq \mathbf{k}$, és $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)$. Mivel $\Delta_{\mathbf{k}}$ martingál differencia, ezért könnyen adódik, hogy

$$(Y_{\mathbf{i}}^{\mathbf{t}}, \mathcal{F}_{\mathbf{i}}), \quad \mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{t}$$

martingál. Mivel $\varphi(\|\operatorname{vec}(Y_{\mathbf{i}}^{\mathbf{t}})\|)$ valós szubmartingál, ezért a 2.15. Állítást alkalmazva

$$\mathbb{E}(\varphi(\|\operatorname{vec}(Y_{\mathbf{i}}^{\mathbf{t}})\|) \leq \mathbb{E}(\varphi(\|\operatorname{vec}(Y_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}})\|) = \mathbb{E}\varphi(\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{t}})\|) < C,$$

minden $\mathbf{i} \leq \mathbf{t}$ esetén. Másrészről $Y_{\mathbf{i}}^{\mathbf{t}} \to Y_{\mathbf{i}}$, ha $\mathbf{t} \to \infty$. Tehát a Fatou-lemma alapján $\mathbb{E}\varphi(\|\operatorname{vec}(Y_{\mathbf{i}})\|) < C$ teljesül minden $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d$ esetén. □

2.17. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ A-martingál mező teljesíti a* (2.3), (2.22), (2.23) *és* (2.24) *feltételeket. Ha*

$$\sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} \mathbb{E}\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{k}})\| \left[\log^+(\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{k}})\|)\right]^{d-1} < \infty, \tag{2.25}$$

akkor $X_{\mathbf{n}}$ konvergens m.m., ha $n_j \to \infty$ minden j esetén. Továbbá, ha $d \geq 2$, akkor $X_{\mathbf{n}}$ konvergens $\mathcal{L}_1$-ben, ha $n_j \to \infty$ minden j esetén.

Bizonyítás. Legyen $Y_{\mathbf{n}}$ az $X_{\mathbf{n}}$ kísérő martingálja.

$$\begin{aligned} \operatorname{vec}(Y_{\mathbf{n}}) &= \sum_{k_d=1}^{n_d} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} \underbrace{[A_d(\infty, k_d) \otimes \cdots \otimes A_1(\infty, k_1)] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}})}_{\Delta_{\mathbf{k}}^{(Y)}} \\ &= \sum_{k_d=1}^{n_d} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} \Delta_{\mathbf{k}}^{(Y)}, \end{aligned}$$

ahol $\Delta_{\mathbf{k}}^{(Y)}$ az $Y_{\mathbf{n}}$ martingál differenciája. A 2.16. Lemma miatt a (2.25) feltétel teljesül $Y_{\mathbf{n}}$-ra, nevezetesen

$$\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\|\operatorname{vec}(Y_{\mathbf{n}})\| \left[\log^+(\|\operatorname{vec}(Y_{\mathbf{n}})\|)\right]^{d-1} < \infty.$$

Először a majdnem mindenütti konvergenciát bizonyítjuk. A 2.6. Tétel miatt $Y_{\mathbf{n}} \to Y$ m.m., ha $\mathbf{n} \to \infty$. Megmutatjuk, hogy $X_{\mathbf{n}} \to Y$ m.m. Megjegyezzük, hogy $Y_{\mathbf{n}}$ egyenletesen konvergál, ha az $\mathbf{n}$ koordinátái közül legalább egy tart a végtelenbe. Ebből következik, hogy $\|\Delta_{\mathbf{n}}^{(Y)}\| < \varepsilon$, ha az $\mathbf{n}$ legalább egy koordinátája nagyobb, mint n_ε. Ezért $\|\Delta_{\mathbf{n}}^{(Y)}\|$ korlátos. A fentiekből (2.23) miatt, $\Delta_{\mathbf{k}} \to 0$ m.m. és $\{\Delta_{\mathbf{k}};\ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ korlátos. A 2.15. Állításból, valamint az $Y_{\mathbf{n}}$ definíciójából következik, hogy

$$\begin{aligned}
\Big\| \operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}}) - \operatorname{vec}(Y_{\mathbf{n}}) \Big\| &= \Bigg\| \sum_{k_d=1}^{n_d} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} [A_d(n_d,k_d) \otimes \cdots \otimes A_1(n_1,k_1)] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \\
&\quad - \sum_{k_d=1}^{n_d} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} [A_d(\infty,k_d) \otimes \cdots \otimes A_1(\infty,k_1)] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \Bigg\| \qquad (2.26) \\
&= \Bigg\| \sum_{G_1,\dots,G_d} \left(\sum_{k_d=1}^{n_d} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} [G_d \otimes \cdots \otimes G_1] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \right) \Bigg\|,
\end{aligned}$$

ahol $G_i = A_i(\infty, k_i)$ vagy $G_i = A_i(n_i,k_i) - A_i(\infty,k_i)$ és legalább egy G_i egyenlő a differenciával. (Tehát a $\sum_{G_1,\dots,G_d}$ összeg $2^d - 1$ tagot tartalmaz.)

Tekintsük az előbbi összeg egy speciális esetét, amikor az összeg csak egy differenciát tartalmaz. A (2.22) feltételből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| \sum_{k_d=1}^{n_d} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} \Big[\big(A_d(n_d,k_d) - A_d(\infty,k_d)\big) \otimes A_{d-1}(\infty,k_{d-1}) \otimes \cdots \\
&\qquad\qquad \otimes A_1(\infty,k_1) \Big] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \Bigg\| \\
&\le c \sum_{k_d=1}^{n_d} c^{(d)}_{\underbrace{n_d - k_d}_{l_d}} \Bigg\| \sum_{k_{d-1}=1}^{n_{d-1}} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} [I \otimes A_{d-1} \otimes \cdots \otimes A_1] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \Bigg\| \\
&= c \sum_{l_d=0}^{n_d-1} c^{(d)}_{l_d} \Bigg\| \sum_{k_{d-1}=1}^{n_{d-1}} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} [I \otimes A_{d-1} \otimes \cdots \otimes A_1] \operatorname{vec}(\Delta_{k_1,\dots,k_{d-1},(n_d-l_d)}) \Bigg\| \\
&= c \sum_{l_d=0}^{v} c^{(d)}_{l_d} \Bigg\| \sum_{k_{d-1}=1}^{n_{d-1}} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} [I \otimes A_{d-1} \otimes \cdots \otimes A_1] \operatorname{vec}(\Delta_{k_1,\dots,k_{d-1},(n_d-l_d)}) \Bigg\| \qquad (2.27) \\
&+ c \sum_{l_d=v+1}^{n_d-1} c^{(d)}_{l_d} \Bigg\| \sum_{k_{d-1}=1}^{n_{d-1}} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} [I \otimes A_{d-1} \otimes \cdots \otimes A_1] \operatorname{vec}(\Delta_{k_1,\dots,k_{d-1},(n_d-l_d)}) \Bigg\|, \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

ahol v egy alkalmasan rögzített egész szám.

Most tekintsük a kifejezés aszimptotikus viselkedését $n_d \to \infty$ esetén. Felhasználjuk, hogy

$$\sum_{k_{d-1}=1}^{n_{d-1}} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} [I \otimes A_{d-1} \otimes \cdots \otimes A_1] \operatorname{vec}(\Delta_{k_1,\ldots,k_{d-1},s}) \to 0 \tag{2.29}$$

egyenletesen, ha $s \to \infty$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ha v elegendően nagy, akkor a (2.22) feltétel miatt, $\sum_{l=v}^{n_d-1} c_l^{(d)} < \varepsilon$. Felhasználva a (2.29)-et, a (2.28) tagban lévő $\|\ldots\|$ kifejezés korlátos. Tehát a (2.28)-ban lévő kifejezés $c\varepsilon$-nál kisebb, ahol $c < \infty$. Ugyancsak a (2.29) alapján, a (2.27) kifejezés konvergál a nullához, ha $n_d \to \infty$.

Most bizonyítsuk be a (2.29)-et. A (2.24) feltétel miatt, a (2.29) kifejezés bal oldala kisebb, mint

$$\frac{1}{C}\left\| \sum_{k_{d-1}=1}^{n_{d-1}} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} [A_d(\infty,k_d) \otimes \cdots \otimes A_1(\infty,k_1)] \operatorname{vec}(\Delta_{k_1,\ldots,k_{d-1},s}) \right\|.$$

Tehát a fenti normában szereplő kifejezés $Y_{\mathbf{n}}$-nek egy differenciája, $\mathbf{n}$ utolsó koordinátája szerint, ezért $s \to \infty$ esetén nullához konvergál.

Most tekintsünk egy olyan tagot a (2.26)-ből, ami két differenciát tartalmaz:

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| \sum_{k_d=1}^{n_d} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} \{A_d(\infty,k_d) \otimes \cdots \otimes A_3(\infty,k_3) \otimes \\
&\otimes [A_2(n_2,k_2) - A_2(\infty,k_1)] \otimes [A_1(n_1,k_1) - A_1(\infty,k_1)]\} \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \Bigg\| \\
&\le c \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} c_{\underbrace{n_1-k_1}_{l_1}} c_{\underbrace{n_2-k_2}_{l_2}} \left\| \sum_{k_3=1}^{n_3} \cdots \sum_{k_d=1}^{n_d} [A_d \otimes \cdots \otimes A_3 \otimes I \otimes I] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \right\| \\
&= c \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \sum_{l_2=0}^{n_2-1} c_{l_1} c_{l_2} \cdot \\
&\cdot \underbrace{\left\| \sum_{k_3=1}^{n_3} \cdots \sum_{k_d=1}^{n_d} [A_d \otimes \cdots \otimes A_3 \otimes I \otimes I] \operatorname{vec}(\Delta_{(n_1-l_1),(n_2-l_2),k_3,\ldots,k_d}) \right\|}_{f_{n_1-l_1,n_2-l_2,n_3,\ldots,n_d}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c \sum_{l_1=0}^{v_1} \sum_{l_2=0}^{v_2} \underbrace{c_{l_1} c_{l_2}}_{\text{korlátos}} \underbrace{f_{n_1-l_1, n_2-l_2, n_3, \dots, n_d}}_{\to 0 \text{ ha } n_1, n_2 \to \infty} \\
&+ c \underbrace{\sum_{l_1=v_1}^{n_1-1} c_{l_1}}_{\leq \varepsilon_1} \underbrace{\sum_{l_2=0}^{n_2-1} c_{l_2}}_{\text{korlátos}} \underbrace{f_{n_1-l_1, n_2-l_2, n_3, \dots, n_d}}_{\text{korlátos}} \\
&+ c \underbrace{\sum_{l_2=v_2}^{n_2-1} c_{l_2}}_{\leq \varepsilon_2} \underbrace{\sum_{l_1=0}^{n_1-1} c_{l_1}}_{\text{korlátos}} \underbrace{f_{n_1-l_1, n_2-l_2, n_3, \dots, n_d}}_{\text{korlátos}} \to 0, \qquad \text{ha} \quad n_1, n_2 \to \infty.
\end{aligned}
$$

(A fentiekben az $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ tetszőlegesek és v_1, v_2-t válasszuk elegendően nagynak.)

A bizonyítás hasonlóan történik több differencia esetében is.

Végezetül, ha $d \geq 2$, a tétel feltételeiből következik az $X_{\mathbf{n}}$ egyenletes integrálhatósága, tehát $X_{\mathbf{n}}$ $\mathcal{L}_1$-ben is konvergál (lásd [Shi95], Lemma 3. 190 o.). □

A következő tétel bizonyításában felhasználjuk a Burkholder-egyenlőtlenség d-paraméterű változatát.

2.18. Lemma. *(Noszály, Tómács [NT00], Fazekas [Faz05])*
Legyen $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbb{R}^m$-beli értékeket felvevő martingál. Tegyük fel, hogy (2.2) teljesül. Legyen $p > 1$. Ekkor léteznek olyan csak m-től, p-től és d-től függő pozitív véges C és D konstansok, hogy

$$
C\mathbb{E}\left(\sum_{\mathbf{m}\leq\mathbf{n}} \|\Delta_{\mathbf{m}}\|^2\right)^{p/2} \leq \mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^p \leq D\mathbb{E}\left(\sum_{\mathbf{m}\leq\mathbf{n}} \|\Delta_{\mathbf{m}}\|^2\right)^{p/2}
$$

teljesül, minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén, ahol $\Delta_{\mathbf{k}}$ a martingál differencia, azaz $X_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} \Delta_{\mathbf{k}}$.

Itt $\|.\|$ az euklideszi normát jelöli.

Szükségünk lesz még Fazekas István következő tételére is.

2.19. TÉTEL. *([Faz83] Theorem 4.6., 163 o.) Legyen* $\{X_{\mathbf{m}}, \mathcal{F}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d\}$ *B-értékű martingál. B rendelkezzen a Radon-Nikodym tulajdonsággal vagy legyen* $X_{\mathbf{m}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\mathbf{m}})$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ *alakú, minden* $X \in L^r$ $(1 < r < \infty)$ *esetén. Tegyük fel, hogy*

$$\mathbb{E}\{X_{(\mathbf{m},\mathbf{n})}|\mathcal{F}_{(\mathbf{k},\infty)}\} = X_{(\mathbf{k},\mathbf{n})},$$

ha $\mathbf{k} \leq \mathbf{m}$, *ahol* $(\mathbf{m},\mathbf{n}), (\mathbf{k},\mathbf{n})$ *és* $\mathcal{F}_{(\mathbf{k},\infty)}$ *a 2.4. Tételben definiáltak. Ha* $\sup_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}|X_{\mathbf{m}}|^r < \infty$, *akkor* $\lim_{\mathbf{m}\to\infty} X_{\mathbf{m}}$ *létezik m.m. és* L^r*-ben is.*

2.20. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az* $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ *A-martingál mező teljesíti a* (2.3), (2.22) *és* (2.24) *feltételeket, valamint*

$$\|A_j(i_j, u_j)\| < K < \infty, \tag{2.30}$$

ha $i_j > u_j$, $j = 1, \ldots, d$. *Ha* $\sup\limits_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}})\|^\alpha < \infty$, *ahol* $\alpha > 1$, *akkor* $X_{\mathbf{n}}$ *konvergens* $\mathcal{L}_\alpha$*-ban,* $\mathbf{n} \to \infty$ *esetén.*

Bizonyítás. A 2.16. Lemma alapján $\sup\limits_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\|\operatorname{vec}(Y_{\mathbf{n}})\|^\alpha < \infty$, ezért a 2.19. Tétel miatt, $Y_{\mathbf{n}}$ konvergens $\mathcal{L}_\alpha$-ban, ha $\mathbf{n}$-nek valamely koordinátája tart a végtelenbe. A bizonyítás fő lépése a következő egyenlőtlenség sorozat:

$$W_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}} = \mathbb{E}\left\| \sum_{u_1=k_1}^{i_1} \sum_{u_2=k_2}^{i_2} \cdots \sum_{u_d=k_d}^{i_d} \Big[A_d(i_d, u_d) \otimes A_{d-1}(i_{d-1}, u_{d-1}) \otimes \cdots \otimes A_1(i_1, u_1)\Big] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{u}}) \right\|^\alpha \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \mathbb{E}\left(\sum_{u_1=k_1}^{i_1} \sum_{u_2=k_2}^{i_2} \cdots \sum_{u_d=k_d}^{i_d} \|\operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{u}})\|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq C_2 \mathbb{E}\left\| \sum_{u_1=k_1}^{i_1} \sum_{u_2=k_2}^{i_2} \cdots \sum_{u_d=k_d}^{i_d} \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{u}}) \right\|^\alpha \\
&\leq C_3 \mathbb{E}\left\| \sum_{u_1=k_1}^{i_1} \sum_{u_2=k_2}^{i_2} \cdots \sum_{u_d=k_d}^{i_d} \Big[A_d(\infty, u_d) \otimes A_{d-1}(\infty, u_{d-1}) \otimes \cdots \otimes A_1(\infty, u_1)\Big] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{u}}) \right\|^\alpha \\
&= C_3 \mathbb{E}\left\| \operatorname{vec}\Big[\sum (-1)^{\sum_{z=1}^d \varepsilon_z} Y_{\mathbf{c}}\Big] \right\|^\alpha,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

minden $i_j > k_j,\ j = 1, \dots, d$ esetén, ahol $\mathbf{c} = \varepsilon_z k_z + (1-\varepsilon_z) i_z,\ z = 1, \dots, d$. A legutolsó formulában az összegzést minden $\varepsilon_z = 0$ vagy $1,\ z = 1, \dots, d$ értékre kell elvégezni. A fenti egyenlőtlenségek a Burkholder-egyenlőtlenség következményei (2.18. Lemma). Az első egyenlőtlenségnél még alkalmaztuk a (2.30)-at is, a harmadikban pedig a (2.24)-et.

Következésképpen $W_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}} \to 0$, ha $\mathbf{k}$ és $\mathbf{i}$ legalább egy koordinátája tart a végtelenbe.

Legyen $Y_\infty = \lim_{\mathbf{k}\to\infty} Y_{\mathbf{k}}$. Megmutatjuk, hogy $X_{\mathbf{n}} \to Y_\infty$ $\mathcal{L}_\alpha$-ban. Ha $\mathbf{i} \geq \mathbf{k}$, akkor

$$\begin{aligned}\|X_{\mathbf{i}} - Y_\infty\|_{\mathcal{L}_\alpha} \leq \|Y_{\mathbf{k}} - Y_\infty\|_{\mathcal{L}_\alpha} & \\ + \Bigg\| \sum_{u_1=1}^{k_1} \sum_{u_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{u_d=1}^{k_d} \big[A_d(i_d, u_d) \otimes A_{d-1}(i_{d-1}, u_{d-1}) \otimes \cdots & \\ \otimes A_1(i_1, u_1) \big] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{u}}) - Y_{\mathbf{k}} \Bigg\|_{\mathcal{L}_\alpha} & \\ + \left\| \sum_{\mathbf{u} \leq \mathbf{i}, \mathbf{u} \not\leq \mathbf{k}} [A_d(i_d, u_d) \otimes A_{d-1}(i_{d-1}, u_{d-1}) \otimes \cdots \otimes A_1(i_1, u_1)] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{u}}) \right\|_{\mathcal{L}_\alpha} & .\end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az $Y_{\mathbf{k}} \to Y_\infty$ és (2.31) miatt $\mathbf{k}$-t tudjuk úgy rögzíteni, hogy a fenti kifejezés első és harmadik tagja ε-nál kisebb legyen. (2.22) miatt, ha $\mathbf{k}$ rögzített, a második tag nullához tart, ha $\mathbf{i} \to \infty$. □

2.6. Autoregresszív martingál mezők konvergenciája

2.21. TÉTEL. *Legyen $(\xi_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ homogén autoregresszív martingál mező és tegyük fel, hogy (2.3) teljesül. Továbbá tegyük még fel, hogy $a_m^{(j)} > 0$, minden $j = 1, \dots, d$ esetén és a $\{k : 1 \leq k \leq m, a_k^{(j)} > 0\}$ számok legnagyobb közös osztója 1.*

a) Ha $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{n}}| \left[\log^+ |\xi_{\mathbf{n}}|\right]^{d-1} < \infty$, akkor $\xi_{\mathbf{n}}$ konvergens m.m., ha $\mathbf{n} \to \infty$, továbbá ha $d \geq 2$, akkor ξ_n konvergens $\mathcal{L}_1$-ben is.

b) Legyen $\alpha > 1$. Ha $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{n}}|^\alpha < \infty$, akkor $\xi_{\mathbf{n}}$ konvergens $\mathcal{L}_\alpha$-ban (és m.m.), ha $\mathbf{n} \to \infty$.

Bizonyítás. A 2.4-es szakaszban meghatároztuk az $X_{\mathbf{n}}$ A-martingált, az $A_z^{(i_z)}$ mátrixokat és a $\xi_{\mathbf{n}}$-nek megfelelő $\Delta_{\mathbf{n}}$ martingál differenciát. A tétel feltételei miatt, $A_z = A_z^{(i_z)}$ egy irreducibilis, aperiodikus Markov-lánc ($z = 1, \ldots, d$) átmeneti mátrixa. Az $A_z(i_z + t_z, i_z) = (A_z)^{t_z}$ mátrix elemei exponenciális sebességgel konvergálnak az $A_z(\infty) = A_z(\infty, i_z) = (a_{kj})_{k,j=1}^m$ mátrix elemeihez, ha $t_z \to \infty$, ahol $a_{kj} = b_j$ $(k, j = 1, \ldots, m)$ a lánc stacionárius eloszlása (lásd [Sen81], 119 o.). A stacionaritás egyenletrendszere a következő: $\mathbf{b}^\top = \mathbf{b}^\top A$, ahol $A = A_z$, minden $z = 1, \ldots, d$ esetén. Részletesebben

$$(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$b_1 = a_m b_m, b_2 = b_1 + a_{m-1} b_m, \ldots, b_m = b_{m-1} + a_1 b_m.$$

Ebből következik, hogy

$$b_1 = a_m b_m,\ b_2 = (a_m + a_{m-1}) b_m,\ \ldots,$$

$$b_{m-1} = (a_m + \ldots + a_2) b_m,\ b_m = (a_m + \ldots + a_1) b_m.$$

Tehát $1 = b_1 + \ldots + b_m = (m a_m + (m-1) a_{m-1} + \ldots + a_1) b_m$, ahonnan

$$b_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^m i a_i},$$

és

$$b_j = \left(\sum_{l=0}^{j-1} a_{m-l} \right) b_m = \frac{\sum_{i=m-j+1}^m a_i}{\sum_{i=1}^m i a_i}, \quad j = 1, \ldots, m-1,$$

a Markov-lánc egyetlen stacionárius eloszlása. Tehát teljesülnek a (2.22), (2.23), (2.24) és (2.30) feltételek. A 2.17. és a 2.20. Tételből következik az állítás. □

3. fejezet

Központi határeloszlás-tételek keverő véletlen mezőkre

3.1. Bevezetés

A független valószínűségi változók sorozataira vonatkozó határérték-tételek függő esetre történő kiterjesztésével számos mű foglalkozott. A gyenge függőség közismert feltételei közül a keverési feltételek fontos szerepet játszanak. Ibragimov és Linnik 1971-ben ([IL71]) központi határeloszlás-tételt igazoltak olyan stacionárius sorozatokra, amelyek bizonyos α-keverő feltételeket teljesítenek. Az eredményüket Bolthausen ([Bol82]) és Guyon ([Guy95]) terjesztette ki α-keverő véletlen mezőkre. Guyon eredményeit Fezekas és Kukush vitte át „sűrűsödő-növekvő" sémára. Fazekas István ([Faz03]) korlátos, Fazekas-Kukush ([FK00]) az egyenletes integrálható esettel foglalkozott. Ezek a cikkek nem tartalmazzák az említett tételek részletes bizonyításait, hanem csak rövid vázlatot közölnek.

Ebben a fejezetben az említett tételek részletes bizonyítását közöljük. Az említett bizonyítás tanulsága az, hogy Ibragimov és Linnik ([IL71]), valamint Guyon ([Guy95]) eredeti gondolatmenete csak akkor alkalmazható, ha a véletlen mezőre teljesül egy bizonyos egyenletesen integrálhatósági feltétel. Guyon nem tette fel az egyenletesen integrálhatóságot, sőt nem is írta le a korlátos esettől az általános esethez vezető lépéseket. Ezért nem világos, hogy az eredménye teljesül-e az általános esetben is. Megjegyezzük, hogy Ibragimov és Linnik feltételezte a stacionaritást, tehát az ő bizonyításuk teljes.

A keverő véletlen folyamatok leírása gazdag irodalommal rendelkezik ([Ibr59], [Ros56], [Bra83]). 1994-ben Miller (lásd [Mil94]) ρ-keverő véletlen mezőket feltételezve bizonyít központi határeloszlás-tételeket. Bradley 2005-ben (lásd [Bra05]) a keverő feltételek egy áttekintését adja. Merlevéde, Peligrad és Utev (lásd [MPU06]) a határeloszlás-tételek elméletének újabb eredményeit foglalja össze.

Dedecker (lásd [Ded98]) egy általános központi határeloszlás-tételt bizonyít stacionárius véletlen mezőkre. Megmutatta, hogy bizonyos keverő feltételekből következnek az általános központi határeloszlás-tétel feltételei. Megjegyezzük, hogy a mi dolgozatunkban használt keverő feltételek nem hasonlíthatók össze a Dedecker által említettekkel (lásd [Ded98]). Továbbá Dedecker ([Ded98]) a stacionárius mezőt és a rögzített mintavételt tanulmányozta, amíg mi nem feltételeztük a stacionaritást, és a „sűrűsödő-növekvő" esetet tekintettük.

3.2. Jelölések és előzmények

Jelölje $\mathbb{R}^d$ a d-dimenziós teret ellátva az euklideszi normával ($\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$). Itt d rögzített pozitív egész. Az $\mathbb{R}^d$-ben használni fogjuk a maximum norma segítségével definiált távolságot is:

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \le i \le d} |x_i - y_i|,$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$. Két $\mathbb{R}^d$-beli halmaz maximum normához tartozó távolságát szintén ϱ-val jelöljük:

$$\varrho(A, B) = \inf\{\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \ \mathbf{x} \in A, \ \mathbf{y} \in B\}.$$

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Jelölje $\omega \in \Omega$ az elemi eseményeket. Az események halmaza vagy a valószínűségi változók halmaza által generált σ-algebrát jelölje $\sigma\{.\}$. Az η valószínűségi (vektor) változó L_p-normáját a következőképpen értelmezzük:

$$\|\eta\|_p = \{\mathbb{E}\|\eta\|^p\}^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

A megfigyelések sémája az alábbi. Legyenek $T_1, T_2, \dots,$ és T_∞ tartományok $\mathbb{R}^d$-ben. Tegyük fel, hogy $T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \dots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = T_\infty$, és T_i kompakt minden i-re, továbbá T_∞ Lebesgue-mértéke végtelen. Legyen

$\{\varepsilon(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in T_\infty\}$ egy véletlen mező. Az n-edik megfigyelés halmaz (minta) az $\varepsilon(\mathbf{x})$ mező $\mathbf{x_k} \in T_n$ pontokban felvett értékeiből áll, ahol $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n \subset \mathbb{Z}^d$. Az $\mathbf{x_k}$ pontok kiválasztása a következő. Osszuk fel $\mathbb{R}^d$-t az alábbi téglákra

$$\Delta_n(\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^{d} \Big(\frac{k_j}{N_{jn}}, \frac{k_j+1}{N_{jn}}\Big],$$

ahol $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ d-dimenziós egész koordinátájú pont, $\{N_{jn}\}$ pedig pozitív egészek növekvő, nem korlátos sorozata minden rögzített $j = 1, \ldots, d$-re. Az n-edik mintavételi helyeket, azaz az $\{\mathbf{x_k},\ \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n\}$, halmazt úgy kapjuk, hogy egy $\mathbf{x_k}$ pontot választunk minden nem üres $\Delta_n(\mathbf{k}) \cap T_n$ halmazból. Valójában minden $\mathbf{x_k} = \mathbf{x_k}^{(n)}$ függ n-től is. Azért, hogy elkerüljük a bonyolult jelöléseket, gyakran elhagyjuk az (n) felsőindexet. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{D}_n| = \infty$.

Ha a megfigyelések helyei egyre sűrűbbek és sűrűbbek lesznek a tartományok egy növekvő sorozata esetén, akkor ezt a sémát „sűrűsödő-növekvő" sémának nevezzük (lásd [Cre91] és [Lah96] a növekvő sémáról).

Definiáljuk a diszkrét paraméterű $Y_n(\mathbf{k})$ vektor mezőt a következő módon. Minden $n = 1, 2, \ldots,$ és minden $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$ esetén legyen

$$Y_n(\mathbf{k}) \text{ az } \varepsilon(\mathbf{x}_\mathbf{k}^{(n)}) \text{ Borel-mérhető függvénye.} \tag{3.1}$$

Emlékeztetünk az α-keverési együttható definíciójára. Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két σ-algebra $\mathcal{F}$-ben. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok α-keverési együtthatójának nevezzük az

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup\{|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)| \ :\ A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

értéket. Az $\{\varepsilon(\mathbf{x})\ :\ \mathbf{x} \in T_\infty\}$ mező α-keverési együtthatója pedig:

$$\alpha(r, u, v) = \sup\{\alpha(\mathcal{F}_{I_1}, \mathcal{F}_{I_2})\ :\ \varrho(I_1, I_2) \geq r,\ |I_1| \leq u,\ |I_2| \leq v\},$$

ahol a szuprémum a T_∞ minden I_1 és I_2 véges részhalmazára veendő, továbbá $\mathcal{F}_{I_i} = \sigma\{\varepsilon(\mathbf{x})\ :\ \mathbf{x} \in I_i\}$, $i = 1, 2$.

Azt mondjuk, hogy az $\{\varepsilon(\mathbf{x})\}$ véletlen mező α-keverő, ha a keverő együtthatók kielégítenek bizonyos feltételeket. Ezen feltételek mindegyike a mező gyenge függőségét jelenti, azaz azt, hogy $\alpha(r, u, v)$ kicsi, ha r nagy.

A tételeinkben felhasználjuk a következő feltételeket:

$$\int_0^\infty s^{d-1} \alpha^{\frac{\tau}{2+\tau}}(s, 1, 1) ds < \infty, \qquad \text{ha} \quad 0 < \tau < 1, \tag{3.2}$$

$$\int_0^\infty s^{d-1}\alpha(s,i,j)ds < \infty, \qquad \text{ha} \quad i+j \le 4, \tag{3.3}$$

$$\alpha(s,1,\infty) = \mathrm{o}(s^{-d}), \quad \text{ha} \quad s \to \infty, \tag{3.4}$$

$$\Lambda_n = \mathrm{O}(\lambda_n), \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \tag{3.5}$$

ahol

$$\Lambda_n = \max_{1\le j\le d} N_{jn}, \quad \lambda_n = \min_{1\le j\le d} N_{jn}. \tag{3.6}$$

A (3.2)-(3.4) általánosan használt keverési feltételek. Tulajdonképpen (3.4) azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty}\alpha(s_n,1,k_n)s_n^d = 0$, ha $s_n \to \infty$ és $k_n \to \infty$. A (3.5) feltétel pedig azért szükséges, hogy a vizsgált téglák ne torzuljanak túlságosan el.

Jelölje az $\alpha_n(r,i,j)$ az $Y_n(\mathbf{k})$ mező α-keverési együtthatóját. Mivel $\mathbf{x_k} \in \Delta_n(\mathbf{k})$ és $\mathbf{x_l} \in \Delta_n(\mathbf{l})$ (ahol $\mathbf{l} = (l_1,\dots,l_d)$), így azt kapjuk, hogy

$$\varrho(\mathbf{x_k},\mathbf{x_l}) \ge \max\left\{\frac{|k_1-l_1|-1}{N_{1n}},\dots,\frac{|k_d-l_d|-1}{N_{dn}}\right\} \ge \frac{\varrho(\mathbf{k},\mathbf{l})-1}{\Lambda_n} \tag{3.7}$$

és

$$\varrho(\mathbf{x_k},\mathbf{x_l}) \le \frac{\varrho(\mathbf{k},\mathbf{l})+1}{\lambda_n}, \tag{3.8}$$

ahol Λ_n és λ_n a (3.6) által definiált. Tehát az $Y_n(\mathbf{k})$ mező $\alpha_n(r,i,j)$ α-keverési együtthatói teljesítik a következő egyenlőtlenséget:

$$\alpha\Big(\frac{r+1}{\lambda_n},i,j\Big) \le \alpha_n(r,i,j) \le \alpha\Big(\frac{r-1}{\Lambda_n},i,j\Big), \quad r=1,2,\dots. \tag{3.9}$$

3.1. Lemma. *Minden $\gamma>0$ és i, j, n pozitív egész esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\sum_{r=1}^\infty r^{d-1}\alpha_n^\gamma(r,i,j) \le c\Big(1+\Lambda_n^d\int_0^\infty r^{d-1}\alpha^\gamma(r,i,j)dr\Big), \tag{3.10}$$

ahol a c konstans csak d-től függ.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty} r^{d-1}\alpha_n^{\gamma}(r,i,j) &\le c\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty} r^{d-1}\alpha^{\gamma}\big(\frac{r}{\Lambda_n},i,j\big)\Big)\\ &\le c\Big(1+\sum_{r=2}^{\infty}\int_{r-1}^{r} s^{d-1}\alpha^{\gamma}\big(\frac{s}{\Lambda_n},i,j\big)ds\Big)\\ &\le c\Big(1+\int_0^{\infty} s^{d-1}\alpha^{\gamma}\big(\frac{s}{\Lambda_n},i,j\big)ds\Big)\\ &\le c\Big(1+\Lambda_n^d\int_0^{\infty} s^{d-1}\alpha^{\gamma}(s,i,j)ds\Big),\end{aligned}$$

így a bizonyítás teljes. □

A következő kovariancia-egyenlőtlenségek alapvető szerepet játszanak a keverő mezők elméletében.

3.2. MEGJEGYZÉS. (*Davydov-egyenlőtlenség*, [Dou94], o. 9.)

$$|\operatorname{cov}(X,Y)| \le 8[\alpha(\sigma(X),\sigma(Y))]^{1/r}\|X\|_p\|Y\|_q, \tag{3.11}$$

minden $r,p,q\ge 1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ esetén. Abban a speciális esetben, amikor X és Y L_∞-beli akkor

$$|\operatorname{cov}(X,Y)| \le 4[\alpha(\sigma(X),\sigma(Y))]\|X\|_\infty\|Y\|_\infty. \tag{3.12}$$

A következő egyenlőtlenség a Rosenthal-egyenlőtlenség egy speciális esete. A bizonyítás megtalálható Doukhan könyvében ([Dou94]).

3.3. LEMMA. *Legyen $1<l\le 2$ és $\tau>0$, $Y_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$, centrált valószínűségi változó, melyre teljesül $\mathbb{E}|Y_{\mathbf{k}}|^{l+\tau}<\infty$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$ és legyen*

$$L(l,\tau,\mathcal{D})=\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}}\Big(\mathbb{E}|Y_{\mathbf{k}}|^{l+\tau}\Big)^{\frac{l}{l+\tau}},$$

ha $\mathcal{D}$ véges halmaz $\mathbb{Z}^d$-ben. Ezenkívül legyen

$$c_{1,1}^{(\tau)}=1+\sum_{s=1}^{\infty}s^{d-1}[\alpha_Y(s,1,1)]^{\frac{\tau}{2+\tau}},$$

ahol $\alpha_Y(s,1,1)$ *az* $\{Y_{\mathbf{k}}\}$ *mező* α*-keverő együtthatója, azaz*

$$\alpha_Y(s,1,1) = \sup\{\alpha(Y_{\mathbf{u}}, Y_{\mathbf{v}}) : \varrho(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq s\}.$$

Tegyük fel, hogy $c_{1,1}^{(\tau)} < \infty$*. Ekkor létezik olyan* c *konstans, hogy*

$$\mathbb{E}\left|\sum\nolimits_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} Y_{\mathbf{k}}\right|^l \leq c\cdot c_{1,1}^{(\tau)} L(l,\tau,\mathcal{D}), \tag{3.13}$$

teljesül $\mathbb{Z}^d$ *minden véges* $\mathcal{D}$ *részhalmaza esetén.*

Megjegyezzük, hogy a (3.13) Rosenthal-egyenlőtlenség bizonyítása az alábbi (3.14)-ből következik, alkalmazva az úgynevezett interpolációs lemmát. További részletek és a Rosenthal-egyenlőtlenség általános alakja megtalálható Fazekas, Kukush és Tómács cikkében ([FKT00]).

3.4. Megjegyzés. Használva a 3.3. Lemma jelöléseit, legyen $\tau > 0$, és tegyük fel, hogy $c_{1,1}^{(\tau)} < \infty$. Ekkor létezik olyan c konstans, hogy

$$\sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{D}} |\operatorname{cov}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{l}})| \leq c\cdot c_{1,1}^{(\tau)} L(2,\tau,\mathcal{D}) \tag{3.14}$$

teljesül $\mathbb{Z}^d$ minden véges $\mathcal{D}$ részhalmaza esetén.

Bizonyítás. A teljesség kedvéért belátjuk (3.14)-et. Felhasználva a (3.11) egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$\sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{D}} |\operatorname{cov}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{l}})| \leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} \|\xi_{\mathbf{k}}\|_2^2 + \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{D}\\ \mathbf{k}\neq\mathbf{l}}} 8[\alpha_\xi(\|\mathbf{k}-\mathbf{l}\|,1,1)]^{\frac{\tau}{2+\tau}} \|\xi_{\mathbf{k}}\|_{2+\tau} \|\xi_{\mathbf{l}}\|_{2+\tau}.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján a fenti kifejezés majorálható a következőkkel:

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} \|\xi_{\mathbf{k}}\|_{2+\tau}^2 + \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{D}\\ \mathbf{k}\neq\mathbf{l}}} 8[\alpha_\xi(\|\mathbf{k}-\mathbf{l}\|,1,1)]^{\frac{\tau}{2+\tau}} \|\xi_{\mathbf{k}}\|_{2+\tau}^2$$

$$\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} \|\xi_{\mathbf{k}}\|_{2+\tau}^2 + \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} c \sum_{s=1}^{\infty} s^{d-1} [\alpha_\xi(s,1,1)]^{\frac{\tau}{2+\tau}} \|\xi_{\mathbf{k}}\|_{2+\tau}^2.$$

Ebből adódik a (3.14). □

3.3. Aszimptotikus eredmények

Előljáróban a fő eredményünk által leírt szituációról a következőket jegyezzük meg. Egyrészt arra az esetre koncentrálunk, amikor $\varepsilon(\mathbf{x})$ és $\varepsilon(\mathbf{y})$ nem függetlenek, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ közel vannak egymáshoz, ezért a tételünk nem fedi le azon eseteket, amikor $Y_n(\mathbf{k})$-k függetlenek és azonos eloszlásúak. Másrészről, ha $\varepsilon(\mathbf{x})$ egy stacionárius mező folytonos kovariancia függvénnyel és pozitív szórással, akkor a kovariancia közel van egy rögzített pozitív számhoz egy kicsi hipertéglalapon belül. Emlékeztetőül, $\mathcal{D}_n$ véges halmazok sorozata $\mathbb{Z}^d$-ben, ahol $\lim_{n\to\infty}|\mathcal{D}_n| = \infty$ teljesül.

Ebben a részben valójában egy részletes bizonyítást adunk Fazekas és Kukush tételére ([FK00]). A bizonyítás pontos rögzítése azért fontos, mert a Guyon művében szereplő bizonyítás egy ugrást tartalmaz, amikor a korlátos esetre történő visszavezetéshez Ibragimov-Linnik művére hivatkozik. Azonban az Ibragimov-Linnik ([IL71])-beli tétel stacionárius esetre vonatkozik, gondolatmenete nem vihető át közvetlenül a nem stacionárius esetre. Ezért tette fel Fazekas és Kukush ([FK00]) az egyenletesen integrálhatóságot.

3.5. TÉTEL. *Legyen $\varepsilon(\mathbf{x})$ véletlen mező és legyen $Y_n(\mathbf{k})$ az $\varepsilon(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{(n)})$ Borel-mérhető függvénye, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. Legyen az $\{|Y_n(\mathbf{k})| : \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n, n = 1, 2, \dots\}$ család egyenletesen korlátos. Legyen $S_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k})$, $n = 1, 2, \dots$, valamint $\sigma_n^2 = \mathrm{var}(S_n)$. Tegyük fel, hogy (3.3), (3.4) és (3.5) teljesül. Továbbá tegyük fel, hogy*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^2}{\Lambda_n^d |\mathcal{D}_n|} > 0 \tag{3.15}$$

teljesül. Ekkor $\sigma_n^{-1} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, ha $n \to \infty$.

Bizonyítás. Feltesszük, hogy $Y_n(\mathbf{k})$-ek egyenletesen korlátos valószínűségi változók 1 korláttal, azaz $|Y_n(\mathbf{k})| \le 1$, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Válasszuk ki az $\{m_n\}$ pozitív egészek sorozatát úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(m_n, 1, \infty)|\mathcal{D}_n|^{\frac{1}{2}}\Lambda_n^{-\frac{d}{2}} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} m_n^{-d}|\mathcal{D}_n|^{\frac{1}{2}}\Lambda_n^{-\frac{d}{2}} = \infty. \tag{3.16}$$

Igazoljuk, hogy ez a választás lehetséges. E célból legyen $x_n = \alpha(n, 1, \infty)$, $y_n = n^{-d}$ és $z_n = |\mathcal{D}_n|^{\frac{1}{2}}\Lambda_n^{-\frac{d}{2}}$, a későbbi 3.7. Lemmában, ekkor a (3.4) szerint

$x_n/y_n \to 0$. Továbbá $z_n \to \infty$, mivel $|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^{-d} \geq c\mu(T_n) \to \infty$ ($\mu(T_n)$ a Lebesgue-mértéke T_n-nek).

Legyen

$$S_n(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n,\ \varrho(\mathbf{x_k},\mathbf{x_l})\leq m_n} Y_n(\mathbf{l}), \quad S_n^*(\mathbf{k}) = S_n - S_n(\mathbf{k})$$

minden $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$-re. Továbbá legyen

$$a_n = \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} \mathbb{E}\big(Y_n(\mathbf{l})S_n(\mathbf{l})\big), \quad \overline{S}_n = a_n^{-\frac{1}{2}} S_n, \quad \overline{S}_n(\mathbf{k}) = a_n^{-\frac{1}{2}} S_n(\mathbf{k}).$$

Ekkor

$$\sigma_n^2 = \operatorname{var}(S_n) = a_n + \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} \mathbb{E}\big(Y_n(\mathbf{l})S_n^*(\mathbf{l})\big).$$

Felhasználva a (3.12) egyenlőtlenséget és ugyanazt az érvelést, mint a 3.1. Lemmában kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|\sigma_n^2 - a_n| &= \Big| \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} \mathbb{E}\big(Y_n(\mathbf{l})S_n^*(\mathbf{l})\big)\Big| \\
&\leq \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n,\ \varrho(\mathbf{x_k},\mathbf{x_l})\geq m_n} \big|\operatorname{cov}\big(Y_n(\mathbf{k}),Y_n(\mathbf{l})\big)\big| \\
&\leq c|\mathcal{D}_n| \sum_{s=m_n\lambda_n-1}^{\infty} s^{d-1}\alpha\Big(\frac{s-1}{\Lambda_n},1,1\Big) \\
&\leq c|\mathcal{D}_n| \int_{m_n\lambda_n-2}^{\infty} s^{d-1}\alpha\Big(\frac{s-1}{\Lambda_n},1,1\Big)ds \\
&\leq c|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d \int_{\frac{m_n\lambda_n-3}{\Lambda_n}}^{\infty} s^{d-1}\alpha\big(s,1,1\big)ds \\
&\leq c|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d \,\mathrm{o}(1) \leq \sigma_n^2\,\mathrm{o}(1).
\end{aligned}$$

Az utolsó lépésekben (3.3)-at és (3.15)-öt használtuk. Így kapjuk azt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sigma_n^2} = 1. \tag{3.17}$$

Ezért elegendő bebizonyítani $\overline{S}_n$ aszimptotikus normalitását.

Mivel $\sup_n \mathbb{E}\overline{S}_n^2 < \infty$, ezért a Stein-lemma (lásd 3.8. Megjegyzés) miatt elegendő bizonyítani a következőt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big((it - \overline{S}_n)e^{it\overline{S}_n}\Big) = 0, \quad \text{minden} \quad t \in \mathbb{R} \text{ esetén.} \tag{3.18}$$

Tekintsük a következő felbontást:

$$(it - \overline{S}_n)e^{it\overline{S}_n} = A_1 - A_2 - A_3,$$

ahol

$$A_1 = ite^{it\overline{S}_n}\Big(1 - \frac{1}{a_n}\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{l})S_n(\mathbf{l})\Big),$$

$$A_2 = a_n^{-\frac{1}{2}} e^{it\overline{S}_n} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{l})\big(1 - it\overline{S}_n(\mathbf{l}) - e^{-it\overline{S}_n(\mathbf{l})}\big),$$

$$A_3 = a_n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{l})e^{it(\overline{S}_n - \overline{S}_n(\mathbf{l}))}.$$

Először bizonyítjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|A_1|^2 = 0$.

$$\mathbb{E}|A_1|^2 = t^2 a_n^{-2} \operatorname{var}\left(\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{l})S_n(\mathbf{l})\right)$$

$$= t^2 a_n^{-2} \sum_{\substack{\mathbf{j},\,\mathbf{j}',\,\mathbf{l},\,\mathbf{l}'\in\mathcal{D}_n \\ \varrho(\mathbf{x_j},\mathbf{x_l})\le m_n, \\ \varrho(\mathbf{x_{j'}},\mathbf{x_{l'}})\le m_n}} \operatorname{cov}\big(Y_n(\mathbf{j})Y_n(\mathbf{l}), Y_n(\mathbf{j}')Y_n(\mathbf{l}')\big). \tag{3.19}$$

Két esetet különböztetünk meg. Először tekintsük a

$$\varrho(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j'}}) = k \ge \frac{3m_n\Lambda_n}{\lambda_n}$$

esetet. Ekkor $\varrho(\{\mathbf{x_j}, \mathbf{x_l}\}, \{\mathbf{x_{j'}}, \mathbf{x_{l'}}\}) \ge k - 2m_n$. A kovariancia-egyenlőtlenség miatt (lásd (3.12)) kapjuk, hogy

$$\Big|\operatorname{cov}\big(Y_n(\mathbf{j})Y_n(\mathbf{l}), Y_n(\mathbf{j}')Y_n(\mathbf{l}')\big)\Big| \le 4\alpha(k - 2m_n, 2, 2),$$

mivel $|Y_n(\mathbf{l})| \le 1$ minden $\mathbf{l}$ és n esetén. Ekkor $\mathbf{j}$-t $|\mathcal{D}_n|$-féleképpen választhatjuk meg, és ezután $\mathbf{l}$-et legfeljebb $m_n^d\Lambda_n^d$-féleképpen, továbbá $\mathbf{j}'$ kiválasztása után $\mathbf{l}'$-t legfeljebb $m_n^d \Lambda_n^d$-féleképpen választhatjuk. Tehát a (3.19)-ben lévő kifejezés kisebb vagy egyenlő, mint

$$ct^2 a_n^{-2} |\mathcal{D}_n| m_n^{2d} \Lambda_n^{2d} \sup_{\mathbf{j} \in \mathcal{D}_n} \sum_{\{\mathbf{j}' \,:\, \varrho(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j'}}) = k \geq \frac{3m_n \Lambda_n}{\lambda_n}\}} \alpha(\varrho(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j'}}) - 2m_n, 2, 2)$$

$$\leq ct^2 a_n^{-2} |\mathcal{D}_n| m_n^{2d} \Lambda_n^{2d} \sum_{s=3m_n\Lambda_n - 1}^{\infty} s^{d-1} \alpha\Big(\frac{s-1}{\Lambda_n} - 2m_n, 2, 2\Big).$$

Az utolsó lépésben (3.7) és (3.8) egyenlőtlenségeket használtuk. A fenti kifejezést majoráljuk a következő integrállal:

$$\begin{aligned}
&ct^2 a_n^{-2} |\mathcal{D}_n| m_n^{2d} \Lambda_n^{2d} \int_{3m_n\Lambda_n - 2}^{\infty} s^{d-1} \alpha\Big(\frac{s-1}{\Lambda_n} - 2m_n, 2, 2\Big) ds \\
\leq &ct^2 a_n^{-2} |\mathcal{D}_n| m_n^{2d} \Lambda_n^{2d+1} \int_{m_n + \mathrm{o}(1)}^{\infty} (\Lambda_n(s + 2m_n) + 1)^{d-1} \alpha(s, 2, 2) ds \\
\leq &ct^2 a_n^{-2} |\mathcal{D}_n| m_n^{2d} \Lambda_n^{3d} \int_0^{\infty} s^{d-1} \alpha(s, 2, 2) ds.
\end{aligned}$$

Most a (3.15) és a (3.17) felhasználásával megmutathatjuk, hogy

$$a_n^{-1} \leq c |\mathcal{D}_n|^{-1} \Lambda_n^{-d}.$$

Tehát a fenti kifejezés majorálható a $c|\mathcal{D}_n|^{-1} m_n^{2d} \Lambda_n^d$ kifejezéssel, amely az m_n választása alapján nullához konvergál, ha $n \to \infty$ (lásd (3.16)).

Tekintsük most azt az esetet, amikor

$$\varrho(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j'}}) = k < \frac{3m_n \Lambda_n}{\lambda_n}.$$

Legyen

$$h = \inf\{\varrho(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j'}}), \varrho(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_l}), \varrho(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_{l'}})\},$$

ekkor a (3.12) kovariancia-egyenlőtlenség szerint

$$\big| \operatorname{cov}\big(Y_n(\mathbf{j}) Y_n(\mathbf{l}), Y_n(\mathbf{j}') Y_n(\mathbf{l}')\big) \big|$$

$$\leq \big|\mathbb{E}\big(Y_n(\mathbf{j}) Y_n(\mathbf{l}) Y_n(\mathbf{j}') Y_n(\mathbf{l}')\big)\big| + \big|\mathbb{E}\big(Y_n(\mathbf{j}) Y_n(\mathbf{l})\big)\big| \big|\mathbb{E}\big(Y_n(\mathbf{j}') Y_n(\mathbf{l}')\big)\big|$$

$$\leq 4\alpha(h, 1, 3) + 4\alpha(h, 1, 1) \leq 8\alpha(h, 1, 3),$$

mivel $|Y_n(\mathbf{l})| \leq 1$ minden $\mathbf{l}$ és n esetén. Tegyük fel, hogy $h = \varrho(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_l})$ (a másik két esetet hasonlóan tárgyalhatjuk). A választási lehetőségek száma $\mathbf{j}$-re $|\mathcal{D}_n|$, $\mathbf{j}'$-re legfeljebb $\Lambda_n^d\big(\frac{3m_n\Lambda_n}{\lambda_n}\big)^d$ és $\mathbf{l}'$-re legfeljebb $\Lambda_n^d m_n^d$. Tehát (3.19)-ben a kifejezés kisebb vagy egyenlő, mint

$$\begin{aligned}
&ct^2a_n^{-2}|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d\Big(\frac{3m_n\Lambda_n}{\lambda_n}\Big)^d\Lambda_n^d m_n^d \sum_{\{\mathbf{l}\,:\,\varrho(\mathbf{x_j},\mathbf{x_l})=h\leq m_n\}} \alpha(h,1,3)\\
\leq &ct^2a_n^{-2}|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^{3d}m_n^{2d}\lambda_n^{-d} \sum_{\{\mathbf{l}\,:\,\varrho(\mathbf{j},\mathbf{l})=k\leq\Lambda_n m_n+1\}} \alpha\Big(\frac{k-1}{\Lambda_n},1,3\Big)\\
\leq &ct^2a_n^{-2}|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^{2d}m_n^{2d}\Big(1+\sum_{k=1}^{\Lambda_n m_n+1} k^{d-1}\alpha\Big(\frac{k-1}{\Lambda_n},1,3\Big)\Big)\\
\leq &ct^2a_n^{-2}|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^{2d}m_n^{2d}\Big(1+\int_0^{\Lambda_n m_n+1} s^{d-1}\alpha\Big(\frac{s-1}{\Lambda_n},1,3\Big)ds\Big)\\
\leq &ct^2a_n^{-2}|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^{3d}m_n^{2d} \to 0, \quad n\to\infty,
\end{aligned}$$

mint ahogy már korábban megmutattuk. Ezért (3.19) mindkét komponense nullához konvergál, így $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|A_1|^2 = 0$.

Tekintsük most A_2-t. A Taylor-sorfejtést felhasználva kapjuk, hogy

$$|1 - it\overline{S}_n(\mathbf{l}) - e^{-it\overline{S}_n(\mathbf{l})}| \leq ct^2\overline{S}_n^2(\mathbf{l}),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|A_2| &\leq a_n^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n}\mathbb{E}\big|1-it\overline{S}_n(\mathbf{l})-e^{-it\overline{S}_n(\mathbf{l})}\big|\\
&\leq a_n^{-\frac{1}{2}}|\mathcal{D}_n|\sup_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n}\mathbb{E}\big(ct^2\overline{S}_n^2(\mathbf{l})\big)\\
&\leq ca_n^{-\frac{3}{2}}|\mathcal{D}_n|\sup_{\mathbf{l}}\sum_{\varrho(\mathbf{l},\mathbf{j})\leq\Lambda_n m_n,\ \varrho(\mathbf{l},\mathbf{j}')\leq\Lambda_n m_n}\big|\operatorname{cov}\big(Y_n(\mathbf{j}),Y_n(\mathbf{j}')\big)\big|\\
&\leq ca_n^{-\frac{3}{2}}|\mathcal{D}_n|m_n^d\Lambda_n^{2d}\to 0,
\end{aligned}$$

ha $n\to\infty$. Felhasználtuk az a_n és σ_n^2 közötti összefüggést, a (3.15)-öt és az m_n sorozat választását. A fenti számításoknál felhasználtuk a kovariancia-egyenlőtlenséget és bizonyos összegek integrállal való majorálását.

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}|A_2| = 0$.

Most igazoljuk, hogy teljesül $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}A_3 = 0$.

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}A_3| \le& a_n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} \left| \operatorname{cov}\left(Y_n(\mathbf{l}), e^{it(\overline{S}_n - \overline{S}_n(\mathbf{l}))}\right)\right| \\ \le& a_n^{-\frac{1}{2}} |\mathcal{D}_n| \alpha(m_n, 1, \infty) \le c|\Lambda_n|^{-\frac{d}{2}} |\mathcal{D}_n|^{\frac{1}{2}} \alpha(m_n, 1, \infty) \to 0,\end{aligned}$$

az m_n választása miatt.

Ezzel a (3.18) egyenlőtlenséget beláttuk, amely tételünket bizonyítja. □

3.6. Tétel. *Legyen* $\{\varepsilon(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in T_\infty\}$ *véletlen mező és legyen* $Y_n(\mathbf{k})$ *az* $\varepsilon(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{(n)})$ *Borel-mérhető függvénye,* $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. *Tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}Y_n(\mathbf{k}) = 0$ *minden* $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ *esetén. Legyen* $S_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k})$, $n = 1, 2, \ldots$, *valamint legyen* $\sigma_n^2 = \operatorname{var}(S_n)$. *Tegyük fel, hogy létezik olyan* $\tau > 0$, *hogy teljesül (3.2) és*

(3.20) $\{|Y_n(\mathbf{k})|^{2+\tau} \ : \ \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n, n = 1, 2, \ldots\}$ *egyenletesen integrálható.*

Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\Lambda_n^d |\mathcal{D}_n|} \sum\nolimits_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} |\operatorname{cov}(Y_n(\mathbf{k}), Y_n(\mathbf{l}))| < \infty. \tag{3.21}$$

Ha még a (3.3), (3.4), (3.5), és (3.15) feltételek is teljesülnek, akkor

$$\sigma_n^{-1} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

ha $n \to \infty$.

Bizonyítás. Először belátjuk a (3.21)-et. A (3.13) Rosenthal-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} |\operatorname{cov}(Y_n(\mathbf{k}), Y_n(\mathbf{l}))| \\ \le& c\cdot\Big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} [\alpha_n(s, 1, 1)]^{\frac{\tau}{2+\tau}} s^{d-1}\Big) \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} \left(\mathbb{E}|Y_{\mathbf{k}}|^{2+\tau}\right)^{\frac{2}{2+\tau}} .\end{aligned}$$

A 3.1. Lemma szerint ez a kifejezés majorálható a következő kifejezéssel:

$$c\cdot\Big(1 + \Lambda_n^d \int_0^\infty s^{d-1} \alpha^{\frac{\tau}{2+\tau}}(s, 1, 1) ds\Big)\times$$

$$\times|\mathcal{D}_n| \sup \Big\{ \|Y_n(\mathbf{k})\|_{2+\tau}^2 \ : \ \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n, n = 1, 2, \dots \Big\}.$$

Tehát, (3.20) és (3.2)-ből következik (3.21).

Megmutatjuk, hogy elegendő a tételt egyenletesen korlátos $\{Y_n(\mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n, n = 1, 2, \dots\}$ valószínűségi változókra bebizonyítani. Tehát a 3.5. Tételből következni fog az állítás. Ibragimov és Linnik (lásd [IL71]) gondolatát követjük. Legyen $L > 0$, a csonkított változókat jelölje (L) a felső indexben és a maradék tagokat $\breve{}(L)$ felső index jelöli: $X^{(L)} = X \cdot \mathrm{I}\{X \in [-L, L]\}$, $\breve{X}^{(L)} = X - X^{(L)}$. Legyen $Z_n = S_n/\sigma_n$ normalizált összeg,

$$Z_n^{(L)} = \frac{1}{\sigma_n} \sum\nolimits_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n} \left(Y_n^{(L)}(\mathbf{k}) - \mathbb{E} Y_n^{(L)}(\mathbf{k}) \right)$$

a csonkított valószínűségi változók normalizált összege, és

$$\breve{Z}_n^{(L)} = \frac{1}{\sigma_n} \sum\nolimits_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n} \left(\breve{Y}_n^{(L)}(\mathbf{k}) - \mathbb{E} \breve{Y}_n^{(L)}(\mathbf{k}) \right)$$

a maradék tagok normalizált összege. Ekkor

$$Z_n = Z_n^{(L)} + \breve{Z}_n^{(L)} \quad \text{és} \quad \mathbb{E} Z_n^2 = 1.$$

A Rosenthal-egyenlőtlenség, valamint a (3.10) és a (3.2) szerint,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\breve{Z}_n^{(L)})^2 &= \mathbb{E} \Big| \frac{1}{\sigma_n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n} \left(\breve{Y}_n^{(L)}(\mathbf{k}) - \mathbb{E} \breve{Y}_n^{(L)}(\mathbf{k}) \right) \Big|^2 \\ &\le c \frac{\Lambda_n^d |\mathcal{D}_n|}{\sigma_n^2} \sup_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n} \|\breve{Y}_n^{(L)}(\mathbf{k})\|_{2+\tau}^2 \to 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

midőn $L \to \infty$. Megjegyezzük, hogy ez a konvergencia egyenletes n-ben. Az utolsó lépesben kihasználtuk (3.15)-öt és (3.20)-at.

Legyen $\sigma_n^2(L) = \mathrm{var}\left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n} Y_n^{(L)}(\mathbf{k}) \right)$ a csonkított valószínűségi változók összegének a szórása. Tehát

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_n^2(L)}{\sigma_n^2} - 1 &= \mathbb{E}(Z_n^{(L)})^2 - \mathbb{E}(Z_n)^2 \\ &= \mathbb{E}(Z_n - \breve{Z}_n^{(L)})^2 - \mathbb{E}(Z_n)^2 = \mathbb{E}(\breve{Z}_n^{(L)})^2 - 2\mathbb{E}(Z_n \breve{Z}_n^{(L)}). \end{aligned}$$

Felhasználva (3.22)-t és a második tagnál a Cauchy-egyenlőtlenséget, a fenti kifejezés n-ben egyenletesen tart a nullához, amint $L \to \infty$. Ezért

$$\lim_{L \to \infty} \sup_{n \ge 1} \Big| \frac{\sigma_n^2(L)}{\sigma_n^2} - 1 \Big| = 0. \tag{3.23}$$

Tehát

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}e^{itZ_n} - e^{-t^2/2}\right| &\le \mathbb{E}\left|e^{it\breve{Z}_n^{(L)}} - 1\right| \\ &\quad + \left|\mathbb{E}e^{itZ_n^{(L)}} - e^{-\frac{\sigma_n^2(L)}{\sigma_n^2}\frac{t^2}{2}}\right| + \left|e^{-\frac{\sigma_n^2(L)}{\sigma_n^2}\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\end{aligned}$$

$$\le |t|\mathbb{E}|\breve{Z}_n^{(L)}| + \sup_{v\in[1-\delta_L, 1+\delta_L]} \left|\mathbb{E}e^{itvU_n} - e^{-\frac{(tv)^2}{2}}\right| + \frac{t^2}{2}\delta_L, \tag{3.24}$$

ahol $\delta_L = \sup\limits_{n\ge 1}\left|\dfrac{\sigma_n^2(L)}{\sigma_n^2} - 1\right|$ és $U_n = \dfrac{1}{\sigma_n(L)}\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n}\left(Y_n^{(L)}(\mathbf{k}) - \mathbb{E}Y_n^{(L)}(\mathbf{k})\right)$.

A (3.23) alapján, $\lim_{L\to\infty}\delta_L = 0$. Ha a tétel igaz korlátos valószínűségi változókra, akkor U_n aszimptotikusan standard normális eloszlású, ezért (3.24)-ből következik, hogy

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\mathbb{E}e^{itZ_n} - e^{-t^2/2}\right| \le |t|\sqrt{\sup_{n\ge1}\mathbb{E}(\breve{Z}_n^{(L)})^2} + \frac{t^2}{2}\delta_L.$$

Azonban (3.22)-őt felhasználva, az utolsó kifejezés 0-hoz konvergál, ha $L \to \infty$, ezért a tételünk igaz. □

A 3.5. Tétel bizonyításában felhasználtuk az m_n részsorozatok létezését. A teljesség kedvéért közöljük ezen részsorozatok létezésének bizonyítását.

3.7. LEMMA. *Legyenek $x_n \downarrow 0$, $y_n \downarrow 0$, $z_n \to \infty$ valós sorozatok úgy, hogy $y_n = n^{-d}$, ahol $d > 0$ és $x_n/y_n \to 0$. Ekkor létezik a pozitív egész számoknak egy olyan m_n sorozata, hogy $m_n \to \infty$, $x_{m_n}z_n \to 0$ és $y_{m_n}z_n \to \infty$.*

Bizonyítás. Mivel $\tau_n = x_n/y_n \to 0$, ezért található pozitív számoknak egy olyan u_k nemkorlátos, növekvő sorozata, hogy

$$\tau_n \le k^{-2}, \quad \text{ha} \quad n \ge u_k^{1/d}. \tag{3.25}$$

Mivel $z_n \to \infty$, található pozitív egész számoknak egy olyan $\{n(k)\}$ nemkorlátos, növekvő sorozata, hogy

$$z_n \ge ku_k, \quad \text{ha} \quad n \ge n(k).$$

Legyen

$$\alpha_m = \frac{1}{k}, \quad \text{ha} \quad n(k) \le m < n(k+1) \tag{3.26}$$

minden k pozitív egész szám esetén. Ezért $\alpha_m \to 0$ és minden pozitív egész k esetén

$$z_m \alpha_m \geq \frac{k u_k}{k} = u_k, \qquad \text{ha} \quad n(k) \leq m < n(k+1). \tag{3.27}$$

Legyen $m_n = \left[(z_n \alpha_n)^{1/d}\right] + 1$ minden n-re, ahol [.] az egész részt jelöli. Könnyen adódik, hogy $m_n \uparrow \infty$. (3.25), (3.26), (3.27) és m_n definíciója adja, hogy minden pozitív egész k-ra

$$\frac{\tau_{m_n}}{\alpha_n} \leq \frac{k^{-2}}{k^{-1}} = k^{-1}, \tag{3.28}$$

ha $n(k) \leq n < n(k+1)$. Tehát a τ_n és m_n definícióiból és a (3.28)-ből következik, hogy

$$x_{m_n} z_n = \tau_{m_n} y_{m_n} z_n \leq \tau_{m_n} (z_n \alpha_n)^{-1} z_n = \tau_{m_n} \alpha_n^{-1} \to 0,$$

ha $n \to \infty$. Továbbá, α_n definícióját felhasználva kapjuk, hogy

$$y_{m_n} z_n = \frac{z_n}{m_n^d} = \frac{z_n}{z_n \alpha_n} \left\{ \frac{(z_n \alpha_n)^{1/d}}{\left[(z_n \alpha_n)^{1/d}\right] + 1} \right\}^d \to \infty,$$

mivel $n \to \infty$. □

3.8. Megjegyzés. (*Stein-lemma*, lásd [Ste72], [Guy95])
Legyen $\{\nu_n\}$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett valószínűségek egy sorozata, amely kielégíti a

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_n(dx) < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (it - x) e^{itx} \nu_n(dx) = 0, \qquad \text{minden} \quad t \in \mathbb{R}$$

feltételeket. Ekkor $\nu_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, ha $n \to \infty$.

3.4. A tétel kiterjesztései

3.9. Következmény. *A 3.5. Tételben és a 3.6. Tételben a (3.15) feltétel helyett tegyük fel, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n^{-d} |\mathcal{D}_n|^{-1} \sigma_n^2 = \sigma^2$$

teljesül. Ekkor

$$(\Lambda_n^d|\mathcal{D}_n|)^{-\frac{1}{2}} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

ha $n \to \infty$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\sigma^2 > 0$. Ekkor teljesül (3.15) és ezért $\sigma_n^{-1} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Tehát

$$(\Lambda_n^d|\mathcal{D}_n|)^{-\frac{1}{2}} S_n = \left(\frac{\sigma_n^2}{\Lambda_n^d|\mathcal{D}_n|}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma_n^{-1} S_n \Rightarrow \sigma\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Másodszor, ha $\sigma^2 = 0$, akkor

$$\operatorname{var}\left[(\Lambda_n^d|\mathcal{D}_n|)^{-\frac{1}{2}} S_n\right] = (\Lambda_n^d|\mathcal{D}_n|)^{-1}\sigma_n^2 \to 0,$$

mivel $n \to \infty$. Tehát $(\Lambda_n^d|\mathcal{D}_n|)^{-\frac{1}{2}} S_n$ L^2-ben nullához konvergál, ezért ez a kifejezés eloszlásban konvergál egy degenerált normális eloszláshoz (formálisan $\mathcal{N}(0,0)$-hoz). □

Most tekintsük a 3.5. Tétel és 3.6. Tétel p-dimenziós kiterjesztéseit. A 3.10. Tétel lényegében [Faz03] Theorem 3.1.

3.10. Tétel. *Legyen* $\varepsilon(\mathbf{x})$ *véletlen mező és* $Y_n(\mathbf{k})$ p*-dimenziós véletlen vektor* $\varepsilon(\mathbf{x}_\mathbf{k}^{(n)})$ *egy Borel-mérhető függvénye,* $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. *Legyen* $\mathbb{E}Y_n(\mathbf{k}) = 0$ *és* $\|Y_n(\mathbf{k})\|$, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$, $n = 1,2,\ldots$ *egyenletesen korlátos. Legyen* $S_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k})$, $n = 1,2,\ldots$, $\Sigma_n = \operatorname{var}(S_n)$. *Tegyük fel, hogy teljesül (3.3), (3.4), (3.5) és létezik a*

$$\lim_{n\to\infty}(\Lambda_n^{-d}|\mathcal{D}_n|^{-1}\Sigma_n) = \Sigma$$

határérték. Ekkor $(\Lambda_n^d|\mathcal{D}_n|)^{-\frac{1}{2}} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,\Sigma)$, *ha* $n \to \infty$.

Bizonyítás. Ennek bizonyításához tekintsük az $\{a^\top Y_n(k)\}$ egydimenziós véletlen mezőt, ahol $a \in \mathbb{R}^p$ tetszőleges ($a^\top$ jelölje az a transzponáltját). Alkalmazzuk a 3.5. Tételt és a 3.9. Következményt. □

A 3.11. Tétel megegyezik a [FK00] Remark 4.3. megjegyzésével.

3.11. Tétel. *Legyen $\varepsilon(\mathbf{x})$ egy véletlen mező. Legyen $Y_n(\mathbf{k})$ egy centrált p-dimenziós véletlen vektor, amely $\varepsilon(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{(n)})$-mérhető minden $n = 1, 2, \dots,$ és minden $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$ esetén. Legyen $S_n = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k})$, $n = 1, 2, \dots,$ $\Sigma_n = \mathrm{var}(S_n)$. Tegyük fel, hogy teljesül (3.3), (3.4), (3.5) és létezik olyan $\tau > 0$, ami kielégíti (3.2)-t és*

$$\{\|Y_n(\mathbf{k})\|^{2+\tau} \ : \ \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n, n = 1, 2, \dots\} \qquad \textit{egyenletesen integrálható} \ .$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy

$$\liminf_{n \to \infty} \lambda_{\min}\big(\Lambda_n^{-d} |\mathcal{D}_n|^{-1} \Sigma_n\big) > 0.$$

Ekkor $\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, I_p)$, ha $n \to \infty$.

Itt $\lambda_{\min}(A)$ jelöli az A mátrix legkisebb sajátértékét, míg I_p egy $p \times p$ típusú egységmátrixot jelöl.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.6. Tételt az $\{a^\top Y_n(k)\}$ mezőre. $\square$

A fenti tétel számos más változata is igazolható. Például, az egyenletes integrálhatósági feltétel helyettesíthető egy erős stacionárius feltétellel és egy integrálhatósági feltétellel.

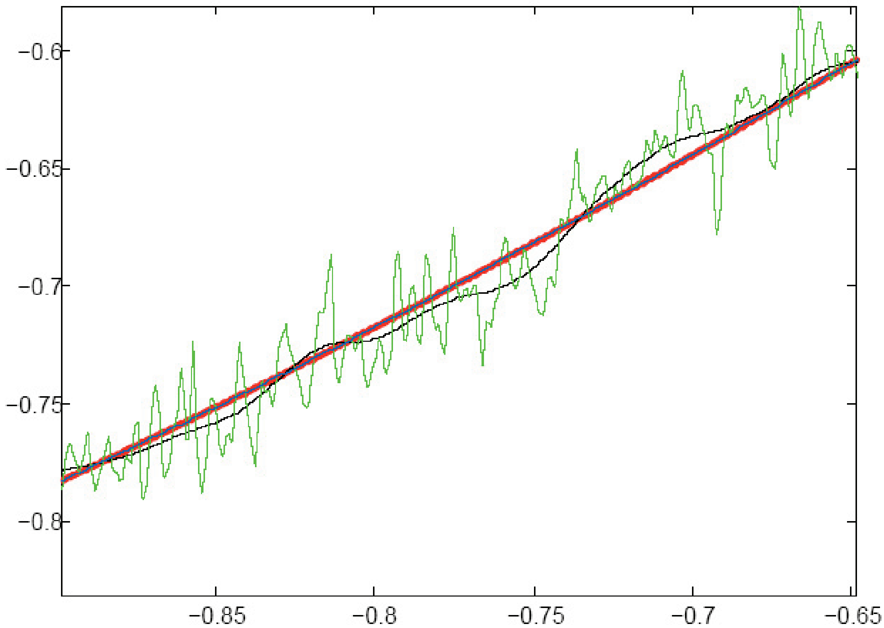
4. fejezet

A regressziós függvény becslésének határeloszlása véletlen mezőkre

4.1. Bevezetés

A magfüggvényes becsléseket széles körben tanulmányozza a szakirodalom. A sűrűségfüggvény magfüggvényes becsléséről Parzen ([Par62]) és Rosenblatt ([Ros56b]) ért el alapvető eredményeket. A regressziós függvény magfüggvényes becsléséről Nadaraya és Watson ([Nad64], [Wat64]) 1964-ben közölt eredményeit számos cikkben feldolgozták és általánosították. Ezeket az eredményeket többek között Rao ([Rao83]), Devroye és Győrfi ([DG85]), valamint Bosq ([Bos98]) foglalta össze. A magfüggvényes becslések egyik fontos tulajdonsága az aszimptotikus normalitás, melyet több cikkben is tanulmányoztak (lásd [Sch72], [Cai01]).

Tekintsük tehát a regressziós függvény magfüggvényes becslését. Független adatokra az elmélete jól kidolgozott, számos hivatkozást lehet rá találni például Wand és Jones könyvében (lásd [WJ95]). Világos, hogy meg kell engednünk, hogy a sávszélesség tartson nullához, ha a megfigyelési helyek száma tart a végtelenhez, azért hogy a torzítás eltűnjön és a becslés konzisztenssé váljon. Viszont, h-nak nem szükséges gyorsan csökkennie, különben a szórásnégyzet elszállna a végtelenbe. Például tekintsük a $\sin(x)$ közelítését különböző sávszélességek alkalmazásával ($h_1 = 0.009$ valamint $h_2 = 0.0009$). Látható, hogy „nagy” sávszélesség esetén a közelítés „sima”, míg „túl kicsi” sávszélesség esetén a közelítés „ugrál”.



4.1. ábra. A $\sin(x)$ (piros vonal) közelítése, $h_1 = 0.009$ (fekete vonal) és $h_2 = 0.0009$ (zöld vonal) sávszélességek esetén.

Független mintaelemek esetén az optimális h meghatározására nagyon sok mű született, mint például Wand és Jones könyve ([WJ95]), valamint Cao, Cuevas és Gonzáles-Manteiga cikke ([Cao94]). Ha az adataink függőek, a probléma sokkal összetettebb, és a szakirodalomban is sokkal kevesebb cikk található. A függőség erősségének leírásához gyakran valamilyen keverő feltételt használnak (lásd [HV90], [Kim97]). Folytonos esetben Sköld részletesen foglalkozik a sávszélesség meghatározásával (lásd [Sko01], [SkoC]).

Tekintsünk most egy $(X_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}}), \mathbf{t} \in T_\infty$, erősen stacionárius véletlen mezőt (T_∞ az $\mathbb{R}^d$ tér egy tartománya, $X_{\mathbf{t}}$ és $Y_{\mathbf{t}}$ valós értékű valószínűségi változók.) Célunk az $r(x) = \mathbb{E}\left(\Phi\left(Y_{\mathbf{t}}\right) | X_{\mathbf{t}} = x\right)$ regressziós függvény becslésének határeloszlásának meghatározása, ahol Φ ismert, korlátos és mérhető függvény. Legyen $(X_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}}), \mathbf{t} \in \mathcal{D}_n$ az adathalmazunk, ahol $\mathcal{D}_n$ jelöli a T_n rácspontjait és $T_n \subset \mathbb{R}^d$. Tekintsük a regressziós függvény magfüggvényes becslését

$$r_n(x) = \frac{\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n} \Phi(Y_\mathbf{t}) K\left(\frac{x - X_\mathbf{t}}{h}\right)}{\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n} K\left(\frac{x - X_\mathbf{t}}{h}\right)},$$

ahol K egy magfüggvény (lásd [Nad64], [Wat64]). Az általunk tekintett mintavételezési séma azonban eltér az általánosan használtaktól. A megfigyelésünk helyei egyre sűrűbbek lesznek a tartomány növekedésével. Ezt a jelenséget „sűrűsödő-növekvő” (infill-increasing) sémának nevezték el a szakirodalomban (lásd [LKC99], [Faz03]). Feltesszük, hogy a megfigyelt valószínűségi mező gyengén függő, pontosabban a valószínűségi mezőre teljesül az úgynevezett α-keverő feltétel. Fő eredményünk az $r_n(x)$ aszimptotikus normalitásának bizonyítása. Az eredmény külön érdekessége a szokatlan kovariancia-mátrix. Pontosabban szólva $(r_n(x_1), \ldots, r_n(x_m))$ vektor aszimptotikus kovariancia-mátrixa, egy diagonális mátrix és egy a feltételes kovarianciák integráljait tartalmazó mátrix összegéből áll (lásd 4.1. Tétel). Megjegyezzük, hogy az $(r_n(x_1), \ldots, r_n(x_m))$ együttes aszimptotikus normalitása független megfigyelések esetén jól ismert (lásd [Sch72]).

A „sűrűsödő-növekvő” eset lényegesen eltér a tisztán sűrűsödő esettől. A sűrűsödő tulajdonság azt jelenti, hogy a megfigyelések helyei egyre sűrűbbek egy rögzített tartományban (lásd [Cre91]). Gyengén függő mezők sűrűsödő megfigyelése esetén számos becslés nem lesz konzisztens (lásd [Lah96]). Továbbá, ebben az esetben nem várható a becslések aszimptotikus normalitása, mert hiányzik egy alkalmas centrális határeloszlás tétel.

A „sűrűsödő-növekvő” közelítés hasznos lehet a földtudományok, meteorológia, környezetvédelem, képfeldolgozás stb. területeken. Ezekben a tudományokban számos olyan folyamatot tanulmányoznak, amely térben vagy időben folytonosan változik. A gyakorlatban azonban nem tudjuk folytonosan megfigyelni a folyamatokat, ezért véges adathalmazokkal és diszkrét becslésekkel dolgozunk. Eredményeink hasznosak lehetnek a szimulációk során is. A statisztikai modellek elméleti elemzése gyakran igényel szimulációkat, a számítógépes szimulációkban pedig mindig diszkrét közelítéseket alkalmazunk.

A „sűrűsödő-növekvő” tulajdonságot tekinthetjük a folytonos és a diszkrét eset közötti átmenetként. Természetesen a fő kérdés az, hogy a folytonos modell határérték viselkedése megegyezik-e ennek diszkrét közelítésével. Folytonos esetben a becslések általában integrálokkal, diszkrét esetben pedig összeg segítségével definiáltak. Ha az integrálokat numerikusan számoljuk, akkor közelítő összegeket kell alkalmazni. Ha a folytonos modell esetén a tényleges numerikus számítások aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk, akkor nemcsak az integrálási tartomány növekszik, hanem a tartomány felosztása is egyre sűrűbb és sűrűbb. Ebben az esetben ellenőriznünk kell, hogy a határérték viselkedése megegyezik-e a növekvő tartomány esetével. Megmutatjuk, hogy csak speciális esetben egyezik meg a határértékek viselkedése, más esetekben lehetnek különbözőek.

A vizsgálataink motivációjaként meg kell említeni még a számos helyen alkalmazott mintavételi sémákat is. A mintavételezés történhet véletlen vagy determinisztikus időpontokban. A legtöbb létező eredmény a nem sűrűsödő esetre vonatkozik (lásd [Mas83], [BC93]). A [Bos98] könyvben a mintavételi séma fontossága bemutatásra kerül, de nem említ explicit eredményt regresszió esetén. A [Bos98] 140. oldalán a következő utalás szerepel: „A regressziós és sűrűség becslések egymáshoz hasonlóan viselkednek mintavételi sémák esetén”.

Valójában a sűrűségfüggvény magfüggvényes becslésére több eredmény ismert „sűrűsödő-növekvő” mintavételi sémákra. Megemlítjük az alábbi kapcsolódó publikációkat. Lahiri 2003-ban ([Lah03]) általános határeloszlástételt igazolt a „sűrűsödő-növekvő” sémára. Putter-Young 2001-ben (lásd [PY01]) a krigelést vizsgálta ebben az esetben. Zhu-Lahiri 2007-ben ([ZL07]) az empirikus eloszlásfüggvény becslését tekintette. Biau és Blanke-Pumo ([Bia04], [BP03]) az optimális mintavételezést tekintette magfüggvényes sűrűségfüggvény becslésre. Park-Kim-Park-Hwang 2008-ban ([PKP08]) gyakorlatban alkalmazható központi határeloszlás-tételeket igazolt „sűrűsödő-növekvő” sémára.

4.2. Jelölések és a fő eredmény

Az előző fejezetben bevezetett jelöléseket fogjuk itt is használni.

Továbbra is jelölje $|\mathcal{D}|$ egy $\mathcal{D}$ véges halmaz számosságát, valamint $|T|$ a T tartomány térfogatát (Lebesgue-mértékét) jelöli.

A megfigyelések az alábbi sémát követik.
Az egyszerűség kedvéért a d-dimenziós téglák legyenek a megfigyelési tartományok. Legyen $\Lambda > 0$ rögzített. Jelölje $\left(\frac{\mathbb{Z}}{\Lambda}\right)^d$ az $\mathbb{R}^d$-beli Λ-háló pontjait,

azaz a hálópontok távolsága $1/\Lambda$:

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{\Lambda}\right)^d = \left\{\left(\frac{k_1}{\Lambda}, \dots, \frac{k_d}{\Lambda}\right) : (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d\right\}.$$

Legyen T korlátos, zárt téglalap $\mathbb{R}^d$-ben, élei párhuzamosak a tengelyekkel. A T-beli Λ-rácspontokat jelölje $\mathcal{D}$, azaz $\mathcal{D} = T \cap (\mathbb{Z}/\Lambda)^d$. A határeloszlás leírásához tekintsük az előző objektumok egy sorozatát, azaz legyenek $T_1, T_2, \dots$ zárt, korlátos $\mathbb{R}^d$-beli téglák egy sorozata. Tegyük fel, hogy $T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \dots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = T_\infty$.

Feltesszük még, hogy T_n minden élének hossza egész és tart a ∞-hez, amint $n \to \infty$ (például $T_\infty = \mathbb{R}^d$ vagy $T_\infty = [0, \infty)^d$). Legyen $\{\Lambda_n\}$ a pozitív egész számok egy növekvő sorozata (a nem egész számok esetét lényegében azonos módon kezelhetjük) és a T_n-be eső Λ_n-rácspontok halmaza legyen $\mathcal{D}_n$.

Legyen $\{\xi_\mathbf{t} = (X_\mathbf{t}, Y_\mathbf{t}), \mathbf{t} \in T_\infty\}$ erősen stacionárius kétdimenziós véletlen mező. A megfigyelések n-edik halmaza az $(X_\mathbf{t}, Y_\mathbf{t})$ véletlen mező minden $\mathbf{t} \in \mathcal{D}_n$ pontban felvett értékeiből áll. Ezekből az adatokból egy becslést konstruálunk a regressziós függvényre. Valójában, minden $\mathbf{t} = \mathbf{t}^{(n)}$ függ n-től de, hogy elkerüljük a bonyolult jelöléseket, elhagyjuk az (n) felső indexet. Feltesszük, hogy $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{D}_n| = \infty$.

Ezen megfigyelések helyei egyre sűrűbbek és sűrűbbek lesznek a tartományok egy növekvő sorozata esetén, ezért ezt a sémát „sűrűsödő-növekvő" sémának nevezzük (lásd [Cre91] és [Lah96] a növekvő sémáról).

Használni fogjuk az előző fejezetben bevezetett α-keverési együtthatót is. A könnyebb olvashatóság érdekében itt megismételjük a definíciót: legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ σ-algebrák $\mathcal{F}$-ben. $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ α-keverési együtthatóját jelölje $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, azaz

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup\{|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)| \ : \ A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

A $\{\xi_\mathbf{t} \ : \ \mathbf{t} \in T_\infty\}$ mező α-keverési együtthatói pedig:

$$\alpha(r) = \sup\{\alpha(\mathcal{F}_{I_1}, \mathcal{F}_{I_2}) \ : \ \varrho(I_1, I_2) \geq r\},$$

ahol I_1 és I_2 a T_∞ véges részhalmazai, $\mathcal{F}_{I_i} = \sigma\{\xi_\mathbf{t} \ : \ \mathbf{t} \in I_i\}$, $i = 1, 2$.

Szükségünk lesz a következő feltételre: valamely $1 < a < \infty$ esetén

$$\int_0^\infty s^{2d-1} \alpha^{\frac{a-1}{a}}(s) ds < \infty. \tag{4.1}$$

A $K:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ függvényt magfüggvénynek nevezzük, ha K korlátos, folytonos, szimmetrikus sűrűségfüggvény (a Lebesgue-mértékre nézve), melyre

$$\lim_{|u|\to\infty}|u|K(u)=0,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}u^2K(u)du<\infty. \tag{4.2}$$

Legyen $g(x)$ az $X_{\mathbf{t}}$ (ismeretlen) perem-sűrűségfüggvénye. Feltételezzük, hogy $g(x)$ mindenütt pozitív. Legyen K magfüggvény és legyen $h_n>0$. Ekkor a $g(x)$ (Parzen-Rosenblatt-féle) magfüggvényes becslése

$$g_n(x)=\frac{1}{|\mathcal{D}_n|}\frac{1}{h_n}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{D}_n}K\left(\frac{x-X_{\mathbf{i}}}{h_n}\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Célunk az $r(x)=E\left(\Phi\left(Y_{\mathbf{t}}\right)|X_{\mathbf{t}}=x\right)$ regressziós függvény becslésének határeloszlásának a meghatározása, ahol Φ ismert, korlátos, mérhető függvény.

Tekintsük a regressziós függvény jól ismert magfüggvényes becslését

$$r_n(x)=\frac{\frac{1}{|\mathcal{D}_n|}\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}\Phi(Y_{\mathbf{t}})\frac{1}{h}K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)}{\frac{1}{|\mathcal{D}_n|}\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}\frac{1}{h}K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)}=\frac{\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}\Phi(Y_{\mathbf{t}})K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)}{\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)},$$

ahol K egy ismert magfüggvény, $h=h_n>0$.

Legyen

$$a(x)=\mathbb{E}\left(\Phi^2(Y_{\mathbf{t}})|X_{\mathbf{t}}=x\right).$$

$\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}$ jelölje az $\mathbb{R}^d\setminus\{\mathbf{0}\}$ halmazt. Legyen $g_{\mathbf{u}}(x,y)$ az $X_{\mathbf{0}}$ és $X_{\mathbf{u}}$ együttes sűrűségfüggvénye, ha $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}$ és $x,y\in\mathbb{R}$ és

$$a_{\mathbf{u}}(x,y)=\mathbb{E}\big\{[\Phi(Y_{\mathbf{0}})-r(X_{\mathbf{0}})]\,[\Phi(Y_{\mathbf{u}})-r(X_{\mathbf{u}})]\,\big|X_{\mathbf{0}}=x,X_{\mathbf{u}}=y\big\}.$$

Feltesszük, hogy minden rögzített $\mathbf{u}$ esetén

(4.3) $a_{\mathbf{u}}(.,.),g_{\mathbf{u}}(.,.),a(.),r(.),g(.),r'(.),g'(.),r''(.),g''(.)$ korlátos és folytonos

függvények. Továbbá feltesszük, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Lambda_n^d h_n}=L<\infty,\ \lim_{n\to\infty}\Lambda_n=\infty \text{ és } \lim_{n\to\infty}h_n=0, \tag{4.4}$$

valamint

$$\lim_{n\to\infty} |T_n| h_n^4 = 0. \tag{4.5}$$

Arra az esetre koncentrálunk, amikor $\xi_{\mathbf{t}}$ és $\xi_{\mathbf{s}}$ valószínűségi változók függőek, ha $\mathbf{t}$ és $\mathbf{s}$ közel vannak egymáshoz.

Először tekintsük a sűrűségfüggvény g_n becslésének aszimptotikus normalitását.

Legyen $l_{\mathbf{u}}(x,y) = g_{\mathbf{u}}(x,y) - g(x)g(y), \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}$ és $x, y \in \mathbb{R}$. Jelölje $l_{\mathbf{u}}$ az $l_{\mathbf{u}}(x,y)$ függvényt, mint $l : \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ leképezést, azaz egy olyan függvényt, mely a $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ térből veszi fel értékeit (itt $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ az $\mathbb{R}^2$-en értelmezett valós értékű folytonos függvények tere). Legyen

$$\|l_{\mathbf{u}}\| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |l_{\mathbf{u}}(x,y)| \tag{4.6}$$

az $l_{\mathbf{u}}$ normája. Legyenek $x_1, \dots, x_m$ különböző valós számok.
Legyen $\Sigma_l = \left(\int_{\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}} l_{\mathbf{u}}(x_i, x_j) d\mathbf{u}\right)_{1\le i,j\le m}$, legyen továbbá D' diagonális mátrix $Lg(x_i)\int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)du$, $i = 1, \dots, m$ diagonális elemekkel. Vezessük be a $\Sigma' = \Sigma_l + D'$ jelölést.

A. Tétel. *([FC06] Theorem 1.)*
Tegyük fel, hogy $l_{\mathbf{u}}$ (mint $\mathbf{u}$ változójú $l : \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ függvény) Riemann-integrálható minden korlátos zárt d-dimenziós $R \subset \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}$ téglán, továbbá $\|l_{\mathbf{u}}\|$ direkt Riemann-integrálható ($\|l\| : \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \to \mathbb{R}$ függvényként tekintve). Legyenek $x_1, \dots, x_m$ egymástól különböző valós számok és tegyük fel, hogy Σ' pozitív definit. Tegyük fel, hogy létezik $1 < a < \infty$, melyre teljesül (4.1) és

$$(h_n)^{-1} \le c|T_n|^{\frac{a^2}{(3a-1)(2a-1)}} \quad \textit{minden } n \textit{ esetén.} \tag{4.7}$$

Ha (4.4) és (4.5) fennáll, akkor

$$\sqrt{\frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d}}\{(g_n(x_i) - g(x_i)), i = 1, \dots, m\} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma'), \quad \textit{ha} \;\; n \to \infty. \tag{4.8}$$

Megjegyezzük, hogy Park-Kim-Park-Hwang egy hasonló jelenséget vizsgált ([PKP08]) egyszerűbb függőségi feltétel mellett (m-függőség), de általánosabb mintavételi sémában.

A direkt Riemann-integrálhatóság általunk használt fogalma megtalálható Fazekas és Chuprunov cikkében ([FC06]). Legyen $l : \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \to [0, \infty)$ adott függvény. Valamely $\delta > 0$ esetén, tekintsük az $\mathbb{R}^d$ tér felosztását (jobbról zárt, balról nyílt) δ élhosszúságú $\Delta_{\mathbf{i}}$ d-dimenziós kockákra úgy, hogy a $\Delta_{\mathbf{0}}$ középpontja az origóban legyen (azaz $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$-ben). A $\{\Delta_{\mathbf{i}}\}$ családot a δ-hoz tartozó felosztásnak nevezzük. Ha $\mathbf{i} \neq \mathbf{0}$ akkor $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{i}}$ esetén legyen

$$\bar{l}_\delta(\mathbf{x}) = \sup\{l(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \Delta_{\mathbf{i}}\}, \ \underline{l}_\delta(\mathbf{x}) = \inf\{l(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \Delta_{\mathbf{i}}\},$$

míg $\bar{l}_\delta(\mathbf{x}) = \underline{l}_\delta(\mathbf{x}) = 0$, ha $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{0}}$. Ha

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{l}_\delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \underline{l}_\delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = I,$$

és ez a közös érték véges, akkor l-et direkt Riemann-integrálhatónak nevezzük (d.R.i.), és I-t az l direkt Riemann-integráljának.

Ha l d.R.i., akkor l az origó tetszőleges környezetén kívül korlátos. Továbbá, l majdnem mindenütt folytonos (a Lebesgue-mértékre nézve). Ezért l Riemann-integrálható minden olyan korlátos és zárt d-dimenziós téglán, ami nem tartalmazza az origót. Nevezzük zónának az $M = R_1 \backslash R_2$ alakú halmazokat, ahol R_1 zárt d-dimenziós tégla, míg R_2 ($\emptyset \neq R_2 \subset R_1$) egy nyílt d-dimenziós tégla úgy, hogy mind a kettő tartalmazza az origót. Belátható, hogy l Riemann-integrálható minden zónán.

Ha $l \geq 0$ d.R.i., akkor az $\int_{\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}} l(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ improprius integrál létezik és egyenlő l direkt Riemann-integráljával. A fenti állítás következménye az, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy M zóna úgy, hogy $\int_{\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \backslash M} l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \varepsilon$.

Végül megjegyezzük a következőt. Legyen $l \geq 0, l$ d.R.i. Legyen δ_n olyan pozitív számok sorozata, amely nullához konvergál és $\{\Delta^{(n)}_{\mathbf{i}}\}$ a δ_n-hez tartozó felosztás. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy M zóna úgy, hogy az $\int_{\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \backslash M} l(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ integrál minden Riemann közelítő összege (mely a fenti felosztáshoz tartozik, de amely nem tartalmazza a $|\Delta_{\mathbf{0}}| l(\mathbf{x}_{\mathbf{0}})$ kifejezést) kisebb, mint ε.

A Riemann-integrálhatóság definíciója Banach-terekbeni értékű függvényekre megtalálható Hille és Phillips könyvében ([HF57] 62 o.).

A fenti előzmények után kimondhatjuk a fő eredményünket.

Legyen $v(x) = a(x) - r^2(x)$. Rögzített m pozitív egész és rögzített, egymástól különböző $x_1, x_2, \ldots, x_m$ valós számok esetén vezessük be a következő jelöléseket.

$$\sigma(x_t, x_s) = \int_{\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}} a_{\mathbf{u}}(x_t, x_s) g_{\mathbf{u}}(x_t, x_s) d\mathbf{u}, \quad t, s = 1, \ldots, m, \tag{4.9}$$

$$\Sigma^{(m)} = \left(\frac{\sigma(x_t, x_s)}{g(x_t) g(x_s)} \right)_{1 \le t, s \le m}. \tag{4.10}$$

Feltesszük, hogy

$$\lim_{|z| \to \infty} z^3 |K(z)| = 0 \tag{4.11}$$

teljesül.

4.1. TÉTEL. *Legyen* $(X_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}})$, $\mathbf{t} \in T_\infty$, *erősen stacionárius kétdimenziós véletlen mező,* $r(x) = \mathbb{E}(\Phi(Y_{\mathbf{t}}) | X_{\mathbf{t}} = x)$ *a regressziós függvény, ahol* Φ *korlátos, mérhető függvény és* K *egy magfüggvény. Tegyük fel, hogy az* A. *Tétel feltételei teljesülnek az* $l_{\mathbf{u}}$ *függvényre, továbbá legyen* Σ' *pozitív definit. Tegyük fel, hogy az* $X_{\mathbf{t}}$ *peremsűrűségfüggvénye pozitív, valamint* $a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}}$ *Riemann-integrálható (egy* $a \cdot g : \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ *függvényként tekintve) minden korlátos zárt d-dimenziós* $R \subset \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}$ *téglán. Továbbá,* $\|a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}}\|$ *direkt Riemann-integrálható (mint egy* $\|a \cdot g\| : \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \to \mathbb{R}$ *függvény), ahol a norma (4.6) szerint definiált. Tegyük fel továbbá, hogy létezik olyan* $1 < a < \infty$, *hogy* (4.1) *és* (4.7) *teljesül. Legyen* $\Sigma^{(m)} + D$ *mátrix pozitív definit, ahol* D *egy diagonális mátrix, melynek a diagonális elemei:* $Lv(x_i) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) dt / g(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. *Ha a fentieken felül még* (4.3), (4.4), (4.5) *és* (4.11) *teljesülnek, akkor*

$$\sqrt{\frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d}} \{ (r_n(x_i) - r(x_i)), i = 1, \ldots, m \} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad ha \quad n \to \infty,$$

ahol

$$\Sigma = \Sigma^{(m)} + D.$$

4.2. MEGJEGYZÉS. Megmutatjuk, hogy a 4.1. Tételbeli Σ aszimptotikus kovariancia-mátrix egy diszkrét és egy folytonos esetnek megfelelő aszimptotikus kovariancia-mátrix kombinációja. Schuster igazolta (lásd [Sch72]), hogy (független, azonos eloszlású megfigyelések esetén) $r_n(x_1), \ldots, r_n(x_m)$

aszimptotikusan normális diagonális kovariancia-mátrixszal. Pontosabban $\sqrt{nh_n}(r_n(x_i) - r(x_i)) \Rightarrow \mathcal{N}(0, c_i)$, ahol $c_i = v(x_i)\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt/g(x_i)$, ezért a 4.1. Tételben a D diagonális rész megfelel a diszkrét esetbeli határérték kovariancia-mátrixnak.

Számoljuk ki a $\sigma(x_t, x_s)$ elemeket. Jelöljük $f_{X_{\mathbf{0}},X_{\mathbf{u}},Y_{\mathbf{0}},Y_{\mathbf{u}}}(x_1, x_2, y_1, y_2)$-vel az $X_{\mathbf{0}}, X_{\mathbf{u}}, Y_{\mathbf{0}}, Y_{\mathbf{u}}, (\mathbf{u} \neq \mathbf{0})$ együttes sűrűségfüggvényét, ekkor

$$a_{\mathbf{u}}(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(y_1) - r(x_1)]\,[\Phi(y_2) - r(x_2)]\, f_{X_{\mathbf{0}},X_{\mathbf{u}},Y_{\mathbf{0}},Y_{\mathbf{u}}}(x_1, x_2, y_1, y_2)dy_1dy_2}{g_{\mathbf{u}}(x_1, x_2)}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M_{\mathbf{u}}(x_1, x_2, y_1, y_2)dy_1dy_2}{g_{\mathbf{u}}(x_1, x_2)}.$$

Tehát (a $d = 1$ esetet tekintve)

$$\sigma(x_t, x_s) = \int_{\mathbb{R}_{\mathbf{0}}} \left[\int_{\infty}^{-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M_{\mathbf{u}}(x_1, x_2, y_1, y_2)dy_1dy_2\right] d\mathbf{u}$$

adódik.

Az (X_t, Y_t), $t \in [0, T]$ folytonos idejű sztochasztikus folyamat (amely bizonyos α-keverő feltételeket teljesít) magfüggvényes becslését vizsgálta Cheze ([Che92]) és Bosq ([Bos98], 138 o.). Az $r(x) = \mathbb{E}(\Phi(Y_{\mathbf{t}})|X_{\mathbf{t}} = x)$ regressziós függvény becslése

$$\widetilde{r}_T(x) = \frac{\widetilde{\varphi}_T(x)}{\widetilde{g}_T(x)}, \tag{4.12}$$

ahol

$$\widetilde{\varphi}_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(Y_t)\frac{1}{h_T}K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right)dt,$$

$$\widetilde{g}_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{h_T}K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right)dt.$$

Bizonyos feltételek mellett, ha $T \to \infty$ és $h_T \to 0$, akkor $\widetilde{r}_T$ aszimptotikusan normális eloszlású. Pontosabban

$$\frac{\widetilde{r}_T(x) - r(x)}{\sqrt{d_T(x)}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

ahol

$$g^2(x)d_T(x) = (1, -r(x))\,\mathrm{var}\begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_T(x) \\ \widetilde{g}_T(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -r(x) \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a fenti kifejezést (néhány analitikus feltétel mellett), beláthatjuk, hogy $Td_T(x)$ határértéke $\sigma(x,x)/g^2(x)$. Tehát Cheze ([Che92]) és Bosq ([Bos98]) eredményét a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$\sqrt{T}\left(\widetilde{r}_T(x) - r(x)\right) \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma(x,x)/g^2(x)\right).$$

Tehát a $\Sigma^{(m)}$ mátrix diagonális elemei megfelelnek a folytonos modellbeni aszimptotikus szórások szakirodalomban közölt értékeinek. (Cheze ([Che92]) és Bosq ([Bos98]) nem tanulmányozták az $(\widetilde{r}_T(x_1), \ldots, \widetilde{r}_T(x_m))$ együttes aszimptotikus normalitását.)

4.3. Megjegyzés. Ha a (4.5) feltétel, azaz $\lim_{n\to\infty} |T_n| h_n^4 = 0$, nem teljesül, akkor a következőt tudjuk bizonyítani:

$$\sqrt{\frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d}}\{(r_n(x_i) - \widehat{r_n}(x_i)), i = 1, \ldots, m\} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

ahol

$$\widehat{r_n}(x) = \frac{\frac{1}{|\mathcal{D}_n|}\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n} r(X_\mathbf{t})\frac{1}{h}K\left(\frac{x - X_\mathbf{t}}{h}\right)}{g_n(x)},$$

és

$$g_n(x) = \frac{1}{|\mathcal{D}_n|}\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n} \frac{1}{h}K\left(\frac{x - X_\mathbf{t}}{h}\right) \to g(x)$$

valószínűségben. Ez a 4.1. Tétel bizonyításának következménye.

4.4. Megjegyzés. Bosq a mintavételezés problémáját szintén vizsgálta ([Bos97], illetve [Bos98], 140 o.), azaz a (4.12)-ben szereplő $\widetilde{r}_T$ azon közelítésének a viselkedését, amelyet akkor kapunk, amikor $\widetilde{r}_T$-ot helyettesítjük a folyamat $\delta_n, 2\delta_n, \ldots, n\delta_n$ időpillanatokbani megfigyeléseit tartalmazó megfelelő diszkrét kifejezéssel. Azonban az aszimptotikus normalitást nem vizsgálták a fent említett művek egyikében sem.

4.3. A fő tétel bizonyítása

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a fő eredményt, szükségünk lesz a következő központi határeloszlás tételre és a Rosenthal-egyenlőtlenségre keverő mezők esetén.

Először definiáljuk az $Y_n(\mathbf{k})$ diszkrét paraméterű (vektor értékű) véletlen mezőt a következőképpen. Minden $n = 1, 2, \ldots,$ és minden $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(n)} \in \mathcal{D}_n$ esetén legyen

$$\text{Y}_n(\mathbf{k}) \text{ a } \xi_{\mathbf{k}^{(n)}} \text{ Borel-mérhető függvénye,} \tag{4.13}$$

ahol $\{\xi_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in T_\infty\}$ az alapul szolgáló véletlen mező.

B. TÉTEL. *([FC04] Theorem 2.1.)*
Legyen $\xi_{\mathbf{t}}$ véletlen mező és $Y_n(\mathbf{k}) = (Y_n^{(1)}(\mathbf{k}), \ldots, Y_n^{(m)}(\mathbf{k}))$ a (4.13)-ban definiált m-dimenziós véletlen mező és $S_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k}),\ n = 1, 2, \ldots.$ Tegyük fel, hogy $Y_n(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$ erősen stacionárius mező minden rögzített n esetén, valamint $\mathbb{E}Y_n(\mathbf{k}) = 0$. Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbi feltételek

$$\|Y_n(\mathbf{k})\| \le M_n, \tag{4.14}$$

melyben M_n csak n-től függ;

$$\sup_{n,\mathbf{k},t} \mathbb{E}(Y_n^{(t)}(\mathbf{k}))^2 < \infty; \tag{4.15}$$

a $G_n \subseteq T_n$ feltételt teljesítő G_n téglák tetszőleges növekvő és nemkorlátos sorozata esetén,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Lambda_n^d |\mathcal{G}_n|} \mathbb{E}\left[\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{G}_n} Y_n^{(t)}(\mathbf{k}) \cdot \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{G}_n} Y_n^{(s)}(\mathbf{l})\right] = \sigma_{ts}, \quad t, s = 1, \ldots, m, \tag{4.16}$$

ahol $\mathcal{G}_n = G_n \cap (\mathbb{Z}/\Lambda_n)^d$; a $\Sigma = (\sigma_{ts})_{t,s=1}^m$ mátrix pozitív definit; létezik $1 < a < \infty$ úgy, hogy (4.1) teljesül; és

$$M_n \le c|T_n|^{\frac{a^2}{(3a-1)(2a-1)}} \quad \textit{minden } n \textit{ esetén.} \tag{4.17}$$

Ekkor

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda_n^d |\mathcal{D}_n|}} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad \textit{ha} \quad n \to \infty. \tag{4.18}$$

A fő tétel bizonyításában felhasználjuk a Rosenthal-egyenlőtlenség előző fejezetben közölt alakját (3.3. Lemma).

A fő tétel bizonyításában többször használni fogjuk a következő tételt. Ez egy speciális esete a [Rao83] Theorem 2.1.1. állításának.

C. TÉTEL. *([Rao83] Theorem 2.1.1.)*
Legyen $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény úgy, hogy

$$|K(z)| \leq M, \quad z \in \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(z)| dz < \infty,$$

$$|z||K(z)| \to 0, \quad ha \quad |z| \to \infty.$$

Továbbá legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(z)| dz < \infty.$$

Definiáljuk a

$$g_n(x) = \frac{1}{h_n} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{z}{h_n}\right) g(x-z) dz$$

függvényt, ahol $0 < h_n \to 0$, ha $n \to \infty$. Ha g folytonos, akkor

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz, \tag{4.19}$$

és ha g egyenletesen folytonos, akkor (4.19)*-ben a konvergencia egyenletes.*

4.5. MEGJEGYZÉS. Gyakran felhasználjuk a következő határérték tulajdonságokat (lásd [FC06]). Tegyük fel, hogy a g sűrűségfüggvény folytonos, K egy magfüggvény, ekkor $h_n \to 0 \ \ (h_n > 0)$ esetén a következők teljesülnek.

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{h_n} K\left(\frac{x - X_{\mathbf{t}}}{h_n}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h_n} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) g(u) du \to g(x), \tag{4.20}$$

$$\mathbb{E}\frac{1}{h_n} K^2\left(\frac{x - X_{\mathbf{t}}}{h_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h_n} K^2\left(\frac{x-u}{h_n}\right) g(u) du \to g(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)\, du, \tag{4.21}$$

$$
\begin{aligned}
(4.22)\qquad \mathbb{E}\frac{1}{h_n^2}K\left(\frac{x_r-X_{\mathbf{t}}}{h_n}\right)K\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{t}}}{h_n}\right)&\\
=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{h_n^2}K\left(\frac{x_r-u}{h_n}\right)K\left(\frac{x_s-u}{h_n}\right)g(u)du \to 0,&
\end{aligned}
$$

ha $x_r \neq x_s$.

A 4.1. Tétel bizonyítása. Tekintsük a következő átalakítást

$$
\sqrt{\frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d}}\,(r_n(x)-r(x)) = \sqrt{\frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d}}\,\frac{\frac{1}{|\mathcal{D}_n|}\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}[\Phi(Y_{\mathbf{t}})-r(x)]\,\frac{1}{h}K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)}{\frac{1}{|\mathcal{D}_n|}\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}\frac{1}{h}K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)}
$$

$$
=\frac{\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}}\frac{1}{h}\Big[\sum\limits_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}[\Phi(Y_{\mathbf{t}})-r(X_{\mathbf{t}})]\,K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)+\sum\limits_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}[r(X_{\mathbf{t}})-r(x)]\,K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)\Big]}{\frac{1}{|\mathcal{D}_n|}\sum\limits_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}\frac{1}{h}K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)}
$$

$$
=\frac{J_1(x)+J_2(x)}{J_3(x)},
$$

ahol

$$
J_1(x)=\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}}\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}\frac{1}{h}\,[\Phi(Y_{\mathbf{t}})-r(X_{\mathbf{t}})]\,K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right),
$$

$$
J_2(x)=\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}}\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}\frac{1}{h}\,[r(X_{\mathbf{t}})-r(x)]\,K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right),
$$

$$
J_3(x)=\frac{1}{|\mathcal{D}_n|}\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n}\frac{1}{h}K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right).
$$

Először J_1 aszimptotikus normalitását bizonyítjuk. Ellenőriznünk kell, hogy a B. Tétel feltételei teljesülnek.

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egymástól különböző valós számok. Be kell látnunk $J_1 = (J_1(x_1), J_1(x_2), \ldots, J_1(x_m))^\top$ együttes aszimptotikus normalitását. Definiáljuk $Z_n(\mathbf{i})$ m-dimenziós vektort a következő koordinátákkal:

$$
Z_n^{(s)}(\mathbf{i})=\frac{1}{h}\,[\Phi(Y_{\mathbf{i}})-r(X_{\mathbf{i}})]\,K\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{i}}}{h}\right),
$$

$s=1,\ldots,m$ és $\mathbf{i}\in\mathcal{D}_n$ esetén.

Osszuk fel T_n-t d-dimenziós egység kockákra (mindegyikben Λ_n^d számú $\mathcal{D}_n$-beli pont szerepel). Jelölje $\mathcal{D}_n'$ ezen kockák halmazát. Legyen

$$V_n(\mathbf{k}) = (V_n^{(1)}(\mathbf{k}), \dots, V_n^{(m)}(\mathbf{k}))$$

azon $Z_n(\mathbf{i})$ változók számtani átlaga, melynek az $\mathbf{i}$ indexei a $\mathbf{k}$-dik egységkockában vannak. Ekkor minden rögzített n esetén a $V_n(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n'$ mező erősen stacionárius. Alkalmazzuk a B. Tételt a $V_n(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n'$-re, azaz alkalmazzuk a tétel nem sűrűsödő alakját. Ekkor

$$J_1(x_s) = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}}\Lambda_n^d \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{D}_n'} V_n^{(s)}(\mathbf{i}) = \sqrt{\frac{\Lambda_n^d}{|\mathcal{D}_n|}} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{D}_n'} V_n^{(s)}(\mathbf{i}).$$

A $\mathbb{E}V_n(\mathbf{k}) = 0$, bizonyításához tekintsük az alábbi egyenlőséget

$$\mathbb{E}Z_n^{(s)}(\mathbf{i}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{h}\left[\Phi(Y_\mathbf{i}) - r(X_\mathbf{i})\right] K\left(\frac{x_s - X_\mathbf{i}}{h}\right)\right) = 0,$$

mert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\Phi(Y)K\left(\frac{x-X}{h}\right)\right) &= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}\left\{\Phi(Y)|X\right\}}_{r(X)} K\left(\frac{x-X}{h}\right)\Big] \\ &= \mathbb{E}\left(r(X)K\left(\frac{x-X}{h}\right)\right).\end{aligned}$$

Mivel Φ, r és K korlátosak, ezért a (4.7)-ből következik (4.14) és (4.17).

A (4.15) bebizonyításához tekintsük

$$\mathbb{E}\left(V_n^{(s)}(\mathbf{k})\right)^2 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\Lambda_n^d}\sum_{\mathbf{i}} \frac{1}{h}\left[\Phi(Y_\mathbf{i}) - r(X_\mathbf{i})\right] K\left(\frac{x_s - X_\mathbf{i}}{h}\right)\right)^2,$$

ahol $\sum_{\mathbf{i}}$ azt jelöli, hogy $\mathbf{i}$ a $\mathbf{k}$-adik egységkockához tartozik. E kifejezés korlátosságát hasonlóan ellenőrizhetjük, mint ahogyan a következő bizonyításban eljárunk (ahol megmutatjuk, hogy a (4.16) feltétel teljesül).

A (4.16)-ban a határérték kiszámításához legyen $\{G_n\}$ d-dimenziós téglák növekvő sorozata, ahol minden G_n d-dimenziós egységkockák uniója. Ekkor teljesül, hogy

$$\frac{1}{|G_n|}\mathbb{E}\left[\sum_{\mathbf{k}\in G_n\cap\mathbb{Z}^d} V_n^{(t)}(\mathbf{k}) \cdot \sum_{\mathbf{l}\in G_n\cap\mathbb{Z}^d} V_n^{(s)}(\mathbf{l})\right] = \frac{1}{\Lambda_n^d|\mathcal{G}_n|}\times$$

$$\times \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{G}_n}\frac{1}{h^2}\mathbb{E}\left[\left[\Phi(Y_{\mathbf{i}})-r(X_{\mathbf{i}})\right]K\left(\frac{x_t-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\left[\Phi(Y_{\mathbf{j}})-r(X_{\mathbf{j}})\right]K\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{j}}}{h}\right)\right],$$

$$= A+B,$$

ahol $\mathcal{G}_n = G_n \cap (\mathbb{Z}/\Lambda_n)^d$, és A jelöli az összeg $\mathbf{i}=\mathbf{j}$ feltételnek eleget tevő tagjait, míg B jelöli az $\mathbf{i}\neq\mathbf{j}$ esetet.

A-ra azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{1}{\Lambda_n^d|\mathcal{G}_n|}\frac{1}{h}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\left[\Phi(Y_{\mathbf{i}})-r(X_{\mathbf{i}})\right]^2K\left(\frac{x_t-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)K\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\right].$$

Ha $t=s$, akkor

$$A = \frac{1}{\Lambda_n^d|\mathcal{G}_n|}\frac{1}{h}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\left[\Phi(Y_{\mathbf{i}})-r(X_{\mathbf{i}})\right]^2K^2\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\right].$$

Tekintsük a következő felbontást

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\left[\Phi(Y_{\mathbf{i}})-r(X_{\mathbf{i}})\right]^2K^2\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\right]$$

$$=\underbrace{\mathbb{E}\left(\frac{1}{h}\Phi^2(Y_{\mathbf{i}})K^2\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\right)}_{*}-\underbrace{\mathbb{E}\left(\frac{1}{h}r^2(X_{\mathbf{i}})K^2\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\right)}_{**}.$$

Számítsuk ki * és ** tagokat egymás után:

$$* = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\frac{1}{h}\Phi^2(Y_{\mathbf{i}})\;K^2\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\middle|\,X_{\mathbf{i}}\right)\right] = \mathbb{E}\left(\frac{1}{h}K^2\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)a(X_{\mathbf{i}})\right),$$

ahol $a(x)=\mathbb{E}\left(\Phi^2(Y)|X=x\right)$. A (4.21) összefüggést felhasználva,

$$* = \int_{-\infty}^{\infty}a(u)\frac{1}{h}K^2\left(\frac{x_s-u}{h}\right)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty}a(x_s-ht)g(x_s-ht)K^2\left(t\right)dt$$

$$\to a(x_s)g(x_s)\int_{-\infty}^{\infty}K^2\left(t\right)dt, \quad \text{ha} \quad h\to 0,$$

teljesül, mivel a és g korlátos és folytonos, valamint K^2 integrálható.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$** = \mathbb{E}\left(\frac{1}{h}r^2(X_{\mathbf{i}})K^2\left(\frac{x_s - X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{h}r^2(u)K^2\left(\frac{x_s-u}{h}\right)g(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} r^2(x_s - ht)K^2(t)\,g(x_s - ht)dt \to r^2(x_s)g(x_s)\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\,dt, \quad \text{ha} \quad h \to 0,$$

mivel r és g korlátos és folytonos, valamint K^2 integrálható.

A (4.4)-et alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A \simeq & \frac{1}{\Lambda_n^d h_n}\frac{1}{|\mathcal{G}_n|}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_n}\left[a(x_s) - r^2(x_s)\right]g(x_s)\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)\,dt \\ \simeq & Lv(x_s)g(x_s)\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)\,dt, \end{aligned}$$

ahol $v(x_s) = a(x_s) - r^2(x_s)$.

Emlékeztetünk, hogy $v(x)$ a $\Phi(Y)$ feltételes szórása, vagyis

$$\begin{aligned} v(x) &= \mathbb{E}\left(\Phi^2(Y)|X=x\right) - \left[\mathbb{E}\left(\Phi(Y)|X=x\right)\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left\{\left[\Phi(Y) - \mathbb{E}\left(\Phi(Y)|X=x\right)\right]^2|X=x\right\}. \end{aligned}$$

Ha $t \neq s$, akkor

$$\begin{aligned} A =& \frac{1}{\Lambda_n^d}\frac{1}{h_n^2}\mathbb{E}\left(\left[\Phi(Y_{\mathbf{i}}) - r(X_{\mathbf{i}})\right]^2 K\left(\frac{x_t - X_{\mathbf{i}}}{h}\right)K\left(\frac{x_s - X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\right) \\ =& \frac{1}{\Lambda_n^d}\left[\mathbb{E}\left(\frac{1}{h^2}a(X_{\mathbf{i}})K\left(\frac{x_t - X_{\mathbf{i}}}{h}\right)K\left(\frac{x_s - X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\right)\right. \\ &\left. - \mathbb{E}\left(\frac{1}{h^2}r^2(X_{\mathbf{i}})K\left(\frac{x_t - X_{\mathbf{i}}}{h}\right)K\left(\frac{x_s - X_{\mathbf{i}}}{h}\right)\right)\right] = \frac{1}{\Lambda_n^d}(A_1 + A_2). \end{aligned}$$

Az $a(x)$, $r(x)$ korlátosságából és (4.22)-ből következik, hogy

$$|A_1|, |A_2| \le c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{h^2}K\left(\frac{x_t-u}{h}\right)K\left(\frac{x_s-u}{h}\right)g(u)du \to 0.$$

Tehát $t \neq s$ esetén $A \to 0$, mivel $\Lambda_n^d \to \infty$.

Tekintsük most a B kifejezést.

$$B = \frac{1}{\Lambda_n^d}\frac{1}{|\mathcal{G}_n|}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}}\mathbb{E}\left(a(X_{\mathbf{i}},X_{\mathbf{j}})\frac{1}{h^2}K\left(\frac{x_t-X_{\mathbf{i}}}{h}\right)K\left(\frac{x_s-X_{\mathbf{j}}}{h}\right)\right),$$

ahol

$$a(X_{\mathbf{i}},X_{\mathbf{j}}) = a_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(X_{\mathbf{i}},X_{\mathbf{j}}) = \mathbb{E}\left\{[\Phi(Y_{\mathbf{i}})-r(X_{\mathbf{i}})]\,[\Phi(Y_{\mathbf{j}})-r(X_{\mathbf{j}})]\,|X_{\mathbf{i}},X_{\mathbf{j}}\right\}.$$

Ekkor

$$B = \frac{1}{\Lambda_n^d}\frac{1}{|\mathcal{G}_n|}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}a_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(u,v)\frac{1}{h^2}K\left(\frac{x_t-u}{h}\right)K\left(\frac{x_s-v}{h}\right)g_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(u,v)dudv,$$

ahol $g_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(u,v)$ az $X_{\mathbf{i}}$ és $X_{\mathbf{j}}$ együttes sűrűségfüggvénye.

Feltehetjük, hogy a G_n tégla középpontja az origó, mivel a véletlen mező erősen stacionárius. Ekkor az $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ (ahol $\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{G}_n$) alakú vektorok halmaza $2\mathcal{G}_n$, ahol $2\mathcal{G}_n$-et úgy definiáljuk, mint $(2G_n)\cap(\mathbb{Z}/\Lambda_n)^d$. Ha $\mathbf{u}\in 2\mathcal{G}_n$ rögzített, akkor jelölje $|\mathcal{G}_{n,\mathbf{u}}|$ azon $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in\mathcal{G}_n\times\mathcal{G}_n$ párok számát melyekre $\mathbf{i}-\mathbf{j}=\mathbf{u}$. Ekkor

$$B = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{h^2}K\left(\frac{x_t-u}{h}\right)K\left(\frac{x_s-v}{h}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{\Lambda_n^d}\sum_{\mathbf{u}\in 2\mathcal{G}_n^{\mathbf{0}}}\frac{|\mathcal{G}_{n,\mathbf{u}}|}{|\mathcal{G}_n|}a_{\mathbf{u}}(u,v)g_{\mathbf{u}}(u,v)\right)\right\}dudv, \tag{4.23}$$

ahol $2\mathcal{G}_n^{\mathbf{0}} = 2\mathcal{G}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$. Rögzítsük az $\varepsilon>0$ értéket. Mivel $||a_{\mathbf{u}}g_{\mathbf{u}}||$ direkt Riemann-integrálható, ekkor találhatunk egy $M_\varepsilon\subset\mathbb{R}^d$ origó középpontú zónát úgy, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}\setminus M_\varepsilon}||a_{\mathbf{u}}g_{\mathbf{u}}||d\mathbf{u}\le\varepsilon, \tag{4.24}$$

ugyanakkor ezen integrál Riemann-féle közelítő összegei sem haladják meg ε-t, amennyiben a beosztás átmérője elég kicsiny.

Ezért, mivel $|\mathcal{G}_{n,\mathbf{u}}|/|\mathcal{G}_n|\le 1$, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\Lambda_n^d}\sum_{\mathbf{u}\in 2\mathcal{G}_n^{\mathbf{0}}\setminus M_\varepsilon}\frac{|\mathcal{G}_{n,\mathbf{u}}|}{|\mathcal{G}_n|}||a_{\mathbf{u}}g_{\mathbf{u}}||\le\varepsilon, \tag{4.25}$$

amikor $1/\Lambda_n^d$ elég kicsi, azaz ha $n \geq n_\varepsilon$. Rögzítsük ε-t és M_ε-t és tegyük fel, hogy $n \geq n_\varepsilon$. Mivel $a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}}$ Riemann-integrálható R-en (mint $a \cdot g : \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ függvény) tetszőleges korlátos és zárt d-dimenziós $\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d$-beli R tégla esetén, ezért

$$\left\| \frac{1}{\Lambda_n^d} \sum_{\mathbf{u} \in 2\mathcal{G}_n^{\mathbf{0}} \cap M_\varepsilon} a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}} - \int_{M_\varepsilon} a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}} d\mathbf{u} \right\| \leq \varepsilon \tag{4.26}$$

a $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ térben, ha n elég nagy. Ebből az összefüggésből és (4.24)-ből következik, hogy

$$\int_{\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d} a_{\mathbf{u}}(x,y) g_{\mathbf{u}}(x,y) d\mathbf{u}$$

létezik és folytonos (x, y)-ban. Mivel G_n minden éle tart a ∞-hez, $\frac{|\mathcal{G}_{n,\mathbf{u}}|}{|\mathcal{G}_n|} \to 1$ egyenletesen $\mathbf{u} \in M_\varepsilon$ szerint. Ezért, felhasználva, hogy $\|a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}}\|$ direkt Riemann-integrálható, azt kapjuk, hogy

$$\left\| \frac{1}{\Lambda_n^d} \sum_{\mathbf{u} \in 2\mathcal{G}_n^{\mathbf{0}} \cap M_\varepsilon} \frac{|\mathcal{G}_{n,\mathbf{u}}|}{|\mathcal{G}_n|} a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}} - \frac{1}{\Lambda_n^d} \sum_{\mathbf{u} \in 2\mathcal{G}_n^{\mathbf{0}} \cap M_\varepsilon} a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}} \right\| \leq \varepsilon, \tag{4.27}$$

ha n elég nagy.

A (4.24) - (4.27) -ből következik, hogy

$$\left\| \frac{1}{\Lambda_n^d} \sum_{\mathbf{u} \in 2\mathcal{G}_n^{\mathbf{0}}} \frac{|\mathcal{G}_{n,\mathbf{u}}|}{|\mathcal{G}_n|} a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}} - \int_{\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d} a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}} d\mathbf{u} \right\| \leq 4\varepsilon, \tag{4.28}$$

ha n elég nagy.

Ezért, felhasználva azt, hogy $\frac{1}{h} K\left(\frac{x_t - u}{h}\right)$ sűrűségfüggvény, kapjuk, hogy

$$\left| B - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{h^2} K\left(\frac{x_t - u}{h}\right) K\left(\frac{x_s - v}{h}\right) \int_{\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d} a_{\mathbf{u}}(u,v) g_{\mathbf{u}}(u,v) d\mathbf{u} \right\} du dv \right| \leq 4\varepsilon, \tag{4.29}$$

ha n elég nagy.

Mivel $\int_{\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d} a_{\mathbf{u}}(u,v) g_{\mathbf{u}}(u,v) d\mathbf{u}$ folytonos az (u, v) szerint, a (4.29) kifejezésben lévő kettős integrál határértéke $\int_{\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d} a_{\mathbf{u}}(x_t,x_s) g_{\mathbf{u}}(x_t,x_s) d\mathbf{u} = \sigma(x_t, x_s)$ (lásd C. Tétel). Ezért

$$B \to \int_{\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d} a_{\mathbf{u}}(x_t,x_s) g_{\mathbf{u}}(x_t,x_s) d\mathbf{u} = \sigma(x_t, x_s).$$

Tehát J_1 aszimptotikus kovariancia-mátrixa a következő

$$L \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt \cdot diag\left(v(x_t)g(x_t)\right) + \left(\sigma(x_t, x_s)\right)_{t,s=1}^{m}.$$

Most tekintsük a J_2 kifejezést.

$$J_2(x) = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}} \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n} \frac{1}{h}\left[r(X_{\mathbf{t}}) - r(x)\right] K\left(\frac{x - X_{\mathbf{t}}}{h}\right).$$

Alkalmazva a Taylor-sorfejtést ($r(u) = r(x) + r'(x)(u-x) + \frac{1}{2}r''(\widetilde{x})(u-x)^2$, valójában $\widetilde{x}$ függ u-tól, azaz $\widetilde{x} = \widetilde{x}(u)$), kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
E&\left(\frac{1}{h}\left[r(X_{\mathbf{t}}) \;-\; r(x)\right] K\left(\frac{x - X_{\mathbf{t}}}{h}\right)\right)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\left[r(u) - r(x)\right] K\left(\frac{x-u}{h}\right) g(u)du\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\left[r'(x)(u-x) + \frac{1}{2}r''(\widetilde{x})(u-x)^2\right] K\left(\frac{x-u}{h}\right) g(u)du\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\left[r'(x)z - \frac{1}{2}r''(\widetilde{x})z^2\right] K\left(\frac{z}{h}\right) g(x-z)dz\\
&= r'(x)h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\frac{z}{h}K\left(\frac{z}{h}\right) g(x-z)dz\\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}r''(\widetilde{x})z^2 K\left(\frac{z}{h}\right) g(x-z)dz = A_{11} + A_{12}.
\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy

$$|A_{11}|, |A_{12}| \le h^2 C. \tag{4.30}$$

Tekintsük először A_{11}-et. Vezessük be a $t = \frac{z}{h}$ helyettesítést, majd használjuk a $g(x-th) = g(x) + g'(\widetilde{x})(-th)$ Taylor-sorfejtést, a g' és r' korlátosságát és a K szimmetria tulajdonságát kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\frac{z}{h}K\left(\frac{z}{h}\right) g(x-z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} tK(t)g(x-th)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} tK(t)g(x)dt + \int_{-\infty}^{\infty} tK(t)g'(\widetilde{x})(-th)dt$$

$$= -\,hc\int_{-\infty}^{\infty} t^2K(t)dt.$$

Tehát $|A_{11}| \leq h^2 C$.

Felhasználva r'' korlátosságát, így $|A_{12}|$ esetén tekintsük a következő egyenlőtlenséget:

$$|A_{12}| \leq ch^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\left(\frac{z}{h}\right)^2 K\left(\frac{z}{h}\right) g(x-z)dz.$$

A (4.11) és a C. Tétel miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\left(\frac{z}{h}\right)^2 K\left(\frac{z}{h}\right) g(x-z)dz \to g(x)\int_{-\infty}^{\infty} z^2 K(z)dz,$$

ezért $|A_{12}| \leq h^2 C$, alkalmas C konstans esetén.

A (4.30) alapján $|\mathbb{E}(J_2(x))| \lesssim \sqrt{\frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d}} h^2 C = \sqrt{|T_n|} h^2 C$, ezért $\mathbb{E}(J_2(x)) \to 0$, mivel (4.5) alapján $|T_n| h_n^4 \to 0$.

Megmutatjuk, hogy $\mathbb{E}|J_2|^l \to 0$, valamely $1 < l < 2$.

Elegendő megmutatni, hogy $\mathbb{E}|J_2 - \mathbb{E}(J_2)|^l \to 0$, mivel

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|J_2|^l =& \mathbb{E}|J_2 - \mathbb{E}(J_2) + \mathbb{E}(J_2)|^l \\ =& \mathbb{E}|(J_2 - \mathbb{E}(J_2)) + (\mathbb{E}(J_2))|^l \leq c\left(\mathbb{E}|J_2 - \mathbb{E}(J_2)|^l + |\mathbb{E}(J_2)|^l\right)\end{aligned}$$

és $\mathbb{E}(J_2) \to 0$.

Ennek igazolására tekintsük a következő egyenlőtlenséget

$$\mathbb{E}|J_2 - \mathbb{E}(J_2)|^l = \left(\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}}\right)^l \left(\frac{1}{h}\right)^l \mathbb{E}\left|\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n} \eta_{\mathbf{t}} - \mathbb{E}\eta_{\mathbf{t}}\right|^l,$$

ahol $\eta_{\mathbf{t}} = (r(X_{\mathbf{t}}) - r(x))\, K\left(\frac{x - X_{\mathbf{t}}}{h}\right)$.

Most fogjuk össze $\eta_{\mathbf{t}}$-kat egy egység kockákba (jelöljük ezt a kockát $\mathcal{K}$-val) és alkalmazzuk ezekre a (3.13) Rosenthal-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

(4.31)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|J_2 - \mathbb{E}(J_2)|^l \leq& c\left(\frac{1}{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}\right)^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{h}\right)^l \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{D}_n'} \left(\mathbb{E}\left|\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{K}} \eta_{\mathbf{t}} - \mathbb{E}\eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon}\right)^{\frac{l}{l+\varepsilon}} \\ \leq& c\left(\frac{1}{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}\right)^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{h}\right)^l \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{D}_n'} \left(\mathbb{E}\left|\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{K}} \eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon}\right)^{\frac{l}{l+\varepsilon}},\end{aligned}$$

ahol $\varepsilon > 0$. (Alkalmaztuk az $\mathbb{E}|\eta - \mathbb{E}\eta|^k \le C\mathbb{E}|\eta|^k$, $k > 1$ egyenlőtlenséget.) (A (4.1) egyenlőtlenségből látható, hogy $c_{1,1}^{(\varepsilon)} < \infty$.) Alkalmazva a Jensen-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{K}} \eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon} = \Lambda_n^{d(l+\varepsilon)} \left|\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{K}} \frac{1}{\Lambda_n^d}\eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon} \le \Lambda_n^{d(l+\varepsilon)} \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{K}} \frac{1}{\Lambda_n^d} \left|\eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon},$$

amelyből következik, hogy

$$\mathbb{E}\left|\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{K}} \eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon} \le \Lambda_n^{d(l+\varepsilon)} \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{K}} \frac{1}{\Lambda_n^d} \mathbb{E}\left|\eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon} = \Lambda_n^{d(l+\varepsilon)} \mathbb{E}\left|\eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon}. \tag{4.32}$$

Tehát (4.31) és (4.32) szerint, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}|J_2 - \mathbb{E}(J_2)|^l \le c\left(\frac{1}{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}\right)^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{h}\right)^l \frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d} \Lambda_n^{d\cdot l} \left(\mathbb{E}\left|\eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon}\right)^{\frac{l}{l+\varepsilon}}. \tag{4.33}$$

Először számítsuk ki az $\mathbb{E}\left|\eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon}$ határértékét:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\eta_{\mathbf{t}}\right|^{l+\varepsilon} &= \mathbb{E}\left|r(X_{\mathbf{t}}) - r(x)\right|^{l+\varepsilon} K^{l+\varepsilon}\left(\frac{x - X_{\mathbf{t}}}{h}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\underbrace{r(u) - r(x)}_{r'(\widetilde{x})(x-u)}\Big|^{l+\varepsilon} K^{l+\varepsilon}\left(\frac{x-u}{h}\right) g(u)du \\
&\le ch^{1+l+\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\left|\frac{x-u}{h}\right|^{l+\varepsilon} K^{l+\varepsilon}\left(\frac{x-u}{h}\right) g(u)du \\
&\to h^{1+l+\varepsilon} cg(x) \int_{-\infty}^{\infty} |z|^{l+\varepsilon} K^{l+\varepsilon}(z)dz.
\end{aligned}$$

(Itt a C. Tételt alkalmaztuk.)

Tehát (4.33) alapján

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|J_2 - \mathbb{E}(J_2)|^l &\le c\left(\frac{1}{|\mathcal{D}_n|\Lambda_n^d}\right)^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{h}\right)^l \frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d} \Lambda_n^{d\cdot l} h^{\frac{l(1+l+\varepsilon)}{l+\varepsilon}} \\
&= c\left|\mathcal{D}_n\right|^{1-\frac{l}{2}} \left(\Lambda_n^d\right)^{\frac{l}{2}-1} h^{\frac{l}{l+\varepsilon}} = c\left|T_n\right|^{1-\frac{l}{2}} h^{\frac{l}{l+\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Megfelelő l és ε választása esetén (pl. $l = 1.98$, $\varepsilon = 0.01$) (4.5)-ből következik, hogy $|T_n|^{1-\frac{l}{2}} h^{\frac{l}{l+\varepsilon}} \to 0$.

Tehát $\mathbb{E}|J_2|^l \to 0$. Ezért $J_2 \to 0$ valószínűségben.

Végül foglalkozzunk a J_3 kifejezéssel.

$$J_3(x) = \frac{1}{|\mathcal{D}_n|} \sum_{\mathbf{t} \in \mathcal{D}_n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_{\mathbf{t}}}{h}\right).$$

Az A. Tétel miatt, $\sqrt{|T_n|}(J_3(x) - g(x))$ eloszlásban konvergens, ezért $J_3(x) \to g(x)$ valószínűségben. $\square$

4.6. Megjegyzés. A (4.5) és (4.7) csakis akkor teljesülhet egyidejűleg, ha $1 < a < \frac{5+\sqrt{17}}{4}$. Ennek igazolásához tekintsük a következőket. A (4.7)-ből következik, hogy

$$1 \leq C \cdot h_n^4 |T_n|^{\frac{4a^2}{(3a-1)(2a-1)}},$$

teljesül. Hogy egyidejűleg a (4.5) is teljesüljön szükséges, hogy

$$\frac{4a^2}{(3a-1)(2a-1)} > 1$$

egyenlőtlenség teljesüljön. Ebből következik, hogy $\frac{5-\sqrt{17}}{4} < a < \frac{5+\sqrt{17}}{4}$. Felhasználva, hogy $1 < a < \infty$, adódik az állítás. Például egy lehetséges jó választás: $a = 2, h_n = \frac{1}{n}, T_n = n^{15/4}$.

4.4. Példák

Ebben a fejezetben szimulációkon keresztül néhány egyszerű példát adunk az elméleti állítás bemutatására.

Legyen $X_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$, stacionárius Gauss-féle véletlen mező nulla várható értékkel és $\rho_{\mathbf{u}}$ kovariancia függvénnyel. A következő példákban ugyanazokat az $X_{\mathbf{u}}$ véletlen mezőket vizsgáljuk, amelyeket Fazekas és Chuprunov már tanulmányoztak ([FC06], [Faz07]). Legyen

$$\Phi(Y_{\mathbf{u}}) = 10 \sin(X_{\mathbf{u}}) + 100 + \delta_{\mathbf{u}},$$

ahol $\delta_{\mathbf{u}} = \widetilde{X_{\mathbf{u}}}$, és $\widetilde{X_{\mathbf{u}}}$ olyan stacionárius véletlen mező, hogy $\widetilde{X_{\mathbf{u}}}$ és $X_{\mathbf{u}}$ eloszlása megegyezik, valamint legyenek $X_{\mathbf{u}}$ és $\widetilde{X_{\mathbf{u}}}$ függetlenek.

4.7. PÉLDA. Tekintsünk egy $X(u), u \in \mathbb{R}$, Gauss-folyamatot nulla várható értékkel és $\rho_u = e^{-|u|}, u \in \mathbb{R}$ kovariancia függvénnyel. Ezt a folyamatot figyeljük meg a $T = [0, t]$ tartomány $1/\Lambda$-hálópontjaiban, ahol $\Lambda = 40$ és $t = 60$. Azaz a minta $z_1 = X(1/40), \ldots, z_s = X(2400/40)$, ahol $s = 2400$. Ennek a minta vektornak a kovariancia-mátrixa $(\rho^{|i-j|})_{i,j=1}^{s}$, ahol $\rho = e^{-1/\Lambda}$. Ezért az adatok a szimulációhoz könnyen generálhatóak. Valóban, legyenek $y_1, \ldots, y_s$ független, azonos eloszlású standard normális valószínűségi változók és legyen

$$z_i = \rho^{i-1} y_1 + \sqrt{1-\rho^2} \sum_{j=2}^{i} \rho^{i-j} y_j, i = 1, \ldots, s.$$

Ezeket az adatokat felhasználva, meghatároztuk az r_n regressziós függvény becslését az $x_1 = -0.5$, $x_2 = -0.25$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0.25$, és $x_5 = 0.5$ pontokban. Sávszélességnek két értéket használtunk, $h_1 = 0.025$-öt és $h_2 = 0.005$-öt. Továbbá a K magfüggvénynek a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét használtuk.

A szimulációkat MATLAB programcsomag segítségével hajtottuk végre. Az eljárást 5000-szer ismételtük. Mindkét sávszélesség (h_1 és h_2) használata esetén az adathalmazok megegyeztek. A regressziós függvény elméleti értékeit és becsléseinek átlagát az alábbi 4.1. táblázat mutatja. Megállapíthatjuk, hogy mindkét sávszélesség esetén az elméleti érték és a közelítő értékek átlaga közel vannak egymáshoz.

4.1. táblázat. A regressziós függvény elméleti értékei és becsléseinek átlaga a 4.7. Példa adataira.

x	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
$r(x)$	95.2057	97.5260	100.0000	102.4740	104.7943
$\overline{r_n(x)}$, ha $h_1 = 0.025$	95.2039	97.5220	99.9953	102.4684	104.7929
$\overline{r_n(x)}$, ha $h_2 = 0.005$	95.1970	97.5229	99.9939	102.4707	104.7976

A $\sqrt{\frac{|\mathcal{D}|}{\Lambda}}(r_n(x_1) - r(x_1), \ldots, r_n(x_5) - r(x_5))$ standardizált becslésekre (a standardizáló faktor $\sqrt{\frac{|\mathcal{D}|}{\Lambda}} = 7.7459$) kiszámítottuk a Σ_1 (h_1 sávszélesség esetén) és Σ_2 (h_2 sávszélesség esetén) empirikus kovariancia-mátrixokat:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 3.8773 & 2.6953 & 2.1923 & 1.7857 & 1.5073 \\ 2.6953 & 3.5796 & 2.5499 & 2.1007 & 1.7623 \\ 2.1923 & 2.5499 & 3.4399 & 2.4892 & 2.0995 \\ 1.7857 & 2.1007 & 2.4892 & 3.4852 & 2.6500 \\ 1.5073 & 1.7623 & 2.0995 & 2.6500 & 3.8147 \end{bmatrix};$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 7.2195 & 2.8212 & 2.1822 & 1.8547 & 1.5020 \\ 2.8212 & 6.5902 & 2.5058 & 2.0756 & 1.7223 \\ 2.1822 & 2.5058 & 6.2153 & 2.4162 & 2.1099 \\ 1.8547 & 2.0756 & 2.4162 & 6.5192 & 2.6732 \\ 1.5020 & 1.7223 & 2.1099 & 2.6732 & 7.1689 \end{bmatrix}.$$

A Σ_1 és Σ_2 mátrixok csak a főátlókban térnek el jelentősen, többi elemük majdnem megegyezik.

Határozzuk most meg a 4.1. Tételben leírt kovariancia-mátrix D diagonális mátrixának elemeit. Esetünkben, a D_k diagonális mátrix elemei h_k ($k = 1, 2$-re) sávszélesség esetén a következők:

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{1}{h_k}v(x_i)\frac{1}{g(x_i)}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)du = \frac{1}{40}\frac{1}{h_k}\cdot 1 \cdot \frac{1}{g(x_i)}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

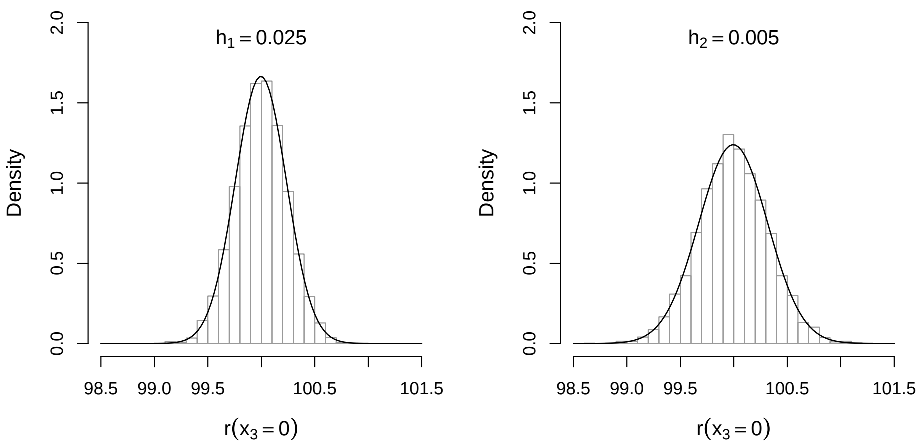
A „sűrűsödő-növekvő” eset miatt a kovariancia-mátrixban csak a főátlóban lehet különbség különböző sávszélesség használata esetén. A 4.2. táblázatban bemutatjuk, hogy az empirikus kovariancia-mátrixok főátlóbeli elemei különbsége ($diag(\Sigma_2 - \Sigma_1)$) és az elméleti kovariancia-mátrixok különbsége ($diag(D_2 - D_1)$), hogyan viszonyul egymáshoz.

4.2. táblázat. Az empirikus és az elméleti kovariancia-mátrixok főátlóbeli elemei különbségének aránya a 4.7. Példa adataira.

x	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
$\frac{diag(\Sigma_2-\Sigma_1)}{diag(D_2-D_1)}$	1.0428	1.0316	0.9812	1.0397	1.0465

Az eredmények azt mutatják, hogy a 4.1. Tételben szereplő D diagonális mátrix jól magyarázza a határérték kovariancia-mátrix függőséget a sávszélességtől, mivel az arányok közel vannak egyhez.

Végül, a 4.2. ábra az $r(x_3 = 0)$ pontbeli becslések relatív gyakoriságát mutatja $h_1 = 0.025$ (bal oldali ábra) és $h_2 = 0.005$ (jobb oldali ábra) sávszélességek esetén. A hisztogramokra ráhelyeztük azt a normális eloszlást, melynek a várható értékét és szórását a mintából becsültük. A 4.1. Tételben kimondott regressziós becslés közelítő normális eloszlása látható ezekben az ábrákban. A különböző sávszélességek különböző normális eloszlásokat eredményeznek.



4.2. ábra. Az $r(x_3 = 0)$ pontbeli becslések relatív gyakorisága $h_1 = 0.025$ (bal ábra) és $h_2 = 0.005$ (jobb ábra) sávszélességek esetén, valamint a hozzájuk tartozó becsült normális eloszlások sűrűségfüggvényei.

4.8. Megjegyzés. Ha csökkentjük a mintavételi helyek számát, akkor $\frac{diag(\Sigma_2-\Sigma_1)}{diag(D_2-D_1)}$ aránya a következőképpen módosul:

1. Ha $t = 20, \Lambda = 20$ és a többi adat változatlan marad, akkor

x	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
$\frac{diag(\Sigma_2-\Sigma_1)}{diag(D_2-D_1)}$	1.0711	1.0027	1.0147	1.0790	1.0390

2. Ha $t = 10, \Lambda = 10$ és a többi adat változatlan marad, akkor

x	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
$\frac{diag(\Sigma_2 - \Sigma_1)}{diag(D_2 - D_1)}$	0.8416	0.8631	0.8370	0.8985	0.7508

Látható, hogy ha a megfigyelési helyeink számát drasztikusan lecsökkentjük, akkor a módszerünk nem ad jó eredményt.

4.9. Példa. Tekintsünk most egy $X(u,v), (u,v) \in \mathbb{R}^2$, kétdimenziós paraméterterű Gauss-folyamatot nulla várható értékkel és $\rho_{(u,v)} = e^{-(|u|+|v|)}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ kovariancia-függvénnyel. Legyen az előző példához hasonlóan

$$\Phi(Y_{\mathbf{u}}) = 10\sin(X_{\mathbf{u}}) + 100 + \widetilde{X_{\mathbf{u}}}.$$

Ezt a folyamatot figyeljük meg a $T = [0,t]^2$ tartomány $1/\Lambda$-hálópontjaiban, ahol $\Lambda = 10$ és $t = 30$. Így a minta $z_{(i,j)} = X_{(i/10, j/10)}$, $i,j = 1, \ldots, 300$, $(30 \cdot 10)^2 = 90000$ mintaelemszámmal. A mintát tehát az alábbi módon generálhatjuk. Generáljuk az $y_{k,l}$, $(k,l = 1, \ldots, 300)$ adatokat, független, azonos eloszlású standard normális valószínűségi változókként, és legyenek

$$\begin{aligned} z_{(i,j)} =& \rho^{i+j-2} y_{1,1} + \sqrt{1-\rho^2}\rho^{j-1} \sum_{k=2}^{i} \rho^{i-k} y_{k,1} \\ &+ \sqrt{1-\rho^2}\rho^{i-1} \sum_{l=2}^{j} \rho^{j-l} y_{1,l} + (1-\rho^2) \sum_{k=2}^{i} \sum_{l=2}^{j} \rho^{i-k} \rho^{j-l} y_{k,l}, \end{aligned}$$

$i,j = 1, \ldots, 300$, ahol $\rho = e^{-1/\Lambda}$.

Az előző példához hasonlóan, meghatározzuk az r_n regressziós becslést az $x_1 = -0.5, x_2 = -0.25, x_3 = 0, x_4 = 0.25, x_5 = 0.5$ pontokban. $h_1 = 0.01$ és $h_2 = 0.002$-t válasszuk sávszélességnek és K magfüggvénynek használjuk a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét. Mindkét sávszélesség (h_1 és h_2) használata esetén az adathalmazok megegyeztek, és az eljárást

4.3. táblázat. A regressziós függvény elméleti értékei és becsléseinek átlaga a 4.9. Példa adataira.

x	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
$r(x)$	95.2057	97.5260	100.0000	102.4740	104.7943
$\overline{r_n(x)}$, ha $h = 0.0100$	95.2069	97.5270	99.9999	102.4735	104.7937
$\overline{r_n(x)}$, ha $h = 0.0020$	95.2074	97.5276	100.0001	102.4724	104.7955

5000-szer ismételtük meg. A regressziós függvény elméleti értékeit és becsléseinek átlagát az alábbi 4.3. táblázat mutatja. Mindkét sávszélesség esetén az elméleti és a közelítő értékek közel vannak egymáshoz.

A standardizált becslések (a standardizáló faktor $\sqrt{\frac{|\mathcal{D}|}{\Lambda^2}} = 30$) empirikus kovariancia-mátrixai

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 5.1226 & 4.1911 & 3.9213 & 3.7524 & 3.5575 \\ 4.1911 & 4.9262 & 4.0812 & 3.9838 & 3.8019 \\ 3.9213 & 4.0812 & 4.7751 & 4.0712 & 3.9663 \\ 3.7524 & 3.9838 & 4.0712 & 4.9523 & 4.2129 \\ 3.5575 & 3.8019 & 3.9663 & 4.2129 & 5.1573 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 8.2768 & 4.2437 & 3.9402 & 3.7704 & 3.6560 \\ 4.2437 & 7.8458 & 4.1450 & 4.1074 & 3.8184 \\ 3.9402 & 4.1450 & 7.5220 & 4.0948 & 4.0625 \\ 3.7704 & 4.1074 & 4.0948 & 7.9032 & 4.3544 \\ 3.6560 & 3.8184 & 4.0625 & 4.3544 & 8.4931 \end{bmatrix}$$

h_1 és h_2 sávszélességek esetén. Ismét, feltűnik a főátlón kívüli elemek közelsége és a főátló elemeinek a különbözősége.

Az előző példához hasonlóan a 4.4. táblázatban szemléltetjük, a

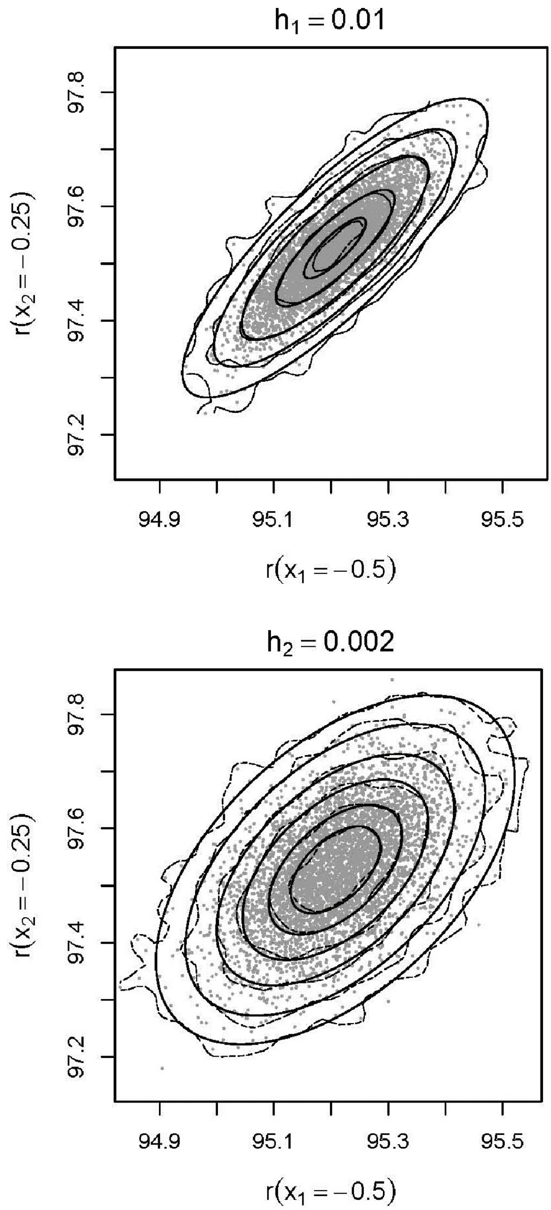
$$\frac{diag(\Sigma_2 - \Sigma_1)}{diag(D_2 - D_1)}$$

4.4. táblázat. Az empirikus és az elméleti kovariancia-mátrixok főátlóbeli elemeinek különbségének aránya a 4.9. Példa adataira.

x	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
$\frac{diag(\Sigma_2-\Sigma_1)}{diag(D_2-D_1)}$	0.9841	1.0004	0.9711	1.0112	1.0408

arányokat, amelyek közel vannak egyhez, ahogy ezt a 4.1. Tétel alapján elvártuk.

A 4.1. Tétel alapján, a regressziós becslést többdimenziós normális eloszlással közelíthetjük különböző x_i értékek esetén. A 4.3. ábrán az $r(x_1 = -0.5)$ (vízszintes tengely) és $r(x_2 = -0.25)$ (függőleges tengely) becslések eredményét mutatja $h_1 = 0.01$ (bal oldali ábra) és $h_2 = 0.002$ (jobb oldali ábra) sávszélesség esetén. A becsült szintvonalakat szaggatott vonalakkal ábrázoltuk, míg az ellipszisek az elméleti többdimenziós normális eloszlás azonos szintekre vett szintvonalait mutatják, ahol az eloszlás paramétereit az adatokból becsültük. A szintvonalak közelsége nyilvánvaló. Továbbá mindkét sávszélesség esetén az ellipszisek hasonló irányításúak, de különböző méretűek, amelyek a főátlón kívüli elemek közelségére, illetve a Σ_1 és Σ_2 főátlóbeli elemeinek eltérésére utalnak.



4.3. ábra. Az $r(x_1 = -0.5)$ és $r(x_2 = -0.25)$ becslések kétdimenziós szemléltetése $h_1 = 0.01$ (felső ábra) és $h_2 = 0.002$ (alsó ábra) sávszélességek esetén, valamint a hozzájuk tartozó szintvonalak (szaggatott vonal) és az ellipszisek az elméleti többdimenziós normális eloszlás szintvonalait mutatják (folytonos vonal).

5. fejezet

Összefoglalás

Az értekezésem három részből áll.

A rövid bevezetés után a 2., a 3. és a 4. fejezet tartalmazza a fő eredményeket. A dolgozat első részében (második fejezet) az autoregresszív típusú martingál mezők majdnem mindenütti konvergenciájával foglalkoztam.

Első eredményem többparaméterű, Banach-térbeli értékű B-értékű martingálok egyenletes konvergenciájáról szól. Ez a tétel a [Faz83] Theorem 4.4. egy változata, melyben az egyenletes konvergenciát nem vizsgálták.

2.6. Tétel. *Legyen B egy valós szeparábilis Banach-tér. Legyen $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, B-értékű martingál. B rendelkezzen a Radon-Nikodym tulajdonsággal vagy legyen $X_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ alakú, valamely $X \in L^1(\mathcal{F}, B)$-re. Tegyük fel, hogy*

$$\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|(\log^+ \|X_{\mathbf{n}}\|^{d-1}) < \infty.$$

Ekkor létezik egy olyan A esemény, melyre $\mathbb{P}(A) = 1$ és minden $\omega \in A$-ra teljesül a következő: ha az $\mathbf{n}$ tetszőleges koordinátái konvergálnak a ∞-hez míg a maradék koordináták rögzítettek maradnak, akkor $X_{\mathbf{n}}(\omega)$ egyenletesen konvergál. (A határérték egy, a rögzített koordinátáktól függő valószínűségi változó.)

A 2-nél magasabb dimenziós paramétertér esetére is kiterjesztettem az autoregressziós martingál mező fogalmát. Felhasználva a Burkholder-egyenlőtlenség d-paraméteres változatát (2.18. Lemma), A-martingál mezők konvergenciáját bizonyítottam.

A 2.17. Tétel lényege a következő. *Tegyük fel, hogy az $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ A-*

martingál mező teljesít bizonyos feltételeket. Ha

$$\sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{E}\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{k}})\| \left[\log^+(\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{k}})\|)\right]^{d-1} < \infty,$$

akkor $X_{\mathbf{n}}$ konvergens m.m., ha $n_j \to \infty$ minden j esetén. Továbbá, ha $d \geq 2$, akkor $X_{\mathbf{n}}$ konvergens $\mathcal{L}_1$-ben, ha $n_j \to \infty$ minden j esetén.

2.20. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ A-martingál mező teljesít bizonyos feltételeket, valamint*

$$\|A_j(i_j, u_j)\| < K < \infty,$$

teljesül, ha $i_j > u_j$, $j = 1, \ldots, d$. Ha $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}})\|^\alpha < \infty$, ahol $\alpha > 1$, akkor $X_{\mathbf{n}}$ konvergens $\mathcal{L}_\alpha$-ban, $\mathbf{n} \to \infty$ esetén.

Az első részben a fő eredményem a homogén autoregresszív martingál mezők konvergenciájáról szól.

2.21. Tétel. *Legyen $(\xi_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ homogén autoregresszív martingál mező és tegyük fel, hogy $a_m^{(j)} > 0$, minden $j = 1, \ldots, d$ esetén és a $\{k : 1 \leq k \leq m, a_k^{(j)} > 0\}$ számok legnagyobb közös osztója 1.*

a) Ha $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{n}}| \left[\log^+ |\xi_{\mathbf{n}}|\right]^{d-1} < \infty$, akkor $\xi_{\mathbf{n}}$ konvergens m.m., ha $\mathbf{n} \to \infty$, továbbá ha $d \geq 2$, akkor ξ_n konvergens $\mathcal{L}_1$-ben is.

b) Legyen $\alpha > 1$. Ha $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{n}}|^\alpha < \infty$, akkor $\xi_{\mathbf{n}}$ konvergens $\mathcal{L}_\alpha$-ban (és m.m.), ha $\mathbf{n} \to \infty$.

Az értekezés második és harmadik részében keverő mezőkre bizonyítottam határérték-tételeket úgynevezett „sűrűsödő-növekvő” tartományt feltételezve. Ezt a sémát Lahiri 1991-ben vezette be, és azóta sokan kezdték tanulmányozni. A „sűrűsödő-növekvő” eset lényegesen eltér a tisztán sűrűsödő esettől. A sűrűsödő tulajdonság azt jelenti, hogy a megfigyelések helyei egyre sűrűbbek egy rögzített tartományban (lásd [Cre91]). Gyengén függő mezők sűrűsödő megfigyelése esetén számos becslés nem lesz konzisztens (lásd [Lah96]). Továbbá, ebben az esetben nem várható a becslések aszimptotikus normalitása, mert hiányzik egy alkalmas centrális határeloszlás tétel.

A „sűrűsödő-növekvő” tartomány esetén a megfigyelési helyeink egyre sűrűbbek, miközben a tartomány is növekszik. A tudományos megfigyelésekben több olyan folyamatot tanulmányoznak, amely térben vagy időben folytonosan változik. A gyakorlatban azonban nem tudjuk folytonosan megfigyelni a folyamatokat, ezért véges adathalmazokkal és diszkrét becslésekkel dolgozunk.

Dolgozatom ezen részeiből, illetve Fazekas István korábbi eredményeiből kiderül, hogy ez a „sűrűsödő-növekvő" (infill-increasing) eset a diszkrét és a folytonos idejű esetek között helyezkedik el. Az így adódó aszimptotikus eredményeim a diszkrét és a folytonos esetek „keverékeként" adódtak.

Ibragimov és Linnik 1971-ben ([IL71]) központi határeloszlás-tételt igazoltak olyan stacionárius sorozatokra, amelyek bizonyos α-keverő feltételeket teljesítenek. Az eredményüket Bolthausen ([Bol82]) és Guyon ([Guy95]) terjesztette ki α-keverő véletlen mezőkre. Fazekas István ([Faz03]) korlátos, Fazekas-Kukush ([FK00]) az egyenletes integrálható esettel foglalkozott. Ezek a cikkek nem tartalmazzák az említett tételek részletes bizonyításait, hanem csak rövid vázlatot közölnek.

A harmadik fejezetben valójában egy részletes bizonyítást adunk Fazekas és Kukush tételére ([FK00]). A bizonyítás pontos rögzítése azért fontos, mert a Guyon művében szereplő bizonyítás egy ugrást tartalmaz, amikor a korlátos esetre történő visszavezetéshez Ibragimov-Linnik művére hivatkozik. Azonban az Ibragimov-Linnik ([IL71])-beli tétel stacionárius esetre vonatkozik, gondolatmenete nem vihető át közvetlenül a nem stacionárius esetre. Ezért tette fel Fazekas és Kukush ([FK00]) az egyenletesen integrálhatóságot.

A 3.2. fejezetben részletesen tárgyaltam a felhasznált jelöléseket és a korábbi eredményeket (α-keverő mező, Davydov-egyenlőtlenség (3.2. Megjegyzés), Rosenthal-egyenlőtlenség (3.3. Lemma)). A következő fejezetben kimondtam a fő eredményeket, arra az esetre koncentrálva, amikor $\varepsilon(\mathbf{x})$ és $\varepsilon(\mathbf{y})$ nem függetlenek, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ közel vannak egymáshoz, ezért a tételek nem fedik le azon eseteket, amikor $Y_n(\mathbf{k})$-k függetlenek és azonos eloszlásúak.

A 3.5. Tétel sémája a következő. *Legyen $\varepsilon(\mathbf{x})$ véletlen mező és legyen $Y_n(\mathbf{k})$ az $\varepsilon(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{(n)})$ Borel-mérhető függvénye, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. Legyen az $\{|Y_n(\mathbf{k})| : \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n, n = 1, 2, \dots\}$ család egyenletesen korlátos. Legyen*

$$S_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k}),\ n = 1, 2, \dots,\ \sigma_n^2 = \mathrm{var}(S_n).$$

Továbbá tegyük fel, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^2}{\Lambda_n^d |\mathcal{D}_n|} > 0$$

teljesül. Ekkor bizonyos további feltételek teljesülése esetén $\sigma_n^{-1} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, *ha* $n \to \infty$.

3.6. Tétel. *Legyen* $\varepsilon(\mathbf{x})$ *véletlen mező és legyen* $Y_n(\mathbf{k})$ $\varepsilon(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{(n)})$ *Borel-mérhető függvénye,* $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. *Tegyük fel, hogy* $\mathbb{E} Y_n(\mathbf{k}) = 0$ *minden* $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ *esetén. Legyen* $S_n = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k})$, $n = 1, 2, \ldots$, $\sigma_n^2 = \operatorname{var}(S_n)$. *Tegyük fel, hogy létezik olyan* $\tau > 0$, *hogy teljesül (3.2) és*

$$\{|Y_n(\mathbf{k})|^{2+\tau} \ : \ \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n, n = 1, 2, \ldots\} \quad \textit{egyenletesen integrálható.}$$

Ekkor

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\Lambda_n^d |\mathcal{D}_n|} \sum\nolimits_{\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathcal{D}_n} |\operatorname{cov}(Y_n(\mathbf{k}), Y_n(\mathbf{l}))| < \infty.$$

További feltételek teljesülése esetén

$$\sigma_n^{-1} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1),$$

ha $n \to \infty$.

Végezetül a harmadik fejezet végén ezen tételek p-dimenziós kiterjesztéseivel foglalkoztam.

Dolgozatom befejező részében a regressziós függvény magfüggvényes becslésének határeloszlásával foglalkoztam véletlen mezőkön. A magfüggvényes becsléseket széles körben tanulmányozza a szakirodalom. A sűrűségfüggvény magfüggvényes becsléséről Parzen (lásd [Par62]) és Rosenblatt (lásd [Ros56b]) ért el alapvető eredményeket. A regressziós függvény magfüggvényes becsléséről Nadaraya és Watson ([Nad64], [Wat64]) 1964-ben közölt eredményeit számos cikkben feldolgozták és általánosították. Ezeket az eredményeket többek között Rao ([Rao83]), Devroye és Győrfi ([DG85]), valamint Bosq ([Bos98]) foglalta össze. A magfüggvényes becslések egyik fontos tulajdonsága az aszimptotikus normalitás, melyet több cikkben is tanulmányoztak (lásd [Sch72], [Cai01]).

Sikerült a regressziós függvény aszimptotikus normalitását bizonyítani „sűrűsödő-növekvő" tartományt tekintve. Dolgozatomból, valamint Fazekas István korábbi eredményeiből (lásd [FC06]) kiderül, hogy ez az eset a diszkrét és a folytonos idejű esetek között helyezkedik el. Pontosabban szólva, a határeloszlás kovariancia struktúrája a diszkrét és a folytonos idejű határeloszlások lineáris kombinációjaként adódik.

A vizsgálataink motivációjaként meg kell említeni még a számos helyen alkalmazott mintavételi sémákat is. A mintavételezés történhet véletlen vagy determinisztikus időpontokban. A legtöbb létező eredmény a nem sűrűsödő esetre vonatkozik (lásd [Mas83], [BC93]). A [Bos98] könyvben a mintavételi séma fontossága bemutatásra kerül, de nem említ explicit eredményt regresszió esetén. A [Bos98] 140. oldalán a következő utalás szerepel: „A regressziós és sűrűség becslések egymáshoz hasonlóan viselkednek mintavételi sémák esetén”.

A 4.1. Tétel lényege a következő. *Legyen* $(X_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}})\,, \mathbf{t} \in T_\infty$, *erősen stacionárius kétdimenziós véletlen mező,* $r(x) = \mathbb{E}\left(\Phi\left(Y_{\mathbf{t}}\right)|X_{\mathbf{t}} = x\right)$ *a regressziós függvény, ahol* Φ *korlátos, mérhető függvény és* K *egy magfüggvény. Tegyük fel, hogy a* $\Sigma^{(m)} + D$ *mátrix pozitív definit, ahol* D *egy diagonális mátrix, melynek a diagonális elemei:* $Lv(x_i)\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt/g(x_i)$, $i = 1, \dots, m$. *Ha bizonyos feltételek teljesülnek, akkor*

$$\sqrt{\frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d}}\left\{\left(r_n(x_i) - r(x_i)\right), i = 1, \dots, m\right\} \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \Sigma\right), \quad ha \quad n \to \infty,$$

ahol

$$\Sigma = \Sigma^{(m)} + D.$$

A 4.1. Tételben szereplő Σ aszimptotikus kovarianciamátrix egy diszkét és egy folytonos esetnek megfelelő aszimptotikus kovariancia mátrix kombinációja. Schuster igazolta ([Sch72]), hogy (független, azonos eloszlású megfigyelések esetén) $r_n(x_1), \dots, r_n(x_m)$ aszimptotikusan normális diagonális kovariancia mátrixszal. Pontosabban $\sqrt{nh_n}(r_n(x_i) - r(x_i)) \Rightarrow \mathcal{N}(0, c_i)$, ahol $c_i = v(x_i)\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt/g(x_i)$, ezért, a 4.1. Tételben a D diagonális rész megfelel a diszkrét esetbeli határérték kovariancia mátrixnak.

Végezetül két példán keresztül szemléltettem a határeloszlást. A numerikus példák jól mutatják az előbb jelzett speciális kovariancia struktúrát.

6. fejezet

Summary

This Ph.D dissertation contains new results in the field of limit theorems of probability theory and statistics. It consists of three parts, which can be treated separately. In this summary the numeration of our theorems and definitions are the same as those used in the dissertation.

In the first part of the dissertation we deal with autoregressive type martingale fields. That is in this part a generalization of d-index martingales is studied.

A d-index process is called an autoregressive martingale field if it satisfies certain autoregressive type stochastic difference equations. An almost sure convergence theorem is proved for autoregressive martingale fields.

There are several extensions of the notion of a martingale. The so called linear martingales were studied in [MQ73], [Hey80] and [Faz87]. The notion of a linear martingale was extended to the two indexes case in [Faz88]. We mention that a lot of papers are devoted to the study of multiindex martingales (e.g. [Cai70], [Faz83]). It is well-known that the almost sure (a.s.) convergence of a multiindex sequence (in particular a martingale) requires stronger conditions than that of a single index sequence. The a.s. convergence of multiindex martingales is described in [Cai70].

We extend the notion of a linear martingale to the multiindex case. The construction of the notion of d-index autoregressive type martingale fields is also our own result for $d > 2$. Then we obtain an a.s. convergence result for it (Theorem 2.21.). This theorem contains previous results of [Faz87] and [Faz88] as special cases.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be a probability space, $X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, a d-index sequence of

random variables, and let $\mathcal{F}_{\mathbf{n}} \subseteq \mathcal{F}$ be σ-algebras for all $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

Recall the notion of a martingale. Suppose that $\mathcal{F}_{\mathbf{m}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathbf{n}}$ for every $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$. Assume that $X_{\mathbf{n}}$ is $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$-measurable and integrable for every $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. We say that $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ is a martingale if $E(X_{\mathbf{n}+\mathbf{k}} \, | \mathcal{F}_{\mathbf{n}}) = X_{\mathbf{n}}$ a.s., for all $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ and $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$.

We shall use the following condition. For any η with finite expectation

$$E\left(\eta | \mathcal{F}_{\mathbf{n}}\right) = E\left(\dots E\left(\eta | \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_1)}\right) \dots | \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i_d)}\right) \tag{2.3}$$

for any permutation $(i_1, \dots, i_d)$ of $(1, \dots, d)$, where $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i)} = \sigma\{\mathcal{F}_{\mathbf{l}} : l_i = n_i\}$ for any fixed $\mathbf{n}$ and i (in the notation $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^{(i)}$ superscript (i) shows the appropriate coordinate).

In order to prove our result we have to use a new martingale convergence theorem (Theorem 2.6.). Theorem 2.6. is a uniform a.s. convergence result for Banach space valued multiindex martingales.

More precisely, we have the following theorem.

Theorem 2.6. *Let B be a real separable Banach space. Let $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, be a B-valued martingale. Let B have Radon-Nikodym property or let $X_{\mathbf{n}}$ be of the form $X_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{\mathbf{n}}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, for an $X \in L^1(\mathcal{F}, B)$. Assume that* $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|(\log^+ \|X_{\mathbf{n}}\|^{d-1}) < \infty$. *Then there exists an event A with* $\mathbb{P}(A) = 1$ *such that for $\omega \in A$ we have: if arbitrary coordinates of $\mathbf{n}$ converge to ∞ while the remaining coordinates remain fixed then $X_{\mathbf{n}}(\omega)$ converges uniformly. (The limit is a random variable depending on the coordinates remaining fixed.)*

To describe the structure of the random field $\xi_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, we shall use the Kronecker product (denoted by $\otimes$) and the vec operation (see, e.g. [MN88]). The construction of the notion of d-index autoregressive type martingale fields is also our own result.

Definition 2.9. *The process $\{\xi_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, is called an autoregressive martingale field if $\xi_{\mathbf{n}}$ is $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$-measurable and integrable for every $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\xi_{\mathbf{n}} | \mathcal{F}_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}^{(j)}\right) &= a_1^{(j)}(n_j)\xi_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j} \\ &\quad + a_2^{(j)}(n_j)\xi_{\mathbf{n}-2\mathbf{e}_j} + \dots + a_m^{(j)}(n_j)\xi_{\mathbf{n}-m\cdot\mathbf{e}_j} \end{aligned} \tag{2.10}$$

for every $\mathbf{n}$ and j, with $n_j > m$, $j = 1, \dots, d$, where m is a fixed positive integer, $\mathbf{e}_j = (0, \dots, \underbrace{1}_{jth}, \dots 0) \in \mathbb{N}_0^d$ is the jth unit vector, $j = 1, \dots, d$, and

$a_i^{(j)}(n_j)$ are non-negative non-random coefficients with $\sum_{i=1}^m a_i^{(j)}(n_j) = 1$ for every $n_j = m+1, m+2, \ldots, \quad j = 1, \ldots, d$.
If the coefficients $a_k^{(j)}(l)$ do not depend on l, then $\xi_{\mathbf{n}}$ is called a homogeneous autoregressive martingale field.

Let $\xi_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, be a d-index random field. Using $\xi_{\mathbf{n}}$, we shall construct another random field $X_{\mathbf{n}}$. The values of this new field are d-index arrays. For any fixed $m \in \mathbb{N}$ and $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ (with $n_i \geq m, i = 1, \ldots, d$) $X_{\mathbf{n}}$ denotes the elements of the random field $\xi_{\mathbf{k}}$ with indices being in a hypercube of size $\underbrace{m \times m \times \ldots \times m}_{d}$.

Proposition 2.10. *Let $(\xi_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ be the autoregressive martingale field introduced in Definition 2.9. Let $X_{\mathbf{n}}$ be the array valued random field corresponding to $\xi_{\mathbf{n}}$. Then*
(2.11)
$$\operatorname{vec}\left[\mathbb{E}\left(X_{\mathbf{n}} \mid \mathcal{F}^{(j)}_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}\right)\right] = \Big(\underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{d-j} \otimes A_j^{(n_j)} \otimes \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{j-1}\Big) \cdot \operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j})$$

for every $\mathbf{n}$ with $n_j > m$, $j = 1, \ldots, d$, where $A_j^{(l)}$ denotes the following $m \times m$ matrix

$$A_j^{(l)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_m^{(j)}(l) & a_{m-1}^{(j)}(l) & \cdots & \cdots & a_1^{(j)}(l) \end{pmatrix},$$

for every $j = 1, \ldots, d$ and $l = m+1, m+2, \ldots$.

Proposition 2.11. Let $X_{\mathbf{n}}$ be an array-valued random field satisfying (2.11). Assume that (2.3) is valid. Then for the process $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ the equation
(2.16)
$$\begin{aligned}\operatorname{vec}\left[E(X_{\mathbf{n}+\mathbf{t}} | \mathcal{F}_{\mathbf{n}})\right] &= [A_d(n_d + t_d, n_d) \otimes \cdots \\ &\qquad \otimes A_2(n_2 + t_2, n_2) \otimes A_1(n_1 + t_1, n_1)] \operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}})\end{aligned}$$

holds, where

$$A_j(n_j + t_j, n_j) = A_j^{(n_j + t_j)} A_j^{(n_j + t_j - 1)} \cdots A_j^{(n_j + 1)} \qquad (2.17)$$

for every $n_j > m,\ j = 1, \ldots, d$ and $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^d$.

Above and in the following $A_j(n_j, n_j) = I$ (the unit matrix).

Generalizing property (2.16), we get the following notion.

Definition 2.12. An array-valued process $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}),\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbf{d}}$, is called an *A-martingale field* if

1) $X_{\mathbf{n}}$ is $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$-measurable and integrable for every $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$,
2) equation (2.16) is satisfied for every $\mathbf{n}, \mathbf{t} \in \mathbb{N}^d$, where the matrices $A_j(n_j + t_j, n_j)$ are given by (2.17). (All matrices $A_j^{(l_j)}$ considered are nonrandom and of type $m \times m$.)

Proposition 2.15. Assume (2.3). For the A-martingale field $X_{\mathbf{n}}$, we have the representation:

(2.20)
$$\operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}}) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{k_d=1}^{n_d} [A_d(n_d, k_d) \otimes \cdots \otimes A_1(n_1, k_1)] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}),$$

where $A_j(k_j, k_j) = I,\ j = 1, \ldots, d$.

The following conditions will be used in our theorems. Suppose that

$$A_j(i_j + t_j, i_j) \to A_j(\infty, i_j),\ \text{as } t_j \to \infty,\ \text{for every } i_j, j \in \mathbb{N} \tag{2.21}$$

and that the convergence is 'fast' in the following sense:

$$\|A_j(\infty, i_j) - A_j(i_j + t_j, i_j)\| \le c_{t_j}^{(j)}, \qquad \forall i_j, j \in \mathbb{N}, \tag{2.22}$$

where $\sum_{t_j=1}^{\infty} c_{t_j}^{(j)} < \infty$ for every j.

For the limit matrices $A_j(\infty, k_j) = \lim_{t_j \to \infty} A_j(k_j + t_j, k_j)$, we assume that there exists a positive number C such that

$$\|[A_d(\infty, k_d) \otimes \cdots \otimes A_1(\infty, k_1)] \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}})\| \ge C \|\operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}})\|, \tag{2.23}$$

for every $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$.

For arbitrary $S \subseteq \{1, \ldots, d\}$ and arbitrary $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{\mathbf{k}_S \le \mathbf{n}_S} A_d(\infty, k_d) \otimes A_{d-1}(\infty, k_{d-1}) \otimes \cdots \otimes A_1(\infty, k_1) \cdot \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \Big\| \\ &\quad \ge C \cdot \Big\| \sum_{\mathbf{k}_S \le \mathbf{n}_S} D_{k_d} \otimes D_{k_{d-1}} \otimes \cdots \otimes D_{k_1} \cdot \operatorname{vec}(\Delta_{\mathbf{k}}) \Big\|, \end{aligned} \tag{2.24}$$

where the matrix $D_{k_l} = A_l(\infty, k_l)$ if $l \in S$ and $D_{k_l} = I$ if $l \notin S$.

Theorem 2.17. Assume that the A-martingale field $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, satisfies (2.3), (2.22), (2.23) and (2.24). If

$$\sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} E\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{k}})\| \left[\log^+(\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{k}})\|)\right]^{d-1} < \infty, \tag{2.25}$$

then $X_{\mathbf{n}}$ converges a.s. as $n_j \to \infty$ for all j. If, moreover, $d \geq 2$ then $X_{\mathbf{n}}$ converges in $\mathcal{L}_1$, as $n_j \to \infty$ for all j.

Theorem 2.20. Suppose that for the A-martingale field $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, condition (2.3), (2.22) and (2.24) hold, and

$$\|A_j(i_j, u_j)\| < K < \infty \tag{2.30}$$

if $i_j > u_j,\ j = 1, \dots, d$. If $\sup_{\mathbf{n}} E\|\operatorname{vec}(X_{\mathbf{n}})\|^{\alpha} < \infty$, where $\alpha > 1$, then $X_{\mathbf{n}}$ converges in $\mathcal{L}_\alpha$, as $\mathbf{n} \to \infty$.

Finally, the main result is the following.

Theorem 2.21. *Let* $(\xi_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, *be a homogeneous autoregressive martingale field and suppose that* (2.3) *is satisfied. Assume, for each* $j = 1, \dots, d$, $a_m^{(j)} > 0$, *and the greatest common divisor of* $\{k : 1 \leq k \leq m, a_k^{(j)} > 0\}$ *is equal to 1.*

a) If $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{n}}| \left[\log^+ |\xi_{\mathbf{n}}|\right]^{d-1} < \infty$, *then* $\xi_{\mathbf{n}}$ *converges a.s, if moreover,* $d \geq 2$, *then* ξ_n *converges in* $\mathcal{L}_1$, *as* $\mathbf{n} \to \infty$.

b) Let be $\alpha > 1$. *If* $\sup_{\mathbf{n}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{n}}|^{\alpha} < \infty$, *then* $\xi_{\mathbf{n}}$ *converges in* $\mathcal{L}_\alpha$ *(and a.s.), as* $\mathbf{n} \to \infty$.

In the second part of the dissertation we deal with central limit theorems for mixing random fields.

Ibragimov and Linnik ([IL71]) proved a central limit theorem for stationary sequences satisfying certain α-mixing conditions. Bolthausen (see [Bol82]) and Guyon (see [Guy95]) extended it to α-mixing random fields. Fazekas (see [Faz03]) and Fazekas and Kukush (see [FK00]) presented so called infill-increasing versions of Guyon's result for the bounded and the uniformly integrable cases, respectively. These papers do not contain the proofs of the theorems mentioned, just a sketch of the proof is given. In the second part of our dissertation detailed proofs for the above mentioned theorems are given. The importance of the detailed proof is the following.

It turns out that the original proof by Ibragimov and Linnik ([IL71]) and Guyon ([Guy95]) can be applied if the random field satisfies a certain uniform integrability condition. Guyon ([Guy95]) does not assume uniform integrability but he does not describe the step from the bounded case to the general case. Therefore we do not know if his result is valid in the general case. We mention that Ibragimov and Linnik ([IL71]) assumed stationarity so their proof is complete.

The scheme of observations is the following. Let $T_1, T_2, \dots,$ and T_∞ be domains in $\mathbb{R}^d$. Suppose that $T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \dots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = T_\infty$. Assume that T_i is compact for each i, T_∞ is of infinite Lebesgue measure. Let $\{\varepsilon(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in T_\infty\}$ be a random field. The n-th set of observations consists of values of the random field $\varepsilon(\mathbf{x})$ taken at points $\mathbf{x_k} \in T_n$, where $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n \subset \mathbb{Z}^d$. The choice of points $\mathbf{x_k}$ is the following. Divide $\mathbb{R}^d$ into hyperrectangles

$$\Delta_n(\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^{d} \Big(\frac{k_j}{N_{jn}}, \frac{k_j+1}{N_{jn}} \Big],$$

where $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ is a d-dimensional integer lattice point and $\{N_{jn}\}$ is an increasing and unbounded sequence of positive integers for each $j = 1, \dots, d$. Now, select the n-th data sites $\mathbf{x_k}$, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$, by choosing an arbitrary point $\mathbf{x_k}$ from each $\Delta_n(\mathbf{k}) \cap T_n$ which is non-empty. Actually, each $\mathbf{x_k} = \mathbf{x_k}^{(n)}$ depends on n but to avoid complicated notation we often omit superscript (n). We suppose that $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{D}_n| = \infty$.

As the locations of the observations become more and more dense in an increasing sequence of domains, we call our setup infill-increasing.

We need the notion of α-mixing (see e.g. Doukhan [Dou94], Guyon [Guy95]). Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be two σ-algebras in $\mathcal{F}$. The α-mixing coefficient of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ is

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup\{|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)| \ : \ A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

The α-mixing coefficient of $\{\varepsilon(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in T_\infty\}$ is

$$\alpha(r, u, v) = \sup\{\alpha(\mathcal{F}_{I_1}, \mathcal{F}_{I_2}) \ : \ \varrho(I_1, I_2) \geq r,\ |I_1| \leq u,\ |I_2| \leq v\},$$

where I_1 and I_2 are finite subsets in T_∞, $\mathcal{F}_{I_i} = \sigma\{\varepsilon(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in I_i\}$, $i = 1, 2$. We list the conditions that will be used in our theorems.

$$\int_0^\infty s^{d-1} \alpha^{\frac{\tau}{2+\tau}}(s, 1, 1) ds < \infty, \quad \text{for some} \quad 0 < \tau < 1. \tag{3.2}$$

$$(3.3)\qquad \int_0^\infty s^{d-1}\alpha(s,i,j)ds < \infty, \quad \text{for} \quad i+j \le 4.$$

$$(3.4)\qquad \alpha(s,1,\infty) = \mathrm{o}(s^{-d}), \quad \text{as} \quad s \to \infty.$$

$$(3.5)\qquad \Lambda_n = \mathrm{O}(\lambda_n), \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

where

$$(3.6)\qquad \Lambda_n = \max_{1\le j\le d} N_{jn}, \quad \lambda_n = \min_{1\le j\le d} N_{jn}.$$

Actually (3.4) means that $\lim_{n\to\infty}\alpha(s_n,1,k_n)s_n^d = 0$ if $s_n \to \infty$ and $k_n \to \infty$.

In the following theorems we concentrate on the case when $\xi_{\mathbf{t}}$ and $\xi_{\mathbf{s}}$ are dependent if $\mathbf{t}$ and $\mathbf{s}$ are close to each other.

Theorem 3.5. *Let $\varepsilon(\mathbf{x})$ be a random field and let $Y_n(\mathbf{k})$ be a Borel measurable function of $\varepsilon(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{(n)}), \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. Suppose that $\mathbb{E}Y_n(\mathbf{k}) = 0$ and $|Y_n(\mathbf{k})|$, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$, $n = 1,2,\ldots$ are uniformly bounded. Let $S_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k})$, $n = 1,2,\ldots$, $\sigma_n^2 = \mathrm{var}(S_n)$. Suppose that the conditions (3.3), (3.4) and (3.5) are satisfied. Assume that*

$$(3.15)\qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^2}{\Lambda_n^d|\mathcal{D}_n|} > 0,$$

hold. Then $\sigma_n^{-1}S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, as $n \to \infty$.

Theorem 3.6. *Let $\varepsilon(\mathbf{x})$ be a random field and let $Y_n(\mathbf{k})$ be a Borel-measurable function of $\varepsilon(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{(n)}), \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. Suppose that $\mathbb{E}Y_n(\mathbf{k}) = 0$ for $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$, $n = 1,2,\ldots$. Let $S_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k})$, $n = 1,2,\ldots$, $\sigma_n^2 = \mathrm{var}(S_n)$. Suppose that there exists a $\tau > 0$ such that (3.2) is satisfied and*

$$\{|Y_n(\mathbf{k})|^{2+\tau} \ : \ \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n, n = 1,2,\ldots\} \quad \text{are uniformly integrable.}$$

Then

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\Lambda_n^d|\mathcal{D}_n|} \sum\nolimits_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{D}_n} |\operatorname{cov}(Y_n(\mathbf{k}), Y_n(\mathbf{l}))| < \infty.$$

If additionally, conditions (3.3), (3.4), (3.5), and (3.15) are satisfied, then $\sigma_n^{-1}S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, as $n \to \infty$.

Now we turn to p-dimensional extensions of Theorem 3.5. and Theorem 3.6. Our Theorem 3.10. is the same as Theorem 3.1. of Fazekas ([Faz03]).

Theorem 3.10. *Let $\varepsilon(\mathbf{x})$ be a random field and let the p-dimensional random vector $Y_n(\mathbf{k})$ be a Borel measurable function of $\varepsilon(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{(n)}), \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. Suppose that $\mathbb{E}Y_n(\mathbf{k}) = 0$ and $\|Y_n(\mathbf{k})\|$, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ are uniformly bounded. Let $S_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k})$, $n = 1, 2, \ldots$, $\Sigma_n = \mathrm{var}(S_n)$. Suppose that conditions (3.3), (3.4) and (3.5) are satisfied. Assume that the limit*

$$\lim_{n\to\infty} (\Lambda_n^{-d}|\mathcal{D}_n|^{-1}\Sigma_n) = \Sigma$$

exists. Then $(\Lambda_n^{d}|\mathcal{D}_n|)^{-\frac{1}{2}} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma)$, as $n \to \infty$.

Our Theorem 3.11. is the same as Remark 4.3. in Fazekas and Kukush ([FK00]).

Theorem 3.11. *Let $\varepsilon(\mathbf{x})$ be a random field. For each $n = 1, 2, \ldots$, and for each $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$ let $Y_n(\mathbf{k})$ be a centered p-dimensional random vector that is $\varepsilon(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{(n)})$-measurable. Let $S_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}_n} Y_n(\mathbf{k})$, $n = 1, 2, \ldots$, $\Sigma_n = \mathrm{var}(S_n)$. Assume that conditions (3.3), (3.4), and (3.5) are satisfied. Moreover, assume that there exists a $\tau > 0$ such that (3.2) is satisfied, and*

$$\{\|Y_n(\mathbf{k})\|^{2+\tau} \ : \ \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n, n = 1, 2, \ldots\} \quad \text{are uniformly integrable.}$$

Assume that

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_{\min}\big(\Lambda_n^{-d}|\mathcal{D}_n|^{-1}\Sigma_n\big) > 0.$$

Then $\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, I_p)$, as $n \to \infty$.

In the third part of the dissertation we deal with asymptotic normality of kernel type regression estimators for random fields.

Kernel type regression estimators have been widely studied in the literature. The original results by Nadaraya ([Nad64]) and Watson ([Wat64]) have been extended in several papers, and they are summarized for example in [Rao83], [DG85], and [Bos98]. One important issue for kernel type regression estimators is their asymptotic normality, which has been studied in several papers, like in [Sch72] and [Cai01].

We consider $(X_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}}), \mathbf{t} \in T_\infty$, to be a strictly stationary random field. (Here T_∞ is a domain in $\mathbb{R}^d$, $X_{\mathbf{t}}$ and $Y_{\mathbf{t}}$ are real-valued.) We want to estimate the regression function $r(x) = \mathbb{E}\left(\Phi\left(Y_{\mathbf{t}}\right)|X_{\mathbf{t}} = x\right)$, where Φ is a known bounded measurable function. The data set is $(X_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}}), \mathbf{t} \in \mathcal{D}_n$. We consider the well-known kernel type regression estimator

$$r_n(x) = \frac{\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n} \Phi(Y_{\mathbf{t}}) K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)}{\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}_n} K\left(\frac{x-X_{\mathbf{t}}}{h}\right)},$$

where K is a kernel function (see [Nad64], [Wat64]). However, our sampling scheme is unusual. The locations of observations become dense in an increasing sequence of domains. It is called the infill-increasing setting, see, for example, [LKC99] and [Faz03]. We suppose that the observed random field is weakly dependent, more precisely, the random field satisfies a certain α-mixing condition. The main result is that $r_n(x)$ is asymptotically normal with an unusual covariance structure. That is, the asymptotic covariance matrix of $(r_n(x_1), \dots, r_n(x_m))$ is the sum of a diagonal matrix and a matrix containing integrals of the conditional covariances, see Theorem 4.1.

Concerning the motivation of our studies we have to refer to the sampling schemes. Continuous time processes can be observed at deterministic or random time. Most of the existing results concern the non infill case (see [Mas83], [BC93]). In [Bos98] the importance of the sampling schemes is expressed, however no explicit result is mentioned for regression. In [Bos98], p. 140 only the following hint is given: "regression and density estimators behave alike when sampled data are available". Actually, for kernel type density estimators there are several results for infill-increasing type sampling schemes. We refer to [Bos98], pp. 118-127 and [BP03].

$|\mathcal{D}|$ denotes the cardinality of the finite set $\mathcal{D}$ and at the same time $|T|$ denotes the volume of the domain T.

The scheme of observations is the following. For simplicity we restrict ourselves to rectangles as domains for the observations. Let $\Lambda > 0$ be fixed. By $\left(\frac{\mathbb{Z}}{\Lambda}\right)^d$ we denote the Λ-lattice points in $\mathbb{R}^d$, i.e. lattice points with distance $\frac{1}{\Lambda}$:

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{\Lambda}\right)^d = \left\{\left(\frac{k_1}{\Lambda}, \dots, \frac{k_d}{\Lambda}\right) : (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d\right\}.$$

T will be a bounded, closed rectangle in $\mathbb{R}^d$ with edges parallel to the axes, and $\mathcal{D}$ will denote the Λ-lattice points belonging to T, i.e. $\mathcal{D} = T \cap (\mathbb{Z}/\Lambda)^d$. For describing the limit distribution we consider a sequence of the previous objects. I.e. let $T_1, T_2, \dots$ be bounded, closed rectangles in $\mathbb{R}^d$, suppose that $T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \dots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = T_\infty$.

We assume that the length of each edge of T_n is an integer and converges to ∞, as $n \to \infty$ (e.g. $T_\infty = \mathbb{R}^d$ or $T_\infty = [0,\infty)^d$). Let $\{\Lambda_n\}$ be an increasing sequence of positive integers (the non-integer case is essentially the same) and let $\mathcal{D}_n$ be the Λ_n-lattice points belonging to T_n.

Let $\{\xi_{\mathbf{t}} = (X_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}}), \mathbf{t} \in T_\infty\}$ be a strictly stationary two-dimensional random field. The n-th set of observations involves the values of the random field $(X_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}})$ taken at each point $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. We shall construct the estimator from the data $(X_{\mathbf{k}}, Y_{\mathbf{k}}), \mathbf{k} \in \mathcal{D}_n$. Actually, each $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(n)}$ depends on n, but to avoid complicated notation we omit the superscript (n). By our assumptions, $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{D}_n| = \infty$.

As the locations of the observations become more and more dense in an increasing sequence of domains, we call our setup infill-increasing.

We list the conditions that will be used in our theorems.

Let

$$\int_0^\infty s^{2d-1} \alpha^{\frac{a-1}{a}}(s) ds < \infty, \quad \text{for some} \quad 1 < a < \infty. \tag{4.1}$$

A function $K : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ will be called a kernel if K is a bounded, continuous, symmetric density function (with respect to the Lebesgue measure),

$$\lim_{|u|\to\infty} |u| K(u) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 K(u) du < \infty. \tag{4.2}$$

Let $g(x)$ be the (unknown) marginal density function of $X_{\mathbf{t}}$. We assume that $g(x)$ is positive. Let K be a kernel and let $h_n > 0$, then the kernel-type (or Parzen-Rosenblatt-type) estimator of g is

$$g_n(x) = \frac{1}{|\mathcal{D}_n|} \frac{1}{h_n} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{D}_n} K\left(\frac{x - X_{\mathbf{i}}}{h_n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Let

$$a(x) = E\left(\Phi^2(Y_{\mathbf{t}}) | X_{\mathbf{t}} = x\right).$$

Denote by $\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}$ the set $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. Let $g_{\mathbf{u}}(x,y)$ be the joint density function of $X_{\mathbf{0}}$ and $X_{\mathbf{u}}$, if $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}$ and $x, y \in \mathbb{R}$. Let

$$a_{\mathbf{u}}(x,y) = E\big\{[\Phi(Y_{\mathbf{0}}) - r(X_{\mathbf{0}})]\,[\Phi(Y_{\mathbf{u}}) - r(X_{\mathbf{u}})] \,\big|\, X_{\mathbf{0}} = x, X_{\mathbf{u}} = y\big\}.$$

We shall assume that for each fixed $\mathbf{u}$ the functions

(4.3)
$a_{\mathbf{u}}(.,.), g_{\mathbf{u}}(.,.), a(.), r(.), g(.), r'(.), g'(.), r''(.), g''(.)$ are bounded and continuous.

Furthermore we shall suppose that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Lambda_n^d h_n} = L < \infty, \ \lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \infty \text{ and } \lim_{n\to\infty} h_n = 0 \tag{4.4}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} |T_n| h_n^4 = 0. \tag{4.5}$$

We concentrate on the case when $\xi_{\mathbf{t}}$ and $\xi_{\mathbf{s}}$ are dependent if $\mathbf{t}$ and $\mathbf{s}$ are close to each other.

First recall the asymptotic normality of the density estimator g_n.

Let $l_{\mathbf{u}}(x,y) = g_{\mathbf{u}}(x,y) - g(x)g(y), \mathbf{u} \in \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d$ and $x, y \in \mathbb{R}$. Let $l_{\mathbf{u}}$ denote $l_{\mathbf{u}}(x,y)$ as a function $l : \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, i.e. a function with values in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ the space of continuous real-valued functions over $\mathbb{R}^2$. Let

$$\|l_{\mathbf{u}}\| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |l_{\mathbf{u}}(x,y)|$$

be the norm of $l_{\mathbf{u}}$.

Let $x_1, \ldots, x_m$ be given distinct real numbers.

Let $\Sigma_l = \left(\int_{\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d} l_{\mathbf{u}}(x_i, x_j) d\mathbf{u} \right)_{1\le i,j\le m}$ and let D' be a diagonal matrix with diagonal elements $Lg(x_i)\int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)du$, $i = 1, \ldots, m$. Let $\Sigma' = \Sigma_l + D'$.

Theorem A. *(Theorem 1. in [FC06].) Assume that $l_{\mathbf{u}}$ is Riemann integrable (as a function $l : \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$) on each bounded closed d-dimensional rectangle $R \subset \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d$, moreover $\|l_{\mathbf{u}}\|$ is directly Riemann integrable (as a function $\|l\| : \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^d \to \mathbb{R}$). Let $x_1, \ldots, x_m$ be given distinct real numbers and assume that Σ' is positive definite. Suppose that there exists $1 < a < \infty$ such that (4.1) is satisfied and*

$$(h_n)^{-1} \le c|T_n|^{\frac{a^2}{(3a-1)(2a-1)}} \quad \text{for each } n. \tag{4.7}$$

If (4.4) and (4.5) are satisfied then

$$\sqrt{\frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d}} \{(g_n(x_i) - g(x_i)), i = 1, \ldots, m\} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma') \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Now we can state our main result. Let $v(x) = a(x) - r^2(x)$.

For a fixed positive integer m and fixed distinct real numbers $x_1, \ldots, x_m$ we introduce the notation

$$\sigma(x_t, x_s) = \int_{\mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}} a_{\mathbf{u}}(x_t, x_s) g_{\mathbf{u}}(x_t, x_s) d\mathbf{u}, \quad t, s = 1, \ldots, m, \tag{4.9}$$

$$\Sigma^{(m)} = \left(\frac{\sigma(x_t, x_s)}{g(x_t) g(x_s)} \right)_{1 \le t, s \le m}. \tag{4.10}$$

We assume that

$$\lim_{|z| \to \infty} z^3 |K(z)| = 0. \tag{4.11}$$

Theorem 4.1. *Let $(X_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}})$, $\mathbf{t} \in T_\infty$, be a strictly stationary two-dimensional random field and let $r(x) = \mathbb{E}\left(\Phi\left(Y_{\mathbf{t}}\right) | X_{\mathbf{t}} = x\right)$ be the regression function, where Φ is a bounded measurable function. Let K be a kernel. Assume that the conditions of Theorem A. on the function $l_{\mathbf{u}}$ are satisfied, and that Σ' is positive definite. Furthermore, assume that the marginal density function of $X_{\mathbf{t}}$ is positive, and that $a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}}$ is Riemann integrable (as a function $a \cdot g : \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$) on each bounded closed d-dimensional rectangle $R \subset \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}}$. Moreover, $\|a_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}}\|$ is directly Riemann integrable (as a function $\|a \cdot g\| : \mathbb{R}^d_{\mathbf{0}} \to \mathbb{R}$). Suppose there exists $1 < a < \infty$ such that (4.1) and (4.7) are satisfied. Assume that the matrix $\Sigma^{(m)} + D$ is positive definite where D is a diagonal matrix with diagonal elements $Lv(x_i) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) dt / g(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. If the conditions (4.3), (4.4), (4.5) and (4.11) hold then*

$$\sqrt{\frac{|\mathcal{D}_n|}{\Lambda_n^d}} \left\{ \left(r_n(x_i) - r(x_i) \right), i = 1, \ldots, m \right\} \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \Sigma\right), \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

where

$$\Sigma = \Sigma^{(m)} + D.$$

Remark 4.2. *We see that the asymptotic covariance matrix Σ in Theorem 4.1. is a combination of the asymptotic covariance matrices in the* *discrete and the continuous cases. In [Sch72] it is shown that (for independent identically distributed observations)* $r_n(x_1), \ldots, r_n(x_m)$ *is asymptotically normal with diagonal covariance matrix. In particular,* $\sqrt{nh_n}(r_n(x_i) - r(x_i)) \Rightarrow \mathcal{N}(0, c_i)$*, where* $c_i = v(x_i) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt/g(x_i)$*. Therefore, in Theorem 4.1. the diagonal part* D *corresponds to the limiting covariance matrix in the discrete case.*

In the last section we present simple examples that give numerical evidence for the phenomena described in Theorem 4.1. The results show that the diagonal matrix D of Theorem 4.1. explains well the dependence of the limit covariance matrix on the bandwidth.

Irodalomjegyzék

[Bia04] G. Biau, (2004), Spatial kernel density estimation. *Mathematical Methods of Statistics* **12** (2003), no.4, 371–390 (2004).

[BP03] D. Blanke, B. Pumo, (2002), Optimal sampling for density estimation in continuous time. *J. Time Ser. Anal.* **24** (2003), no.1, 1–23.

[Bol82] E. Bolthausen, (1982), On the central limit theorem for stationary mixing random fields. *Ann. Probability*, **10**, 1047–1050.

[Bos97] D. Bosq, (1997), Parametric rates of nonparametric estimators and predictors for continuous time processes. *The Annals of Statistics,* **25** (3), 982–1000.

[Bos98] D. Bosq, (1998), *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes.* Springer, New York - Berlin - Heidelberg.

[BC93] D. Bosq, N. Cheze, (1993), Erreur quadratique asymptotique optimale de l'estimateur non paramétrique de la régression pour des observations discrétisées d'un processus stationnaire á temps continu. *C. R. Acad. Sci. Paris* **317** (I), no. 9, 891–894.

[BMP99] D. Bosq, F. Merlevède, M. Peligrad (1999), Asymptotic normality for density kernel estimators in discrete and continuous time *Journal of Multivariate Analysis* **68**, 78–95.

[Bra83] C. Bradley (1983), Equivalent measures of dependence. *J. Multivar. Anal.* **13**, 167–176.

[Bra05] C. Bradley, (2005), Basic properties of strong mixing condition. A survey and some open questions. *Probability Surveys*, **2**, 107–144.

[Cai01] Z. Cai, (2001), Weighted Nadaraya-Watson regression estimation. *Statistics & Probability Letters,* **51**, 307–318.

[Cai70] R. Cairoli, (1970), Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications, *Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg, Lecture Notes in Math.* **124**, 1–27, Springer-Verlag, Berlin.

[CL86] J.V. Castellana, M.R. Leadbetter (1986), On smoothed probability density estimation for stationary processes *Stochastic Processes and their Applications,* **21**, 179–193.

[Cao94] R. Cao, A. Cuevas, W. Gonzáles-Manteiga (1994), A comparative study of several smoothing methods in density estimation *Comp Statist. Data Anal.,* **17**, 153–176.

[Cha68] S.D. Chatterji, (1968), Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces, *Math. Scand.* **22**, 21–41.

[Che92] N. Cheze, (1992), Régression non paramétrique pour un processus à temps continu. *C. R. Acad. Sci. Paris* **315** (I), 1009–1012.

[Cre91] N. A. C. Cressie, (1991), *Statistics for Spatial Data.* Wiley, New York.

[Ded98] J. Dedecker, (1998), A central limit theorem for stationary random fields, *Probab. Theory Relat. Fields.*, **110**, 397–426.

[DG85] L. Devroye, L. Györfi, (1985), *Nonparametric density estimation. The L_1 view.* Wiley, New York.

[Doo53] J.L. Doob, (1953), *Stochastic processes.* Wiley, New Yoerk.

[Dou94] P. Doukhan, (1994), *Mixing. Properties and Examples.* Lecture Notes in Statistics **85**, Springer, New York.

[Faz83] I. Fazekas, (1983), Convergence of vector-valued martingales with multidimensional indices. *Publ. Math. Debrecen*, **30**, 157–164.

[Faz87] I. Fazekas, (1987), On the convergence of linear martingales. *Publ. Math. Debrecen*, **34**, 99–104.

[Faz88] I. Fazekas, (1988), On the convergence of regression type martingal fields. *Proc. of the 5th Pannonian Symp., Reidel, Dordrecht*, 43–52.

[Faz03] I. Fazekas, (2003), Limit theorems for the empirical distribution function in the spatial case. *Statistics & Probability Letters*, **62**, 251–262.

[Faz05] I. Fazekas, (2005), Burkholder's inequality for multiindex martingales. *Annales Mathematicae et Informaticae*, **32**, 45–51.

[Faz07] I. Fazekas, (2007), Central limit theorems for kernel type density estimators. *Proceedings of the 7th International Conference on Applied Informatics,* Eger, (Vol. 1), 209–219.

[FC04] I. Fazekas, A. Chuprunov, (2004), A central limit theorem for random fields. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis,* **20** (1), 93–104, www.emis.de/journals/AMAPN.

[FC06] I. Fazekas, A. Chuprunov, (2006), Asymptotic normality of kernel type density estimators for random fields. *Stat. Inf. Stoch. Proc.* **9**, 161–178.

[FK00] I. Fazekas, A. G. Kukush, (2000), Infill asymptotics inside increasing domains for the least squares estimator in linear models. *Stat. Inf. Stoch. Proc.*, **3**, 199–223.

[FK02] I. Fazekas, A. G. Kukush, (2002), A central limit theorem for mixing random fields and its statistical applications. *Limit theorems in probability and statistics (Balatonlelle, 1999)*, Vol. **II**, pp. 59–75, János Bolyai Math. Soc., Budapest.

[FKT00] I. Fazekas, A.G. Kukush, T. Tómács, (2000), On the Rosenthal inequality for mixing fields. *Ukrain. Mat. Zh.*, **52** (2), 266–276., translation in *Ukrainian Math. J.*, **52** (2), 305–318.

[Guy95] X. Guyon, (1995), *Random Fields on a Network. Modeling, Statistics, and Applications.* Springer, New York.

[Gut76] A. Gut, (1995), Convergence of reversed martingales with multidimensional indices, *Duke Math. J.*, **43**, 269–275.

[HV90] J.D. Hart, P. Vieu (1990), Data-driven bandwidth choice for density estimation based on dependent data. *The Annals of Statistics* **18**, (2), 873–890.

[Hey80] C. C. Heyde, (1980), On a probabilistic analogue of the Fibonacci sequence, *J. Appl. Probab.*, **17**, 1079–1082.

[HF57] E. Hille, R.S. Phillips, (1957), *Functional Analysis and Semi-groups.* AMS, Providence.

[Ibr59] I.A. Ibragimov, (1959), Some limit theorems for stochastic processes stationary in the strict sense. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **125**, 711–714.

[Ibr62] I.A. Ibragimov, (1962), Some limit theorems for stationary processes. *Theory Probab. Appl.*, **7**, 349–382.

[IL71] I.A. Ibragimov, Yu. V. Linnik, (1971), *Independent and Stationary Sequences of Random Variables.* Wolters-Noordhoff, Groningen.

[Kim97] T.Y. Kim, (1997), Asymptotically optimal bandwidth selection rules for the kernel density estimator with dependent observations., *Journal of Statistical Planning and Inference*, **59**, 321–336.

[KR60] A.N. Kolmogorov, Y.A. Rozanov, (1960), On the strong mixing conditions for stationary Gaussian sequences., *Theory Probab. Appl.*, **5**, 204–207.

[Kho02] D. Khosnevisan, (2002), *Multiparameter Processes*, Springer-Verlag, New York.

[Lah96] S. N. Lahiri, (1996), On inconsistency of estimators based on spatial data under infill asymptotics., *Sankhya*, **58**, Ser. A, 403–417.

[Lah03] S. N. Lahiri, (2003), Central limit theorems for weighted sums of a spatial process under a class of stochastic and mixed designs., *Sankhya*, **65**, 356–388.

[LKC99] S.N. Lahiri, M.S. Kaiser, N. Cressie, N. J. Hsu, (1999), Prediction of spatial cumulative distribution functions using subsampling. *J. Amer. Statist. Assoc.* **94** (445), 86–110.

[Mil94] C. Miller, (1994), Three theorems for ρ^*-mixing fields, *J. of Theoretical Probability* **7**, 4, 867–882.

[MQ73] J. B. MacQueen, (1973), A linear extension of the martingale convergence theorem, *Ann. Probab.*, **1**, 263–271.

[MN88] J. R. Magnus, H. Neudecker, (1988), *Matrix Differential Calculus*, John Wiley and Sons, Chichester - New York - Weinheim - Brisbane - Singapore - Toronto.

[Mas83] E. Masry, (1983), Probability density estimation from sampled data. *IEEE Transactions in information theory*, vol. **IT-29**, no. 5, 696–709.

[MPU06] F. Merlevède, M. Peligrad, S. Utev, (2006), Recent advances in invariance principles for stationary sequences, *Probability Surveys*, **3**, 1–36.

[Met78] Ch. Métraux, (1978), Quelques intégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel, *Séminaire de Probabilités XII, Université de Strasbourg, Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, **649**, 170–179.

[Nad64] E.A. Nadaraya, (1964), On estimating regression. *Theor. Probability Appl.,* **9**, 141–142.

[NT00] Cs. Noszály, T. Tómács, (2000), A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables, *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, **43**, 61–78.

[PKP08] B. Park, T.Y.K. Kim, J-S. Park, S.Y. Hwang, (2008), Practically applicable central limit theorem for spatial statistics. *Math. Geosci,* **41** (5), 555–569.

[Par62] E. Parzen, (1962), On estimation of a probability density and mode.*Ann. Math. Statist,* **33**, 1065–1076.

[PY01] H. Putter, G. A. Young, (2001), On the effect of covariance function estimation on the accuracy of kriging predictors. *Math. Bernoulli,* **7** (3), 421–438.

[Rao83] B.L.S. Prakasa Rao, (1983), *Nonparametric Functional Estimation.* Academic Press, INC. London.

[Ros56] M. Rosenblatt, (1956), A central limit theorem and a string mixing condition. *Proc. Nat. Ac. Sc. USA.,***42**, 43–47.

[Ros56b] M. Rosenblatt, (1956), Remarks on some nonparametric estimates of a density *Ann. Math. Statist,* **27**, 832–835.

[Sch72] E.F. Schuster, (1972), Joint asymptotic distribution of the estimated regression function at a finite number of distinct points. *The Annals of Mathematical Statistics,* **43** (1), 84–88.

[Sca61] F. Scarola, (1961), Abstract martingale convergence theorems. *Pacific J. Math.,* **11**, 347–374.

[Sen81] E. Seneta, (1981), *Non-negative Matrices and Markov Chains*, Springer-Verlag, New York.

[Shi95] A.N. Shiryaev, (1995), *Probability (Graduate Texts in Mathematics)*, Springer.

[Sko01] M. Sköld, (2001), The asymptotic variance of the continuous-time kernel estimator with applications to bandwidth selection. *Stat. Inference Stoch. Process.*, **4** no. 1, 99–117.

[SkoC] M. Sköld, (2001), A bias-correction for cross-validation bandwidth selection when a kernel estimate is based on dependent data. *J. Time Series Anal.*, **22** , no. 4, 493–503.

[Ste72] C. Stein, (1972), A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. *Proc. of the Sixth Berkeley Sympos. on Math. Stat. Prob.* **2**, 583–602.

[Ter02] Gy. Terdik, (2002), Parameter estimation for non-gaussian multiple time series in frequency domain, *Proceedings of the conference dedicated to the* 90^{th} *anniversary of Boris Vladimirovich Gnedenko, Kyiv, Theory Stoch. Process*, **8**, No 3-4, 358–374.

[Tom01] T. Tómács, (2001), Convergence of homogeneous matrix-valued Λ-martingales, *Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae* **27**, 53–56.

[WJ95] M.P. Wand, M.C. Jones, (1995), *Kernel smoothing.* Chapman and Hall.

[Wat64] G.S. Watson, (1964), Smooth regression analysis. *Sankhya. Ser. A* **26**, 359–372.

[WR59] V.A. Wolkonski, Y.A. Rozanov (1959), Some limit theorems for random functions, Part I. *Theory Probab. Appl.* **4**, 178–197.

[ZL07] J. Zhu, S. N. Lahiri, (2007), Bootstrapping the empirical distribution function of a spatial process. *Stat. Inference Stoch. Process.* **10**, (2) 107–145.

Tárgymutató

A szerző publikációi

Referált folyóiratban megjelent cikkek:

1. Karácsony Zs., *Autoregressive type martingale fields*, AMAPN 22 (2006), 101 – 111.
   http://www.emis.de/journals/AMAPN/vol22_1/11.html

2. Karácsony Zs., *A central limit theorem for mixing random fields*, Miskolc Mathematical Notes 7 (2006), Number 2, 147 – 160.

3. Karácsony Zs., Filzmoser P., *Asymptotic normality of kernel type regression estimators for random fields*, Jurnal of Statistical Planning and Inference 140 (2010), 872 – 886.

Közlésre benyújtott cikkek:

1. Karácsony Zs., Libor Zs., *Longest runs in coin tossing. Comparison of recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations*, Beküldve az ”Acta Univ. Sapientiae, Mathematica”-ba.

2. Fazekas I., Karácsony Zs., Libor Zs., *A leghosszabb szériák vizsgálata*, Beküldve az ”Alkalmazott Matematikai Lapok”-ba.

Konferenciakiadványban megjelent cikkek:

1. Karácsony Zs., *Longest runs in coin tossing.* MicroCAD 2010 International Scientific Conference, vol H., Miskolci Egyetem, Miskolc (2010), 33 – 38.

2. Fazekas I., Karácsony Zs., Libor Zs., *Interesting questions in cointossing.* 33rd International Congress of Teachers of Mathematics, Physics and IT, Budapest (2009), 119 – 125.

3. Karácsony Zs., *Leghosszabb szériák vizsgálata.* Doktoranduszok fóruma, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Miskolc (2009), 71 – 76.

4. Karácsony Zs., *Certain properties of the Nadaraya-Watson estimator*, MicroCAD 2009 International Scientific Conference, vol G., Miskolci Egyetem, Miskolc (2009), 29 – 34.

5. Karácsony Zs., *A regressziós függvény becslésének határeloszlása*, Doktoranduszok fóruma, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Miskolc (2008), 29 – 34.

6. Karácsony Zs., *Asymptotic normality of kernel type regression estimators for random fields*, MicroCAD 2008 International Scientific Conference, vol G., Miskolci Egyetem, Miskolc (2008), 31 – 36.

7. Karácsony Zs., *Centrális határeloszlás tételek véletlen mezőkre*, Doktoranduszok fóruma, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Miskolc (2006), 78 – 83.

8. Karácsony Zs., *A central limit theorem for mixing random fields*, MicroCAD 2006 International Scientific Conference, vol G., Miskolci Egyetem, Miskolc (2006), 59 – 65.

9. Karácsony Zs., *Autoregressive type martingale fields*, MicroCAD 2005 International Scientific Conference, vol G., Miskolci Egyetem, Miskolc (2005), 79 – 85.

10. Karácsony Zs., *Autoregresszív típusú martingál mezők*, Doktoranduszok fóruma, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Miskolc (2005), 87 – 93.

11. Karácsony Zs., *Neurális hálók alkalmazásai*, Doktoranduszok fóruma, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Miskolc (2004), 126 – 131.

A szerző konferencia-előadásai

1. Karácsony Zs., *Longest runs in coin tossing.* MicroCAD 2010 International Scientific Conference, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2010. március 18 – 19.

2. Karácsony Zs., Libor Zs., *Longest runs in coin tossing. Recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations*, 8th ICAI, Eger, 2010. január 27 – 30.

3. Karácsony Zs., *Asymptotic normality of kernel type regression estimators for random fields*, 14th Young Statisticians Meeting, Basovizza (Trieste), Olazország, 2009. október 17 – 18.

4. Karácsony Zs., *Certain properties of the Nadaraya-Watson estimator*, 16th European Young Statisticians Meeting, Bukarest, Románia, 2009. augusztus 24 – 28.

5. Karácsony Zs., *Asymptotic normality of kernel type regression estimators for random fields*, International conference Probability and Statistics with Application, Debreceni Egyetem, 2009. június 8 – 12.

6. Fazekas I., Karácsony Zs., Libor Zs., *Longest runs in coin tossing. Recursive formulae, asymptotic theorems, computer simulations*, International conference Probability and Statistics with Application (poszter), Debreceni Egyetem, 2009. június 8 – 12.

7. Karácsony Zs., *Asymptotic normality of kernel type regression estimators for random fields*, XXVII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Zakopane, Lengyelország, 2009. május 31 - június 5.

8. Karácsony Zs., *Certain properties of the Nadaraya-Watson estimator*, MicroCAD 2009 International Scientific Conference, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2009. március 19 – 20.

9. Karácsony Zs., *A regressziós függvény becslésének határeloszlása*, Doktoranduszok fóruma, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Miskolc, 2008. november 13.

10. Karácsony Zs., *Asymptotic normality of kernel type regression estimators for random fields*, MicroCAD 2008 International Scientific Conference, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2008. március 20 – 21.

11. Karácsony Zs., *Centrális határeloszlás tételek véletlen mezőkre*, Doktoranduszok fóruma, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Miskolc, 2006. november. 7.

12. Karácsony Zs., *A central limit theorem for mixing random fields*, MicroCAD 2006 International Scientific Conference, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2006. március 16 – 17.

13. Karácsony Zs., *Autoregresszív típusú martingál mezők*, Doktoranduszok fóruma, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Miskolc, 2005. november. 9.

14. Karácsony Zs., *Autoregressive type martingale fields*, MicroCAD 2005 International Scientific Conference, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2005. március 10 – 11.

15. Karácsony Zs., *Neurális hálók alkalmazásai*, Doktoranduszok fóruma, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Miskolc, 2004. november. 9.

16. Karácsony Zs., *A neurális hálók alapjai és alkalmazásai*, A Debreceni Egyetem Hatvani István Szakkollégiuma Országos Hallgatói Konferenciája, Debrecen, 2003. április 24 – 25.