

Numerikus módszerek vizsgazárthelyi
műszaki informatika szakos hallgatók részére

Név, tanulókör:.....

1. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 4.5 & -3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot.

a/ Adja meg a $B = A^T A$ mátrix $B = LL^T$ Cholesky-felbontását! (3)

b/ Az előbbi felbontás felhasználásával oldja meg a $Bx = [1, 1]^T$ egyenletrendszert LU -módszerrel! (2)

c/ A félévben tanult valamelyik módszerrel invertálja az L mátrixot és ennek felhasználásával adja meg a B inverzét is! (Használja fel: $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$, ha $M \in R^{n \times n}$.) (3)

2. a/ Adja meg a permutáció mátrix definícióját! (1)

b/ Igazolja, hogy egy permutációmátrixnak, ha nem az egységmátrix, akkor nincs LU -felbontása! (3)

c/ Adja meg az $n \times n$ -es P permutáció mátrix *Frobenius*, 1-es, ∞ és 2-es normáját (indoklással)! (1+1+1+2)

3. Tekintsük az

$$\begin{cases} y' = (2x + 1)y \\ x_0 = 1; \quad y_0 = y(x_0) = 2 \end{cases}$$

kezdetiérték feladatot. Adja meg negyedrendű *Runge-Kutta* formulával az $y_1 \approx y(0.2)$ közelítő értéket $h = 0.2$ lépésközzel! (4)

4. Ismertesse a hatvány-módszert (input, output jelentése, leállási feltétel is)! (4)

5. Ismertesse az $f(x) = 0 \quad (x \in [a, b])$ egyismeretlenes egyenlet megoldására szolgáló Newton-módszert (ábra, algoritmus, a konvergencia elégséges feltétele, hibabecslés)! (3)

6. Az $f(x)$ függvényről a következő táblázatot ismerjük:

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
$f(x)$	2.38	2.45	2.50	2.44	2.37	2.28	2.10

Tudjuk továbbá, hogy $-5 \leq f''(x) \leq 2$, $|f^{(IV)}(x)|_{0 \leq x \leq 2} \leq 3.5$

a/ Írja fel az $x_1 = 1.4, x_2 = 1.5, x_3 = 1.6$ pontokra támaszkodó elsőfokú *Lagrange* interpolációs polinomot, ennek segítségével $f(1.46)$ közelítő értékét és adjon a közelítésre hibakorlátot! (2+1+1)

b/ Legyen $h = 0.1$. Adjon $O(h^2)$ hibával közelítést $f''(1.5)$ -re! (1)

c/ Adja meg az $\int_{1.1}^{1.7} f(x)dx$ közelítő értékét összetett *Simpson*-formulával $h = 0.2$ ekvidisz-tans lépésközzel, majd végezzen hibabecslést! (1+1)

7. Legyen $x \in R^n$! Írjon MATLAB programot az $A = xx^T$ mátrix előállítására, úgy, hogy A -nak csak a felső háromszög részét tároljuk diagonális tárolási formában! (5)

(0–15 pont: [1]; 16–21 pont: [2]; 22–27 pont: [3]; 28–33 pont: [4]; 34–40 pont: [5])

Numerikus módszerek, Numerikus analízis vizsgázárthelyi
műszaki informatika szakos és mérnök informatikus hallgatók részére

Név, tanulókör:.....

1. Tekintsük az $\begin{bmatrix} 4.5 & -3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \end{bmatrix}$ egyenletrendszert.

a/ Adja meg az együtthatómátrix LU -felbontását! (3)

b/ Oldja meg az egyenletrendszert LU - módszerrel! (2)

c/ A félévben tanult valamelyik módszerrel invertálja az együtthatómátrixot! (3)

2. a/ Adja meg az egység alsó háromszögmátrix definícióját! (1)

b/ Milyen permutáció mátrixot használna az 1. feladatban, ha részleges főelem kiválasztást alkalmazna? (1)

c/ Adja meg az $n \times n$ -es P permutáció mátrix 1-es, ∞ , *Frobenius*, és 2-es normáját (indoklással)! (1+1+1+2)

3. Az $Ax = b$ egyenletrendszer pontos megoldása legyen x , a közelítő pedig \hat{x} .

a/ Hogyan definiáljuk az \hat{x} valamilyen normában mért abszolút és relatív hibáját, ill. hibakorlátját? (1)

b/ Hogyan értelmezzük az A mátrix kondíciószámát? (1)

c/ Adjon becslést az \hat{x} relatív hibájára! (2)

4. Ismertesse a lebegőpontos számhalmaz modelljét! Hány eleme van a lebegőpontos halmaznak? (3)

5. Ismertesse az $x = g(x)$ ($x \in [a, b]$) egyismeretlenes egyenlet megoldására szolgáló fixpontiterációs módszert (ábra, algoritmus, a konvergencia elégséges feltétele, hibabecslés)! (4)

6. Az $f(x)$ függvényről a következő táblázatot ismerjük:

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	2.38	2.45	2.50	2.44	2.37	2.28	2.10	2.05

Tudjuk továbbá, hogy $|f''(x)|_{0 \leq x \leq 2} \leq 2$, $|f'''(x)|_{0 \leq x \leq 2} \leq 3.5$

a/ Írja fel az $x_1 = 1.3, x_2 = 1.4, x_3 = 1.5$ pontokra támaszkodó másodfokú *Lagrange* interpolációs polinomot, ennek segítségével $f(1.37)$ közelítő értékét és adjon a közelítésre hibakorlátot! (3+1+1)

b/ Legyen $h = 0.1$. Adjon $O(h^2)$ hibával közelítést $f'(1.5)$ -re! (1)

c/ Adja meg az $\int_{1.1}^{1.8} f(x)dx$ közelítő értékét *trapéz*-formulával $h = 0.1$ ekvidisztans lépésközzel, majd végezzen hibabecslést! (2+1)

7. Legyen $x \in R^n$! Írjon MATLAB programot az $A = xx^T$ szimmetrikus mátrix előállítására, úgy, hogy A -nak csak a felső háromszög részét tároljuk sorfolytonos csomagolt tárolási formában! (5)

(0–15 pont: 1; 16–21 pont: 2; 22–27 pont: 3; 28–33 pont: 4; 34–40 pont: 5)

Numerikus módszerek, Numerikus analízis vizsgázárthelyi
műszaki informatika szakos és mérnök-informatikus hallgatók részére

Név, Neptun-kód:.....

1. Adja meg a q mennyiség közelítő értékét, annak abszolút és relatív hibakorlátját, ha $r = 40 \pm 0.3$; $s = 50 \pm 0.1$; $t = 20 \pm 0.2$, és

$$q = \frac{r + s + t}{s - r} \tag{3}$$

2.

a/ Adja meg a permutáció mátrix definícióját! (1)

b/ Ortogonális-e egy permutáció mátrix? (Indokolja is!) (2)

c/ Az A mátrix elemeit úgy kaptuk, hogy egy $n \times n$ -es P permutáció mátrix összes 1-es elemét kicseréltük véletlenszerűen vagy 7-esre, vagy -7 -esre, a többi elemét változatlanul hagytuk. Adja meg az A mátrix 1-es, ∞ , *Frobenius*, és 2-es normáját, indoklással! (1+1+1+2)

3. Az $Ax = b$ egyenletrendszer pontos megoldása legyen x , a közelítő pedig \hat{x} .

a/ Hogyan definiáljuk valamilyen normában az \hat{x} abszolút és relatív hibáját, ill. hibakorlátját? (1+1)

b/ Mi az \hat{x} reziduális hibája? (1)

c/ Hogyan értelmezzük az A mátrix kondíciós számát? (1)

d/ Ismertesse \hat{x} direkt hibájának a reziduális hiba segítségével történő utólagos becslésére szolgáló tételt! (*Auchmuty* tétele) (2)

4. Ismertesse az iteratív javítást (mire szolgál, algoritmus, leállási feltétel)! (4)

5. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ mátrixot, valamint a $v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kezdővektort.

a/ Határozza meg A összes sajátértékét és mindegyikhez egy-egy sajátvektort! (2+2)

b/ Ismertesse a hatványmódszert (mire szolgál, algoritmus, output, leállási feltétel)! (4)

c/ Hajtsa végre a hatványmódszer első iterációját a megadott A , és $v^{(0)}$ esetén! Ezen konkrét példában (ha tovább folytatnánk az iterációt) határértékben mihez közelít az output? (1+1)

FORDÍTS!

6. Az $f(x)$ függvényről a következő táblázatot ismerjük:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	2.35	2.45	2.50	2.42	2.31	2.18	2.10

Tudjuk továbbá, hogy $|f'''(x)|_{0 \leq x \leq 1} \leq 2$, $|f^{(IV)}(x)|_{0 \leq x \leq 1} \leq 2.5$

a/ Írja fel az $x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6$ pontokra támaszkodó másodfokú *Lagrange* interpolációs polinomot, ennek segítségével $f(0.33)$ közelítő értékét és adjon a közelítésre hibakorlátot! (3+1+1)

b/ Legyen $h = 0.1$ és adjon $O(h^2)$ hibával közelítést $f'(0.5)$ -re! (1)

c/ Adja meg az $\int_{0.1}^{0.7} f(x)dx$ közelítő értékét összetett *Simpson*-formulával, az elérhető maximális pontossággal, majd végezzen hibabecslést! (2+1)

7. Legyen $x, y \in R^n$! Valamilyen célra $A = xy^T$ mátrixnak csak a felsőháromszög mátrix részére, azaz a $B = \text{triu}(A)$ -ra van szükségünk. Írjon MATLAB programot B előállítására, úgy, hogy felesleges elemet ne számoljon ki és B -t oszlopfolytonos csomagolt tárolási formában tároljuk (tegyük fel, hogy nincs is helyünk hosszabb tárolási formára)! (5)

(0–15 pont: 1; 16–21 pont: 2; 22–27 pont: 3; 28–33 pont: 4; 34–40 pont: 5)