12. A GALOIS HOZZÁRENDELÉSEK TULAJDONSÁGAI

12.1.Tétel (a Galois elmélet főtétele). *Legyen $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ véges testbővítés. Az $\mathcal{A} \leq \mathcal{G}(K \subseteq L)$ részcsoportra és a $K \subseteq T \subseteq L$ köztes számtestre tekintsük az*

$$\mathcal{A} \overset{L^{\square}}{\longmapsto} L^{\mathcal{A}} \text{ és } T \overset{\mathcal{G}(\square \subseteq L)}{\longmapsto} \mathcal{G}(T \subseteq L)$$

Galois hozzárendeléseket: *ekkor $K \subseteq L^{\mathcal{A}} \subseteq L$ köztes számtest és $\mathcal{G}(T \subseteq L) \leq \mathcal{G}(K \subseteq L)$ részcsoport. Az így megadott leképezésekre:*

$$\mathcal{A} \longmapsto L^{\mathcal{A}} \longmapsto \mathcal{G}(L^{\mathcal{A}} \subseteq L) = \mathcal{A}$$

és amennyiben $T \subseteq L$ normális bővítés, akkor

$$T \longmapsto \mathcal{G}(T \subseteq L) \longmapsto L^{\mathcal{G}(T \subseteq L)} = T.$$

Ha $K \subseteq L$ normális testbővítés (ilyenkor tetszőleges $K \subseteq T \subseteq L$ köztes számtestre a $T \subseteq L$ bővítés is normális), akkor a tekintett $L^{\square}$ és $\mathcal{G}(\square \subseteq L)$ Galois hozzárendelések egymás inverzei.
Ha $K \subseteq L$ normális testbővítés és $\mathcal{A} \lhd \mathcal{G}(K \subseteq L)$ normális részcsoport, akkor a $K \subseteq L^{\mathcal{A}} \subseteq L$ köztes számtest normális bővítése K-nak.
Ha a $K \subseteq T \subseteq L$ köztes számtest normális bővítése K-nak, akkor a megszorítás res: $\mathcal{G}(K \subseteq L) \longrightarrow \mathcal{G}(K \subseteq T)$ *leképezése olyan homomorfizmus, amelynek a magjára*

$$\ker(\text{res}) = \mathcal{G}(T \subseteq L) \lhd \mathcal{G}(K \subseteq L),$$

amennyiben $K \subseteq L$ is normális bővítés, akkor res *szürjektív és*

$$\mathcal{G}(K \subseteq L)/\mathcal{G}(T \subseteq L) \cong \mathcal{G}(K \subseteq T).$$

Bizonyítás. A fentiekben felsorolt mindegyik állításnak egyenként megadtuk a bizonyítását a 11. fejezetben.

□□□

12.2.Állítás. *Legyen $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ tetszőleges testbővítés. Ekkor a $K \subseteq T_1 \subseteq L$ és $K \subseteq T_2 \subseteq L$ köztes számtestekre, valamint az $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{G}(K \subseteq L)$ és $\mathcal{A}_2 \leq \mathcal{G}(K \subseteq L)$ részcsoportokra teljesülnek az alábbiak.*
Ha $T_1 \subseteq T_2$, akkor $\mathcal{G}(T_2 \subseteq L) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \subseteq L)$. Ha $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, akkor $L^{\mathcal{A}_2} \subseteq L^{\mathcal{A}_1}$. Továbbá:

$$\mathcal{G}(T_1 \subseteq L) * \mathcal{G}(T_2 \subseteq L) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq L)\ ,\ \mathcal{G}(T_1 \subseteq L) \cap \mathcal{G}(T_2 \subseteq L) = \mathcal{G}(T_1 \vee T_2 \subseteq L),$$

$$L^{\mathcal{A}_1} \vee L^{\mathcal{A}_2} \subseteq L^{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}\ ,\ L^{\mathcal{A}_1} \cap L^{\mathcal{A}_2} = L^{\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2}.$$

Bizonyítás.
A $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow \mathcal{G}(T_2 \subseteq L) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \subseteq L)$ és az $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \Rightarrow L^{\mathcal{A}_2} \subseteq L^{\mathcal{A}_1}$ implikációk nyilvánvalóak.
A $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1$ tartalmazásból $\mathcal{G}(T_1 \subseteq L) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq L)$ és a $T_1 \cap T_2 \subseteq T_2$ tartalmazásból $\mathcal{G}(T_2 \subseteq L) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq L)$ adódik. Mivel $\mathcal{G}(T_1 \subseteq L) * \mathcal{G}(T_2 \subseteq L)$ a legszűkebb olyan részcsoportja $\mathcal{G}(K \subseteq L)$-nek, amely a $\mathcal{G}(T_1 \subseteq L)$ és $\mathcal{G}(T_2 \subseteq L)$ részcsoportok mindegyikét tartalmazza, ezért

$$\mathcal{G}(T_1 \subseteq L) * \mathcal{G}(T_2 \subseteq L) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq L).$$

A $T_1 \subseteq T_1 \vee T_2$ tartalmazásból $\mathcal{G}(T_1 \vee T_2 \subseteq L) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \subseteq L)$ és a $T_2 \subseteq T_1 \vee T_2$ tartalmazásból $\mathcal{G}(T_1 \vee T_2 \subseteq L) \subseteq \mathcal{G}(T_2 \subseteq L)$ adódik, ezért

$$\mathcal{G}(T_1 \vee T_2 \subseteq L) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \subseteq L) \cap \mathcal{G}(T_2 \subseteq L).$$

Ha $\Phi \in \mathcal{G}(T_1 \subseteq L) \cap \mathcal{G}(T_2 \subseteq L)$, akkor $T_1 \vee T_2$-nek egy tetszőleges

$$w = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{c_1d_1 + c_2d_2 + ... + c_md_m}$$

elemére (2.2.Állítás)

$$\Phi(w) = \Phi\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{c_1d_1 + c_2d_2 + ... + c_md_m}\right) = \frac{\Phi(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)}{\Phi(c_1d_1 + c_2d_2 + ... + c_md_m)} =$$

$$= \frac{\Phi(a_1)\Phi(b_1) + \Phi(a_2)\Phi(b_2) + ... + \Phi(a_n)\Phi(b_n)}{\Phi(c_1)\Phi(d_1) + \Phi(c_2)\Phi(d_2) + ... + \Phi(c_m)\Phi(d_m)} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{c_1d_1 + c_2d_2 + ... + c_md_m} = w,$$

ahol $c_1d_1 + c_2d_2 + ... + c_md_m \neq 0$ és felhasználtuk, hogy

$$\Phi(a_i) = a_i, \Phi(c_j) = c_j, \Phi(b_i) = b_i \text{ és } \Phi(d_j) = d_j$$

az $a_i, c_j \in T_1$ és $b_i, d_j \in T_2$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ számokra. Tehát $\Phi \in \mathcal{G}(T_1 \vee T_2 \subseteq L)$, ami azt eredményezi, hogy

$$\mathcal{G}(T_1 \vee T_2 \subseteq L) = \mathcal{G}(T_1 \subseteq L) \cap \mathcal{G}(T_2 \subseteq L).$$

Az $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$ tartalmazásból $L^{\mathcal{A}_1} \subseteq L^{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ és az $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_2$ tartalmazásból $L^{\mathcal{A}_2} \subseteq L^{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ adódik. Mivel $L^{\mathcal{A}_1} \vee L^{\mathcal{A}_2}$ a legszűkebb olyan számtest, amely az $L^{\mathcal{A}_1}$ és $L^{\mathcal{A}_2}$ (köztes) számtestek mindegyikét tartalmazza, ezért

$$L^{\mathcal{A}_1} \vee L^{\mathcal{A}_2} \subseteq L^{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}.$$

Az $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ tartalmazásból $L^{\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2} \subseteq L^{\mathcal{A}_1}$ és az $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ tartalmazásból $L^{\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2} \subseteq L^{\mathcal{A}_2}$ adódik, ezért

$$L^{\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2} \subseteq L^{\mathcal{A}_1} \cap L^{\mathcal{A}_2}.$$

Legyen $a \in L^{\mathcal{A}_1} \cap L^{\mathcal{A}_2}$ és $\Theta \in \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$, ekkor a 14.4.Állítás szerint

$$\Theta = \Phi_1 \circ \Psi_1 \circ \Phi_2 \circ \Psi_2 \circ ... \circ \Phi_n \circ \Psi_n,$$

ahol $n \geq 1$ egész és $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \in \mathcal{A}_1$ valamint $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n \in \mathcal{A}_2$. Most

$$\Phi_1(a) = \Phi_2(a) = ... = \Phi_n(a) = \Psi_1(a) = \Psi_2(a) = ... = \Psi_n(a) = a$$

miatt

$$\Theta(a) = (\Phi_1 \circ \Psi_1 \circ \Phi_2 \circ \Psi_2 \circ ... \circ \Phi_n \circ \Psi_n)(a) = \Phi_1(\Psi_1(\Phi_2(\Psi_2(...(\Phi_n(\Psi_n(a)))...)))) = a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $a \in L^{\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2}$. Tehát $L^{\mathcal{A}_1} \cap L^{\mathcal{A}_2} \subseteq L^{\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2}$, ami azt eredményezi, hogy

$$L^{\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2} = L^{\mathcal{A}_1} \cap L^{\mathcal{A}_2}.$$

□□□

12.3.Tétel. *A $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ véges normális testbővítés esetén a $K \subseteq T_1 \subseteq L$ és $K \subseteq T_2 \subseteq L$ köztes számtestekre, valamint az $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{G}(K \subseteq L)$ és $\mathcal{A}_2 \leq \mathcal{G}(K \subseteq L)$ részcsoportokra:*

$$\mathcal{G}(T_1 \subseteq L) * \mathcal{G}(T_2 \subseteq L) = \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq L),$$

$$L^{\mathcal{A}_1} \vee L^{\mathcal{A}_2} = L^{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}.$$

Bizonyítás. A 12.2.Állítás és a 11.3.Következmény szerint

$$L^{\mathcal{G}(T_1\subseteq L)*\mathcal{G}(T_2\subseteq L)} = L^{\mathcal{G}(T_1\subseteq L)} \cap L^{\mathcal{G}(T_2\subseteq L)} = T_1 \cap T_2 = L^{\mathcal{G}(T_1\cap T_2\subseteq L)},$$

ahonnan $\mathcal{G}(T_1 \subseteq L) * \mathcal{G}(T_2 \subseteq L) = \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq L)$ következik. Valóban, ha $L^{\mathcal{A}} = L^{\mathcal{B}}$ az $\mathcal{A} \leq \mathcal{G}(K \subseteq L)$ és $\mathcal{B} \leq \mathcal{G}(K \subseteq L)$ részcsoportokra, akkor a 11.10.Tétel szerint

$$\mathcal{A} = \mathcal{G}(L^{\mathcal{A}} \subseteq L) = \mathcal{G}(L^{\mathcal{B}} \subseteq L) = \mathcal{B}.$$

A 12.2.Állítás és a 11.10.Tétel szerint

$$\mathcal{G}(L^{\mathcal{A}_1} \vee L^{\mathcal{A}_2} \subseteq L) = \mathcal{G}(L^{\mathcal{A}_1} \subseteq L) \cap \mathcal{G}(L^{\mathcal{A}_2} \subseteq L) = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{G}(L^{\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2} \subseteq L),$$

ahonnan $L^{\mathcal{A}_1} \vee L^{\mathcal{A}_2} = L^{\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2}$ következik. Valóban, ha $\mathcal{G}(T' \subseteq L) = \mathcal{G}(T'' \subseteq L)$ a $K \subseteq T' \subseteq L$ és $K \subseteq T'' \subseteq L$ köztes számtestekre, akkor a 11.3.Következmény szerint

$$T' = L^{\mathcal{G}(T'\subseteq L)} = L^{\mathcal{G}(T''\subseteq L)} = T''.$$

□□□

12.4.Állítás. *Legyen $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ véges testbővítés. Ha $K \subseteq T_1 \subseteq L$ és $K \subseteq T_2 \subseteq L$ köztes számtestek és $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1$ normális bővítés, akkor a $\Phi \in \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$ relatív automorfizmuson a $\overline{\mathrm{res}}(\Phi) = \Phi \restriction T_1$ módon értelmezett*

$$\overline{\mathrm{res}} : \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) \longrightarrow \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1)$$

leképezés injektív. Nyilvánvaló, hogy $\overline{\mathrm{res}}$ a korábban vizsgált (lásd a 10.A.Definíciót*)*

$$\mathrm{res} : \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) \longrightarrow \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1)$$

homomorfizmusnak a leszűkítése a $\mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$ részcsoportra.
A $\mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1) \subseteq \mathcal{G}(K \subseteq T_1)$ tartalmazás miatt a fenti $\overline{\mathrm{res}}$ leképezés tekinthető egy

$$\mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) \longrightarrow \mathcal{G}(K \subseteq T_1)$$

„beágyazásnak” is.

Bizonyítás. Mivel $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \subseteq T_1 \vee T_2$ és $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1$ normális bővítés, ezért a

$$\Phi \in \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) \subseteq \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$$

tartalmazásokra valamint a 10.1.Állításra való tekintettel $\Phi \restriction T_1$ valóban relatív automorfizmusa a $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1$ testbővítésnek: $(\Phi \restriction T_1) \in \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1)$.
Ha a $\Phi', \Phi'' \in \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$ relatív automorfizmusokra

$$\overline{\mathrm{res}}(\Phi') = \Phi' \restriction T_1 = \Phi'' \restriction T_1 = \overline{\mathrm{res}}(\Phi'')$$

teljesül , akkor $\Phi'(a) = \Phi''(a)$ minden $a \in T_1$ elemre és $\Phi'(b) = \Phi''(b) = b$ minden $b \in T_2$ elemre.
Most $T_1 \vee T_2$-nek egy tetszőleges

$$w = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{c_1d_1 + c_2d_2 + ... + c_md_m}$$

elemére (2.2.Állítás)

$$\Phi'(w) = \Phi'\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{c_1d_1 + c_2d_2 + \dots + c_md_m}\right) = \frac{\Phi'(a_1)\Phi'(b_1) + \Phi'(a_2)\Phi'(b_2) + \dots + \Phi'(a_n)\Phi'(b_n)}{\Phi'(c_1)\Phi'(d_1) + \Phi'(c_2)\Phi'(d_2) + \dots + \Phi'(c_m)\Phi'(d_m)} =$$

$$= \frac{\Phi''(a_1)\Phi''(b_1) + \Phi''(a_2)\Phi''(b_2) + \dots + \Phi''(a_n)\Phi''(b_n)}{\Phi''(c_1)\Phi''(d_1) + \Phi''(c_2)\Phi''(d_2) + \dots + \Phi''(c_m)\Phi''(d_m)} = \Phi''\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{c_1d_1 + c_2d_2 + \dots + c_md_m}\right) = \Phi''(w),$$

ahol $c_1d_1 + c_2d_2 + \dots + c_md_m \neq 0$, valamint $a_i, c_j \in T_1$ és $b_i, d_j \in T_2$ az $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ indexekre. Tehát $\Phi' = \Phi''$.

□□□

12.5.Tétel. *Legyen $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ véges testbővítés. Ha a $K \subseteq T_1 \subseteq L$ és $K \subseteq T_2 \subseteq L$ köztes számtestekre $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2$ és $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1$ normális bővítések, akkor az előbbi* 12.4.Állításban *tekintett és a $\Phi \in \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$ relatív automorfizmuson a $\overline{\mathrm{res}}(\Phi) = \Phi \restriction T_1$ módon értelmezett*

$$\overline{\mathrm{res}} : \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) \longrightarrow \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1)$$

homomorfizmus szürjektív (ami a 12.4.Állítás *szerint azt jelenti, hogy ilyenkor $\overline{\mathrm{res}}$ bijektív).*

Bizonyítás. A $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1$ és $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2$ bővítések normalitása miatt (most $T_1 \subseteq T_1 \vee T_2$ és $T_2 \subseteq T_1 \vee T_2$ is normális bővítések) a 10.3.Állítást használva jutunk a

$$\mathrm{res} : \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) \longrightarrow \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1)$$

szürjektív csoport homomorfizmushoz, amelynek a magja a

$$\ker(\mathrm{res}) = \mathcal{G}(T_1 \subseteq T_1 \vee T_2) \lhd \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$$

normális részcsoport a $\mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$ Galois csoportban. Így a csoportok homomorfizmus tétele (14.16.Állítás 11.része) szerint

$$\mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1) \cong \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)/\mathcal{G}(T_1 \subseteq T_1 \vee T_2)$$

és itt a 12.3.Tétel szerint

$$\mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) = \mathcal{G}(T_1 \subseteq T_1 \vee T_2) * \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2).$$

Ha az $N = \mathcal{G}(T_1 \subseteq T_1 \vee T_2)$ és a $H = \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$ jelöléseket alkalmazzuk, akkor

$$N \lhd \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$$

miatt (lásd a 14.4.Állítást) $N * H = NH$ és az $N \lhd NH$ normális részcsoport szerinti faktorra a csoportok közismert „első" izomorfia tétele (14.17.Tétel) az

$$NH/N \cong H/(N \cap H)$$

izomorfizmust szolgáltatja, ahol a 12.2.Állítás szerint

$$N \cap H = \mathcal{G}(T_1 \subseteq T_1 \vee T_2) \cap \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) = \mathcal{G}(T_1 \vee T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) = \{\mathrm{id}_{T_1 \vee T_2}\}.$$

Így

$$\mathcal{G}(T_1 \subseteq T_1 \vee T_2) * \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)/\mathcal{G}(T_1 \subseteq T_1 \vee T_2) = NH/N \cong$$
$$\cong H/(N \cap H) = \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)/\{\mathrm{id}_{T_1 \vee T_2}\} \cong \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2).$$

Végeredményben csoportoknak a

$$\mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1) \cong \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)$$

izomorfizmusát kaptuk. Tehát

$$|\mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)| = |\mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1)|\,,$$

ahonnan az injektív $\overline{\mathrm{res}} : \mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2) \longrightarrow \mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1)$ leképezés szürjektívitása adódik. Megjegyzésre érdemes, hogy Galois csoportoknak az előbb igazolt izomorfizmusát az általunk tekintett $\overline{\mathrm{res}}$ leképezés is megvalósítja.

□□□

12.6.Következmény. *Legyen $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ véges testbővítés. Ha a $K \subseteq T_1 \subseteq L$ és $K \subseteq T_2 \subseteq L$ köztes számtestekre $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1 \vee T_2$ és $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1$ normális bővítések, akkor*

$$[T_1 \vee T_2 : T_2] = [T_1 : T_1 \cap T_2] \text{ és } [T_1 \vee T_2 : T_1 \cap T_2] = [T_1 : T_1 \cap T_2][T_2 : T_1 \cap T_2].$$

Bizonyítás. A 12.5.Tétel bizonyításából kiolvasható, hogy most

$$|\mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)| = |\mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1)|\,,$$

ahonnan a $T_2 \subseteq T_1 \vee T_2$ és $T_1 \cap T_2 \subseteq T_1$ bővítések normalitása miatt kapjuk, hogy

$$[T_1 \vee T_2 : T_2] = |\mathcal{G}(T_2 \subseteq T_1 \vee T_2)| = |\mathcal{G}(T_1 \cap T_2 \subseteq T_1)| = [T_1 : T_1 \cap T_2].$$

A dimenziókra vonatkozó második egyenlőség a dimenziók szorzási szabályát használva adódik:

$$[T_1 \vee T_2 : T_1 \cap T_2] = [T_1 \vee T_2 : T_2][T_2 : T_1 \cap T_2] = [T_1 : T_1 \cap T_2][T_2 : T_1 \cap T_2].$$

□□□