1. A KOMPLEX SZÁMTEST

A természetes, az egész, a racionális és a valós számok ismeretét feltételezzük:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\},$$

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, 0, 1, 2, 3, ...\},$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ és } q \neq 0 \right\}.$$

A valós szám értelmezése végtelen tizedestörtként (vagy a $\mathbb{Q}$ halmaz ún. szeleteként, esetleg racionális számokból álló ún. Cauchy sorozatként) történhet, a valós számok halmazát $\mathbb{R}$ jelöli. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

A valós számok összeadását (kivonását) és szorzását (osztását), valamint ezekkel a műveletekkel kapcsolatos algebrai szabályokat szintén ismertnek tételezzük fel.
A valós számok körében a négyzetgyökvonás nem végezhető el korlátlanul, pl. az $x^2 = -3$ egyenletnek nem létezik megoldása $\mathbb{R}$-ben, ami azt jelenti, hogy $\sqrt{-3}$ a valós számok körében nem értelmezhető. Mivel egy valós szám négyzete nem negatív, ezért az alábbi egyenleteknek sincs megoldása $\mathbb{R}$-ben:

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \quad , \quad x^4 + 5 = 0 \quad , \quad x^{16} + \sqrt{2}x^{12} + \sqrt[3]{7}x^2 + \pi = 0.$$

Természetes ígény, hogy bővítsük a valós számok körét úgy, hogy a fenti egyenletek mindegyike értelmes és megoldható legyen ebben a bővebb számhalmazban. Az egyenletek felírásából két következtetést is levonhatunk. Egyrészt a valós számoknak szerepelniük kell a bevezetésre kerülő új számok között, másrészt az összeadást (kivonást) és a szorzást (hatványozást) is értelmeznünk kell az új számokra, mégpedig feltétlenül úgy, hogy ezek az új műveletek az új számok között megbújó valós számokon a már jól ismert eredményt szolgáltassák. A bevezetésre kerülő új műveletektől elvárjuk, hogy a korábban megismert és jól hasznosítható szabályok is teljesüljenek reájuk.
A legegyszerűbb és legkézenfekvőbbnek látszó megoldást választjuk, bevezetünk egy új számot, amelyet i-vel jelölünk és amelyre teljesül az $i^2 = -1$ egyenlőség. A továbbiakban ezt az i-t minden szempontból úgy kezeljük mint az algebrában szokásos változókat, tehát a számolások során az i-vel úgy bánunk mint a már megszokott x, y vagy z változókkal. Az $a, b \in \mathbb{R}$ valós számokat használva most már képezhetjük az $a + bi$ alakú kifejezést, amely az i változó elsőfokú polinomja és amelyet komplex számnak nevezünk. Ha

$$a + bi = c + di$$

teljesül a $c, d \in \mathbb{R}$ valós számokra, akkor előbb $b = d$ majd innen $bi = di$ és $a = c$ adódik. Valóban, $b \neq d$ esetén átrendezéssel az $a - c = (d - b)i$ egyenlőséghez jutunk, innen a nem zéró $d - b$-vel való osztás után azt az ellentmondást kapnánk, hogy

$$i = \frac{a - c}{d - b}$$

valós szám. A polinomokról egyébként is olyan megállapodásunk van, hogy

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ és } b = d.$$

Az algebrai kifejezésekkel (polinomokkal) a megszokott módon számolva és az $i^2 = -1$ egyenlőséget is felhasználva a komplex számok összeadására (kivonására) és szorzására az alábbi természetes értelmezést kapjuk:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i,$$

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= a \cdot (c + di) + bi \cdot (c + di) = ac + adi + bic + bidi = \\ &= ac + bdi^2 + adi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

A nem zéró komplex szám reciprokát is kiszámolhatjuk:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Az eddigiek alapján lehetőségünk van a komplex számok olyan értelmezésére, amely matematikai szempontból szabatos és amelyben nem szükséges az i számnak az ajándékként való elfogadása és különböző tulajdonságainak megkövetelése.

1.A.Definíció. Az $a, b \in \mathbb{R}$ valós számokkal képzett (a, b) alakban írható rendezett párokat nevezzük **komplex számoknak**, amelyek az $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sík pontjainak (vagy origóból induló vektorainak) felelnek meg. A komplex számok összeadása (kivonása) a vektorokhoz hasonlóan történik: az $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ valós számokat használva

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d),$$

A komplex számok szorzását a korábban látottak alapján értelmezzük:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Most

$$(a, 0) \pm (c, 0) = (a \pm c, 0) \text{ és } (a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0),$$

ezért az $(a, 0)$ alakú komplex számok úgy viselkednek a műveletekre nézve, mint az első koordinátáikban szereplő valós számok, következésképpen $(a, 0)$ helyett egyszerűen a-t írunk. Használni fogjuk az $i = (0, 1)$ jelölést, így teljesülnek az alábbiak:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = (a, 0) + (b, 0) \cdot i = a + bi,$$

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

A komplex számok halmazára a

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

jelölést vezetjük be. Egy $z = (a, b) = a + bi$ komplex szám **valós részén** a $\mathrm{Re}(z) = a$ valós számot és **képzetes részén** az $\mathrm{Im}(z) = b$ valós számot értjük.♡

1.1.Állítás. *A* $z_1 = (a_1, b_1)$*,* $z_2 = (a_2, b_2)$*,* $z_3 = (a_3, b_3)$ *és* $w = (c, d)$ *komplex számokra teljesülnek az alábbiak:*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \textit{(asszociatívitás)} \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \textit{(kommutatívitás)} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$

$$(c, d) + (0, 0) = (c, d) \quad \textit{(neutrális elem létezése)} \quad (c, d) \cdot (1, 0) = (c, d),$$

$$(c, d) + (-c, -d) = (0, 0) \ \textit{(additív inverz létezése)},$$

$$(c, d)\cdot\left(\frac{c}{c^2 + d^2}, -\frac{d}{c^2 + d^2}\right) = (1, 0) \ \textit{feltéve , hogy} \ (c, d) \neq (0, 0) \ \textit{(multiplikatív inverz létezése)},$$

$$(z_1 + z_2) \cdot w = (z_1 \cdot w) + (z_2 \cdot w) \ \textit{(disztributívitás).}$$

Bizonyítás. A $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ azonosság igazolására szorítkozunk.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2),$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \cdot (a_3, b_3) =$$
$$= ((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3, (a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1a_2)a_3),$$
$$z_2 \cdot z_3 = (a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3) = (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3),$$
$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (a_1, b_1) \cdot (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) =$$
$$= (a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3), a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)),$$

továbbá

$$(a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3 = a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3),$$

$$(a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1a_2)a_3 = a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3).$$

$\square\square\square$

1.B.Definíció. A $z = (a, b) = a + bi$ és $w = (c, d) = c + di$ komplex számokra

1. a z-nek az $n \geq 0$ **egész kitevőjű hatványát** $z^0 = 1$ és $k \geq 0$ esetén $z^{k+1} = z^k \cdot z$ megkövetelésével rekurzív módon értelmezzük (0^0-t nem értelmezzük!), tehát

   $$z^n = ((...((z \cdot z) \cdot z) \cdot ...) \cdot z) \cdot z,$$

   ahol az egyenlőség jobb oldalán pontosan n darab z szerepel;

2. ha $w \neq (0, 0) = 0 + 0i = 0$, akkor w-nek a **reciprokát** (amelyre a w^{-1} vagy az $\frac{1}{w}$ jelölést egyaránt használjuk) a

   $$w^{-1} = \frac{1}{w} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, -\frac{d}{c^2 + d^2}\right) = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}\right) + \left(-\frac{d}{c^2 + d^2}\right) i$$

   egyenlőség értelmezi (amennyiben $d = 0$, akkor $w = (c, 0) = c$ és most $w^{-1} = \frac{1}{w} = (\frac{1}{c}, 0) = \frac{1}{c}$), a $\frac{z}{w}$ **hányadoson** (törtkifejezésen) a $z \cdot w^{-1} = z \cdot \frac{1}{w}$ szorzatot értjük;

3. a z **konjugáltját** a

$$\overline{z} = (a, -b) = a - bi$$

egyenlőség értelmezi;

4. a z **abszolut értéke** a

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

valós szám;

5. ha $z \neq (0,0) = 0 + 0i = 0$, akkor a z **arkusza** vagy **szöge** minden olyan φ valós szám, amelyre a

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \text{ és } \sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

egyenlőségek teljesülnek. Mivel

$$\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right)^2 = 1,$$

ezért létezik olyan φ, amely kielégíti a fenti egyenlőségeket, sőt φ a 2π egész számú többszöröseitől eltekintve egyértelműen meghatározott, jelölése $\varphi =$arc(z) (tehát arc(z) a z komplex szám végtelen sok arkuszának bármelyikét jelentheti!).$\heartsuit$

1.2.Állítás. *A $z = a + bi$, $w = c + di \neq 0$, $w_1 = c_1 + d_1 i \neq 0$, $w_2 = c_2 + d_2 i \neq 0$, u és $z_k = a_k + b_k i$ $(1 \leq k \leq n)$ komplex számokra teljesülnek az alábbiak.*

1. *Az n-tényezős $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$ szorzat értéke független annak zárójelezésétől.*

2. $$z^n \cdot z^m = z^{n+m},\ (z^n)^m = z^{nm},\ (z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n \text{ (itt } n, m \geq 1 \text{ egészek)},$$
$$u \cdot w = z \Longleftrightarrow u = \frac{z}{w} \text{ és } (w^{-1})^n = (w^n)^{-1} \text{ (itt } n \geq 1 \text{ egész)},$$
ez utóbbi a w^{-n} hatvány értelmezését is jelenti: $w^{-n} = (w^{-1})^n = (w^n)^{-1}$,
$$w^k \cdot w^l = w^{k+l},\ (w^k)^l = w^{kl},\ (w_1 \cdot w_2)^k = w_1^k \cdot w_2^k \text{ (itt } k, l \in \mathbb{Z} \text{ tetszőleges egészek)}.$$

3. $$\frac{z_1}{w_1} \pm \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 \pm z_2 w_1}{w_1 w_2}\ ,\ \frac{z_1}{w_1} \cdot \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 \cdot z_2}{w_1 \cdot w_2}.$$

4. $$\overline{(\overline{z})} = z\ ,\ \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}\ ,\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\ ,\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

5. $$z = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0\ ,\ |\overline{z}| = |z|\ ,\ |z|^2 = z \cdot \overline{z}\ ,\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\ ,\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$$

6. *Ha* $r = |z|$ *és* $\varphi =$arc(z), *akkor*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

amelyet a z ***komplex szám trigonometrikus alakban*** *való felírásának nevezünk, ha az* $s \geq 0$ *és* ψ *valós számokra*

$$s(\cos\psi + i\sin\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

akkor

$$s = r \text{ és } \psi - \varphi = k \cdot (2\pi)$$

valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ *egész számra, tehát* $s = |z|$ *és* $\psi =$arc(z), *ami azt jelenti, hogy a trigonometrikus alak egyértelmű.*

7. *Ha* $r_k = |z_k|$, $\varphi_k =$arc(z_k) *és* $R = |w|$, $\Phi =$arc(w), *akkor*

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ... \cdot |z_n| \ , \ \text{arc}(z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n) = \text{arc}(z_1) + \text{arc}(z_2) + ... + \text{arc}(z_n),$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \ , \ \text{arc}\left(\frac{z}{w}\right) = \text{arc}(z) - \text{arc}(w),$$

azaz

$$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = r_1 r_2 ... r_n \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n)\right),$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{R}(\cos(\varphi - \Phi) + i\sin(\varphi - \Phi)),$$

továbbá

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

8. *A* $w = z^n$ *egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha*

$$|z| = r = \sqrt[n]{R} \ \textit{és} \ \text{arc}(z) = \varphi = \frac{\Phi}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

azaz ha

$$z = \sqrt[n]{R}\left(\cos\left(\frac{\Phi}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\Phi}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right),$$

ahol $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ *valamilyen egész szám.*

Bizonyítás.

1. A bizonyítás a 14.2.Állításnál található.

2. Lásd a 14.C, 14.D és 14.E Definíciókat és az utánuk következő megjegyzéseket, továbbá a 14.3.Állításbeli 2. részt.

3. $u \cdot w = z \Longleftrightarrow u = \frac{z}{w}$ felhasználásával egyszerűen adódnak.

4. Könnyen igazolható.

5. Könnyen igazolható.

6. Könnyen igazolható.

7.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) \right) =$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right).$$

8. Könnyen igazolható.

$\square\square\square$

1.C.Definíció. Ha $n \geq 1$ egész szám, akkor az ε komplex számot **n-edik egységgyöknek** nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$. Azt mondjuk, hogy ε **primitív n-edik egységgyök**, ha $\varepsilon^n = 1$ és bármely $1 \leq k \leq n-1$ egész kitevőre $\varepsilon^k \neq 1$.♡

1.3.Állítás.

1. *n-edik egységgyökök szorzata is n-edik egységgyök, n-edik egységgyök reciproka is n-edik egységgyök, ha ε egy n-edik egységgyök, akkor tetszőleges $k, l \in \mathbb{Z}$ egészekre:*

$$n \mid k - l \text{ (azaz } k - l \text{ osztható } n\text{-el)} \Longrightarrow \varepsilon^k = \varepsilon^l.$$

2. *Az n-edik egységgyökök a következők:*

$$\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k,$$

ahol $0 \leq k \leq n-1$, ha $k = 1$ akkor primitív n-edik egységgyököt kapunk.

3. *Ha ε primitív n-edik egységgyök, akkor tetszőleges $k, l \in \mathbb{Z}$ egészekre:*

$$\varepsilon^k = \varepsilon^l \Longleftrightarrow n \mid k - l \text{ (azaz } k - l \text{ osztható } n\text{-el)},$$

ezért $1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}$ különbözőek és az (összes) n-edik egységgyököknek egy teljes felsorolását (permutációját) jelentik.

4. *A $k \in \mathbb{Z}$ egészre és az ε primitív n-edik egységgyökre*

$$\varepsilon^k \text{ primitív } n\text{-edik egységgyök} \Longleftrightarrow k \text{ és } n \text{ relatív prímek } (\operatorname{lnko}(k, n) = 1).$$

5. *Ha ε tetszőleges primitív n-edik egységgyök és $w = z_1^n$ teljesül a w és z_1 komplex számokra, akkor a $w = z^n$ egyenlőség pontosan akkor teljesül egy z komplex számra, ha létezik olyan $0 \leq k \leq n-1$ egész szám, amelyre $z = z_1 \varepsilon^k$ (amennyiben $w \neq 0$, akkor ezt a k egészet egyértelműen meghatározza z).*

Bizonyítás.

1. Ha $\varepsilon_1^n = 1$ és $\varepsilon_2^n = 1$, akkor $(\varepsilon_1\varepsilon_2)^n = \varepsilon_1^n\varepsilon_2^n = 1$ és $(\varepsilon_1^{-1})^n = (\varepsilon_1^n)^{-1} = 1$, továbbá $k-l=tn$ és $\varepsilon_1^k = \varepsilon_1^{k-l}\varepsilon_1^l = \varepsilon_1^{tn}\varepsilon_1^l = (\varepsilon_1^n)^t\varepsilon_1^l = \varepsilon_1^l$.

2. Az 1.2.Állítás 8. része alapján nyilvánvaló.

3. Legyen $k-l = tn+r$, ahol $k-l$-nek az n-el való maradékos osztásánál t a hányados és $0 \le r \le n-1$ a maradék. Ekkor $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ miatt $\varepsilon^k\varepsilon^{-l} = 1$ és

$$\varepsilon^r = \varepsilon^{(k-l)-tn} = \varepsilon^k\varepsilon^{-l}(\varepsilon^n)^{-t} = 1,$$

ahonnan ε primitívitására való tekintettel $r=0$, illetve az $n \mid k-l$ oszthatóság adódik.

4. Ha ε^k primitív n-edik egységgyök, akkor a már bizonyított 3. rész szerint van olyan $0 \le t \le n-1$ egész, amire $\varepsilon^{kt} = (\varepsilon^k)^t = \varepsilon$. Ismét a 3. részt használva kapjuk, hogy $kt-1$ osztható n-el, ami azt jelenti, hogy $\mathrm{lnko}(k,n) = 1$.

   Ha $d =$lnko$(k,n) > 1$, akkor

$$(\varepsilon^k)^{\frac{n}{d}} = \varepsilon^{\frac{kn}{d}} = (\varepsilon^n)^{\frac{k}{d}} = 1,$$

   ami $1 \le \frac{n}{d} \le n-1$ miatt azt jelenti, hogy ε^k nem primitív n-edik egységgyök.

5. Ha $w \ne 0$, akkor a $w = z^n$ és a $w = z_1^n$ „egyenlőségeket egymással elosztva” kapjuk, hogy $(\frac{z}{z_1})^n = \frac{z^n}{z_1^n} = 1$. Tehát $\frac{z}{z_1}$ egyike az n-edik egységgyököknek, ahonnan a már igazolt 3. rész szerint $\frac{z}{z_1} = \varepsilon^k$, illetve $z = z_1\varepsilon^k$ következik valamilyen $0 \le k \le n-1$ egész kitevőre.

□□□