Valószínűségszámítás gyakorlatok

1. Kombinatorika

1.1. Eseményalgebra

◦ *Jelölje A azt az eseményt, hogy 4 kockadobásból egyszer sem kapunk 6-ost. Mit jelent az $\overline{A}$?*

◦ *Legyen A az az esemény, hogy egy kockával dobva páros számot kapunk, B hogy 4-nél kevesebbet dobunk, C hogy legalább 3-mat dobunk. Mit jelent az alábbi esemény?*

$$[A \setminus (B \cap C)] \cup [(A \setminus B) \setminus C]$$

Legyen 2 lámpa. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első lámpa világít, B pedig, hogy a második világít. Mit jelentenek az alábbi halmazok?

$$\overline{B}, A \cup B, A \cap B, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cup \overline{B}, A \setminus B, \overline{A \cup B}, (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1.2. σ algebra

Melyek alkotnak σ-algebrát az alábbiak közül, és miért?

- $\Omega = \{1, 2\}, \mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}\}$
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$
- $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$

Az $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega\}$ egy σ-algebra, hogy ha

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F}$ akkor $\overline{A} \in F$,
3. ha $A, B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{F}$,
4. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, akkor $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

Az $A \in \mathcal{F}$ egy esemény.

1.3. Binomiális tétel

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

◦ *Fel kell rajzolni a Pascal háromszöget számértékekkel és binomiális együtthatókkal.*

Tulajdonságok:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

- $(a+2)^3 = ?$
- Fejtsük ki az $(x^3+y)^4$ kifejezést a binomiális tétel segítségével!

1.4. Permutációk

Elemek lehetséges sorrendjeit vizsgáljuk. Amennyiben az elemek mind különbözőek *ismétlés nélküli permutáció*ról beszélünk.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$
$$0! = 1$$
$$P_n = n!$$

◦ *Hányféleképpen állíthatunk sorba 5 embert?*

◦ *Hányféleképpen ültethetünk fel 7 embert egy körhintára (ha feltételezzük, hogy minden hely egyenértékű)?*

Amennyiben az elemek között előfordulnak azonosak, úgy *ismétléses permutáció*ról beszélünk.

$$P_n^{k_1,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$$

◦ *4 Arany, 8 ezüst és 3 ólom gyöngyöt szeretnénk felfűzni egy láncra. Mennyiféleképpen tehetjük ezt meg? Karika/körbe kötött lánc esetében mennyi lesz a változatok száma?*

◦ *Egy 10 fős asztalhoz 5 nőt és 5 férfit szeretnénk leültetni, úgy hogy a nők és a férfiak felváltva következzenek. Mennyiféleképpen tehetjük ezt meg, hogy ha csak a szomszédsági viszonyokra vagyunk tekintettel?*

1.5. Variációk

n darab elemből szeretnénk kiválasztani k darabot úgy, hogy számít a sorrend. Ismétlés/visszatevés nélküli eset.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

◦ *Az angol ábécéből hányféleképpen tudunk kivenni 5 betűt, úgy hogy számít azok sorrendje, és nem rakhatjuk vissza őket?*

Ismétléses/visszatevéses eset.

$$V_n^{k,i} = n^k$$

◦ *Hányféleképpen színezhető ki 6 négyzet, ha 4 féle színünk van, és egy négyzet csak egy színű lehet?*

1.6. Kombinációk

n darab elemből szeretnénk k darab elemet kiválasztani.

Visszatevés/ismétlés nélküli eset.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

∘ *Van 4 különböző ajándékunk, amelyet 10 embernek szeretnénk szétosztani. (Mindenkinek maximum 1 jut, és 6 sajnos nem fog így kapni.) Hányféleképpen tehetjük ezt meg?*

Kombinációval és variáció osztva sorrenddel is megoldható.

Visszatevéses/ismétléses eset.

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$$

∘ *3 elemből húzunk visszatevéssel 8-szor. Mennyiféleképpen tehetjük ezt meg, hogy ha nem számít a húzások sorrendje?*

Összegzés

	ismétlés nélküli	ismétléses	
permutáció	$n!$	$\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$	csak sorrendet nézünk
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	kiválasztás ahol számít a sorrend
kombináció	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$	kiválasztás ahol nem számít a sorrend

1.7. Vegyes feladatok

1.7.1. Betűk

- Az a, a, a, b, c, c betűknek hányféle sorrendje van?
- Ezekből mennyi olyan van, amelynél a b az első helyen szerepel?
- Mennyi olyan van, amelynél az utolsó előtti helyen a van?

1.7.2. Konvex n-szög

Hány átlója van egy konvex n-szögnek?

1.7.3. Munkások

10 munkást 10 gépre szeretnénk elosztani úgy, hogy az első 2 gépre csak 2 munkás jöhet szóba. Mennyiféleképpen tehetjük ezt meg?

1.7.4. Különböző fős csoportok

9 embert hányféleképpen tudunk úgy csoportokra osztani, hogy a csoportok 2, 3 és 4 fősek legyenek?

1.7.5. Totó

Hányféleképpen lehet kitölteni egy 13+1-es totószelvényt a $0, 1, X$ jelekkel?

1.7.6. Három kocka

Három dobókockával dobva hányféle dobáshármas adódhat? Tekintsük azt az esetet, amikor figyelembe vesszük a sorrendet, és azt is, amikor nem!

1.7.7. Selejtes gépek

Egy dobozban 16 alkatrész van, amelyből 4 selejtes. Hányféleképpen vehetjük ki ezeket egyesével, hogy ha a selejteseket a végére szeretnénk hagyni?

1.7.8. Számok

Mennyi olyan 5 jegyű egész számot tudunk felírni, amelyek számjegyei 3-nál nagyobbak, de 6-nál nem nagyobbak?

1.7.9. Autóverseny

Ha 20-an indulnak egy autóversenyen, akkor hányféleképpen alakulhat az első 5 helyezett?

1.7.10. Zsákbamacska

Zsákokba rakunk fehér, vörös és fekete színű macskákat. Minden zsákba 4 macska kerül. Hányféle zsák keletkezhet?

1.7.11. Golyók és rekeszek

20 rekeszbe szeretnénk beletenni 10 golyót. Egy rekeszbe több golyó is kerülhet. A golyókat nem különböztetjük meg. Hányféleképpen lehetséges ez?

1.7.12. Számsor

Adottak 1-től 10-ig az egész számok.

- Mennyiféleképpen rendezhetjük sorba őket úgy, hogy ha szeretnénk, hogy az 5 és a 6 ilyen sorrendben kövesse egymást?
- Mennyi az esetek száma, ha az 5 és a 6 közvetlenül, ilyen sorrendben egymás mellett kell legyen?

1.7.13. Úszóverseny

Krisztina és Katinka elindul egy úszóversenyen, amelyen rajtuk kívül még 6-an neveztek.

- Mennyi féle lehet a verseny kimenetele, ha tudjuk, hogy ők biztosan az első 3 hely valamelyikén végeznek, és nem alakulhat ki holtverseny?
- Hányféleképpen alakulhat az első 3 hely?

1.7.14. Postaládák

Van 7 levelünk, amelyeket 8 postaládába szeretnénk elhelyezni. Mennyi a lehetőségek száma, ha az alábbi esetek adottak?

- Minden levelet egyenértékűnek tekintünk, és egy ládába több is kerülhet?
- Minden levél egyenértékű, és egybe legfeljebb egy kerülhet?
- Minden levél különböző és egybe több is kerülhet?
- Minden levél különböző és egybe csak egy kerülhet?

1.7.15. Urna és cédulák

Egy urnában 20 cédula van 1-től 20-ig megszámozva. Kihúzunk 5 cédulát úgy, hogy minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük. Mennyi esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

1.7.16. Kártyák

Hányféleképpen oszthatunk ki 32 kártyát 4 játékosnak úgy, hogy minden játékos 8 kártyát kapjon?

1.7.17. Monoton sorozatok

Mennyi különböző monoton sorozat készíthető az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz elemeiből?

1.7.18. Büfé és italok

Egy büfében 10 féle italt árulnak. Hányféleképpen választható ki belőle 6 darab?

1.7.19. Táncpár választós

Egy összejövetelen 16 hölgy és 11 férfi vesz részt. Hányféleképpen lehet kiválasztani 4 párt belőlük? (Nők és férfiak alkothatnak jelen esetben párokat.)

1.7.20. 8 jegyű számok

Mennyi 8 jegyű számot tudunk felírni, ha 2 darab 0, 4 darab 4-es és 2 darab 7-es számjegyünk áll rendelkezésre?

2. Feltételes valószínűség

2.1. Klasszikus valószínűségi mező

2.1.1. Valószínűség bizonyítás

Lássuk be az alábbiakat!

- $P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$
- $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

$0 \leq P(A \cup B) \leq 1$
$0 \leq P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$

2.1.2. Poincare formula

Bizonyítsuk be, hogy ha teljesül, hogy $P(A) \geq 0.6$ és $P(B) \geq 0.9$, akkor $P(A \cap B) \geq 0.5$!

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2.1.3. 3 kocka

3 kockát dobunk fel egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 10?

2.1.4. 2 kocka

Két kockát feldobva mennyi az alábbiak valószínűsége?

- Két egyenlő számot dobunk?
- Két különböző számot dobunk?
- A két dobott szám összege 7 és az egyik dobás 6-os?

2.1.5. Piros-fehér golyós urna

Egy urnában 13 golyó van, 5 piros és 8 fehér. 2 golyót húzunk belőle véletlenszerűen. Mennyi az alábbiak valószínűsége?

- Mindkettő fehér lesz.
- Mindkettő piros lesz.
- Legalább az egyik golyó fehér.

2.1.6. Selejtes termékek

Egy dobozban 10 jó és 4 selejtes termék van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 4 selejtes a végére marad, hogy ha sorban vesszük ki őket?

2.1.7. 10 kocka, 5 hatos

Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 kockával dobva 5 hatost dobunk?

2.1.8. Termek

Egy hallgató p valószínűséggel tartózkodhat 5 terem valamelyikében. Tegyük fel, hogy már 4-ben kerestük, de nem találtuk ott meg. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5-ödikben van?

2.2. Geometriai valószínűség

2.2.1. Kör alakú céltábla

Egy egység sugarú, kör alakú céltáblára lövünk. A találat valószínűsége a céltáblán egyenletes eloszlású. A táblát koncentrikus körökkel 8 részre szeretnénk osztani, úgy hogy minden részbe egyenlő valószínűséggel legyen találat. Hogyan tehetjük ezt meg?

2.2.2. Villamos

Úticélunkat két villamossal (a és b) tudjuk elérni. Az a 5 percenként közlekedik, a b pedig 12 percenként. Az első villamosok 5 órakor indulnak. 7 és 7:30 között véletlenszerűen érkezünk a megállóba. Mennyi a valószínűsége, hogy a megállóban nem kell 2 percnél többet várakozni?

2.2.3. Pontok távolságai

Vegyünk fel két pontot a $[0, 1]$ intervallumon véletlenszerűen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek távolsága kisebb, mint a 0-hoz közelebbi pont 0-tól való távolsága?

2.2.4. Találkozó

Ketten, a és b találkozni szeretnének éjfél és 1 óra között. Mindketten az adott időintervallumon belül, egymástól függetlenül érkeznek. a maximum 10 percet vár a másikra, míg b maximum csak 5 percet.

Mennyi a valószínűsége, hogy így fognak tudni találkozni?

2.2.5. Valós számok összege

Véletlenszerűen felírunk két, 1-nél kisebb pozitív számot. Mekkora az alábbiak valószínűsége?

- Az összegük 1-nél kisebb.
- A szorzatuk kisebb, mint $\frac{2}{9}$-ed.
- Összegük kisebb 1-nél és szorzatuk kisebb $\frac{2}{9}$-ednél.

2.3. Mintavételezés valószínűségei

2.3.1. Visszatevéses mintavétel

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{n}{k} \cdot s^k \cdot (N-s)^{n-k}}{N^n}$$

2.3.2. Visszatevés nélküli mintavétel

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

2.3.3. Feladatok

- Egy dobozban 18 alkatrész van. Ezek közül 4 selejtes. Mintát veszünk belőle visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy közben pontosan 2 selejtet vettünk ki?
- Egy urnában 24 golyó van, amelyből 9 piros színű, a többi fehér. Visszatevés nélkül húzunk belőle 5 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy 3 fehéret és 2 pirosat húztunk ki?

2.4. Feltételes valószínűség

Teljes valószínűség tétele

Bayes tétel

$$P(A|B) \geq P(A \cap B)$$

Mikor lehetnek egyenlőek egymással?

2.4.1. Mennyi?

Ismertek a $P(A|B) = 0.7, P(A|\overline{B}) = 0.3, P(B|A) = 0.6$ valószínűségek. Mivel lesz egyenlő $P(A)$?

2.4.2. Rendezgetés

Ismertek az alábbi valószínűségek.

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(A|B) = \frac{1}{4}, \quad P(B|A) = \frac{1}{2}.$$

Számítsuk ki a $P(A \cup B)$ és $P(\overline{A}|\overline{B})$ valószínűségeket!

2.4.3. Kifejtős

Bizonyítsuk be, hogy

$$P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C),$$

hogy ha $P(B \cap C) \neq 0$.

2.5. Üzem

Egy üzembe 8 és 12 óra között 0.8 valószínűséggel érkezik meg egy szállítmány. 11-ig még nem érkezett meg. Mennyi a valószínűsége, hogy 11 és 12 között még beérkezik, hogy ha feltételezzük, hogy az érkezés valószínűsége egyenletes eloszlású a 8-12 óra közötti időintervallumon?

2.6. Kérdéses válasz

Felteszünk valakinek egy kérdést, amelyre 3 alternatív válaszlehetőség van. Az illető 0.5 valószínűséggel tudja rá a helyes választ, de ha nem tudja, akkor $\frac{1}{3}$ valószínűséggel tippel.

Tegyük fel, hogy az illető a kérdésünkre helyes választ adott. Mennyi a valószínűsége, hogy tudta a választ?

T esemény: tudja a helyes választ.

J esemény: jó/helyes választ adott.

Általánosítsuk a számítást arra az esetre, hogy ha az illető p valószínűséggel tudja a választ! Vizsgáljuk azt meg, hogy mennyi alternatív válaszlehetőségre lenne szükség akkor, hogy 0.9 valószínűséggel kijelenthető legyen, hogy az illető azért válaszolt jól, mert tudta a helyes megoldást?

Megoldás

A probléma többféleképpen ábrázolható.

1. változat

Tegyük fel, hogy a jó választ J-vel, a két rossz választ R_1-el és R_2-vel jelöljük. Jelölje T azt, hogy ha tudjuk a helyes választ. Tekintsük a döntést egy mintavételnek, amely esetében a három eshetőség (J, R_1 és R_2) közül választunk. A megoldás ismeretében csak a helyes választ választjuk, így a helytelen válaszok esetei is átkerülhetnek ahhoz. Így az alábbi táblázatot kapjuk.

	J	R_1	R_2
T	3	0	0
$\overline{T}$	1	1	1

Összesen 6 választható elemünk van.

- Annak a valószínűsége, hogy tudjuk a megoldást és helyesen válaszolunk az $P(T \cap J) = \frac{3}{6}$.
- Annak a valószínűsége, hogy jó választ adunk az
$$P(J) = P(J|T) \cdot P(T) + P(J|\overline{T}) \cdot P(\overline{T}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$
- Annak a valószínűsége, hogy tudjuk a megoldást, feltéve hogy jó választ adtunk:
$$P(T|J) = \frac{P(T \cap J)}{P(J)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

2. változat

Tegyük fel, hogy az eseteket úgy írjuk fel táblázatos formában, hogy az egyes sorokban az adott eseményhez tartozó feltételes valószínűségek szerepelnek. (Ekkor megkötés, hogy a sorokban lévő értékek összege 1 legyen.)

	J	$\overline{J}$
T	1	0
$\overline{T}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

A számítások az előző változathoz adódnak.

3. változat

Megadhatjuk táblázatos formában közvetlenül az események valószínűségét. Ekkor az alábbit kapjuk.

	J	$\overline{J}$
T	$\frac{1}{2}$	0
$\overline{T}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

Ekkor szükségszerű, hogy a táblázatban lévő értékek összege 1 legyen (a teljes valószínűség tétele szerint). Mivel a táblázat celláiban szereplő események diszjunktak, ezért az események valószínűségét a sor és az oszlop összegek is megadják.

- A $P(\overline{T})$ valószínűséget a második sorban lévő értékek összegéből kapjuk, ami így $\frac{1}{2}$.
- $P(J) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(\overline{J}) = 0 + \frac{2}{6}$.
- Annak a valószínűsége, hogy tudjuk a megoldást, feltéve hogy jó választ adtunk:

$$P(T|J) = \frac{P(T \cap J)}{P(J)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

2.6.1. Ládikók

Van 3 kincsesládánk, bennük arany és ezüst érmék. Az elsőben 5 arany van, és 1 ezüst, a másodikban 3 arany és 4 ezüst, a harmadikban pedig 2 ezüst.

A ládikák közül véletlenszerűen választva mennyi a valószínűsége, hogy arany érmét húztunk?

Amennyiben egy arany érmét vettünk ki, mennyi a valószínűsége, hogy az az első, második vagy a harmadik ládikából származik?

2.6.2. Gyártók és kategóriák

4 gyártó 3 féle kategóriájú terméket gyárt az alábbi táblázatnak megfelelően.

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	2	1
A_2	1	0	3
A_3	2	4	0
A_4	1	0	1

A_i: A termék az i-edik gyártótól származik.
B_j: A termék a j-edik kategóriába tartozik.
Számítsuk ki a valószínűségeket, feltételes valószínűségeket!

- Mennyi a valószínűsége, hogy a termék az i-edik gyártótól származik?
- Mennyi a valószínűsége, hogy a j-edik kategóriába tartozik?
- Mennyi az $A_i \cap B_j$ valószínűség az egyes helyeken?
- Mennyi a $P(A_i|B_j)$ valószínűség és a $P(B_j|A_i)$ valószínűség?

2.7. Szúnyogírtás

Az első írtásnál a szúnyogok 80%-a pusztult el. A másodiknál a megmaradtak 40%-a, a harmadiknál pedig a 20%-a. Mennyi a valószínűsége, hogy

- egy szúnyog túlélte mind a három írtást?
- kettőt még túl fog élni, feltéve, hogy az elsőt már túlélte? $P(A_3|A_1) =$?

A_i: Az i-edik írtást túlélte. $A_1 \subset A_2 \subset A_3$
B_i: Pontosan az i-edik írtásban pusztult el. $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j$

3. Valószínűségi változó, eloszlásfüggvény

Soroljuk fel az eloszlásfüggvény tulajdonságait!

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$$

Írjuk fel a szokott rövidített jelöléseket mellőzve, hogy mi az $F_\xi(x)$!

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\{\xi < x\}) = P(\{\omega|\xi(\omega) < x\})$$

3.1. Változó értékei

Egy ξ valószínűségi változó a $-2, 8, 12$ értékeket 0.2, 0.5 és 0.3 valószínűségekkel veszi fel. Írjuk fel a ξ-hez tartozó valószínűségeket, eloszlásfüggvényt és ábrázoljuk! Számítsuk ki a ξ várható értékét!

3.2. Lehet-e

Vizsgáljuk meg, hogy a következők lehetnek-e eloszlásfüggvények!

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2}, \\ \frac{x-1}{x+1}, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{x-1}{x+1}, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{2x-1}{x+1}, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$F_4(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^3}{1+x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

3.3. Kocka és érmék

Dobjunk fel egy kockát és 3 érmét. Az érméknél az eredmény legyen 0 vagy 1. Rajzoljuk fel az így megadott valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

Adott intervallumokra megnézni a valószínűségeket!

3.4. Négyzet alakú céltábla

Egy egységnégyzet alakú céltáblára lövünk úgy, hogy biztosan eltaláljuk. Adjuk meg és rajzoljuk fel a találatok origótól vett távolságainak eloszlásfüggvényét!

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2\pi}{4}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{\pi} - \sqrt{x^2-1}, & 1 < x \leq \sqrt{2}, \\ 1, & x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

3.5. Sűrűségfüggvényből eloszlásfüggvény

Tekintsük az alábbi sűrűségfüggvényt!

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \dfrac{A}{(1-x)^2}, & x > 2. \end{cases}$$

- Mennyi az A értéke?
- Mekkora valószínűséggel esik ξ a $(2, 3)$ intervallumba?
- Írjuk és rajzoljuk fel a ξ-hez tartozó eloszlásfüggvényt!

3.6. Melyik sűrűségfüggvény?

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbiak közül melyik lehet sűrűségfüggvény!

a.

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b.

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

c.

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

d.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 2 - x, & \text{ha } 1 \le x < 2, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

e.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |1 - x|, & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

3.7. Kocka dobássorozat

Tegyük fel, hogy egy kockával addig dobunk, amíg 6-os értéket nem kapunk. Az utolsó dobást is beleszámolva mennyi lesz ezen dobássorozatok várható értéke?

Mennyi lesz a várható érték, hogy ha 2 kockával dobunk, és azt várjuk el, hogy a dobásoknál legyen legalább egy hatos?

Konvergens hatványsor: $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$

3.8. Diszkrét várható érték és szórás

Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változó a $-6, -3, 1, 2$ értékeket $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ valószínűséggel veszi fel.

Mennyi az $E(\xi)$ és a $D(\xi)$ értéke?

3.9. Folytonos várható érték és szórás

Számítsuk ki a következő sűrűségfüggvényekkel megadott eloszlások várható értékét és szórását!

Rajzoljuk fel hozzá az eloszlásfüggvényt!

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Milyen valószínűséggel esik az érték a $[0.2, 0.5]$ intervallumba?

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Milyen valószínűséggel esik az érték a $[-0.3, 0.7]$ intervallumba?

3.10. Nem létező várható érték

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sűrűségfüggvénnyel megadott eloszlásnak nem létezik várható értéke!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & x > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x) + c$$

3.11. Egyenletes eloszlás

Tegyük fel, hogy $\xi \in U[5, 20]$. $E(\xi) = ?, D(\xi) = ?$

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Rajzoljuk fel az eloszlás és sűrűségfüggvényt!

3.12. Binomiális eloszlás

Tízszer megpróbálunk beletalálni egy céltáblába, amit 0.23 valószínűséggel találunk el. ξ jelölje a találatok számát! $E(\xi) = ?, D(\xi) = ?$

$$E(\xi) = n \cdot p, \quad D^2(\xi) = n \cdot p \cdot q$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a találatok száma legalább 5, de kevesebb mint 9?

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

3.13. Kosárlabdázás

Alíz és Bob kosárlabdáznak. Alíz $\frac{2}{5}$, Bob pedig $\frac{1}{4}$ valószínűséggel dob kosárra. Alíz kezd dobni, és felváltva dobnak, maximum 4-szer az első kosárig. Jelölje ξ a dobások számát!

- Határozzuk meg a ξ eloszlását!
- Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!
- Számítsuk ki a $P(\xi < 3), P(1 < \xi), P(1 \leq \xi < 4)$ valószínűségeket!

3.14. Busz

Egy buszon 40 utasnak van hely. (A vezetőt nem tekintjük utasnak.) Tegyük fel, hogy $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy egy helyen ül valaki.

- Mennyi az utasok várható száma?
- Mi a valószínűsége, hogy minden hely foglalt?
- Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 4-en utaznak a buszon?

3.15. Selejtes gyártás

Egy gyártás során a termékek 15%-a selejtes lesz. 12 elemű mintát veszünk belőle. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- a mintában legfeljebb 2 selejtes termék van,
- 7 jó termék van,
- legalább 2, de legfeljebb 5 selejtes termék van?

Mennyi a mintában lévő selejtek számának várható értéke?

3.16. Szakaszon pontok

Adott egy $[0, r]$ szakasz. Véletlenszerűen kiválasztunk rajta 2 értéket. Mennyi a valószínűsége, hogy ezen értékek négyzetösszege nagyobb lesz, mint r^2?

3.17. Tanuló és jegyzetelés

Egy hallgató a tanulásra fordított ideje negyedét matematika, 40%-át angol, a többi időt pedig egyéb tárgyak tanulásával tölti. Matematika tanulás közben 0.6, angol tanulás közben 0.4 egyéb tárgyak tanulása közben pedig 0.3 annak a valószínűsége, hogy éppen ír.

Azt látjuk, hogy tanulás közben a hallgató éppen ír. Mennyi a valószínűsége, hogy éppen matematikát tanul?

3.18. Intervallum meghatározás

Adott egy eloszlás a következő sűrűségfüggvénnyel!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & e^5 < x < m, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Határozzuk meg a hiányzó m értéket!
- Rajzoljuk fel a sűrűség- és az eloszlásfüggvényét!
- Számítsuk ki a várható értékét és a szórását!