Valószínűségszámítás és matematikai statisztika gyakorló feladatok

Nemoda Dóra

matdora@uni-miskolc.hu

Miskolci Egyetem
Gépészmérnöki és Informatikai Kar
Alkalmazott Matematikai Intézeti Tanszék
2018

Tartalomjegyzék

1. fejezet

1.1. Kombinatorika

1. Hányféleképpen lehet a sakktáblán 8 bástyát elhelyezni úgy, hogy egyik se üsse a másikat? Mennyi lesz az eredmény, ha a 8 bástyát meg tudjuk különböztetni egymástól?

2. Hányféleképpen rakhatunk sorba 12 könyvet, ha 3 bizonyos könyvet egymás mellé akarunk rakni és

   (a) a három könyv sorrendje nem számít?

   (b) a három könyv sorrendje számít?

3. Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré 7 embert, ha a forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük?

4. Egy dobozban 10 golyó van, közülük 5 fehér, 3 piros és 2 kék. A 10 golyót egymás után kihúzzuk a dobozból. Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki a golyókat, ha az egyszínűeket nem tudjuk megkülönböztetni?

5. Hány darab nyolcjegyű szám készíthető 2 db 1, 3 db, 4 és 3 db 8 számjegyekből?

6. Hány darab nyolcjegyű szám készíthető 1 db 0, 3 db 7 és 4 db 3 számjegyekből?

7. Hányféleképpen tölthetjük ki az ötös lottó szelvényt? Hányféleképpen tölthetjük ki úgy, hogy pontosan 3 darab találatunk legyen?

8. Hányféleképpen választhatunk ki 12 lányból és 15 fiúból négy táncoló párt?

9. Hányféleképpen rakhatunk be 8 levelet 15 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe maximum 1 levelet teszünk?

10. Hányféleképpen rakhatunk be 5 levelet 11 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe több levelet is tehetünk?

11. Hat levelet kell kikézbesíteni, ehhez három postás áll rendelkezésünkre. Hányféleképpen oszthatjuk szét a leveleket közöttük?

12. A rácsos büfében négyféle energiaitalt árulnak. Hányféleképpen választhatunk közülük 12 darabot?

13. Egy tíz fős matematika versenyen hányféleképpen alakulhat az első 3 helyezés?

14. Hány 3 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 jegyekből, ha mindegyiket csak egyszer használhatjuk?

15. Hány 3 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 jegyekből, ha mindegyiket többször is felhasználhatjuk?

16. Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt?

17. Hány négyjegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 jegyekből, ha mindegyiket

    (a) legfeljebb egyszer használhatjuk?

    (b) többször is használhatjuk?

1.2. Műveletek eseményekkel

18. Egy érmével dobunk. Ha a dobás eredménye fej még egyszer; ha írás még kétszer. Írja fel az eseményteret!

19. Háromszor dobunk egy kockával. A_i jelentse azt az eseményt, hogy az i-edik dobás hatos ($i = 1, 2, 3$). Mit jelentenek az alábbi események?

    (a) $A_1 + A_2$:
    (b) $A_1 \cdot A_2$:
    (c) $A_1 + A_2 + A_3$:
    (d) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$:
    (e) $A_1 \cdot \bar{A}_2$:
    (f) A_1 / A_2:

20. Egy műhelyben három gép dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik gép egy éven belül elromlik ($i = 1, 2, 3$). Fejezzük ki az A_i eseményekkel a következőket:

    (a) csak az első romlik el:
    (b) mindhárom elromlik:
    (c) egyik sem romlik el:
    (d) az első és a második nem romlik el:
    (e) az első és a második elromlik, a harmadik nem:
    (f) csak egy gép romlik el:
    (g) legfeljebb egy gép romlik el:
    (h) legfeljebb két gép romlik el:
    (i) legalább egy gép elromlik:

1.3. Klasszikus valószínűségi mező

21. Dobjunk fel egyszerre két szabályos dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 8?

22. Dobjunk fel egyszerre két szabályos dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege prímszám?

23. Egy szabályos kockával kétszer egymás után dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a második?

24. Egy magyar kártyacsomagból egyszerre három lapot kihúzva mennyi a valószínűsége, hogy nincs köztük zöld?

25. Egy rejtvénypályázaton három díjat sorsolnak ki a helyes megfejtést beküldők között (egy megfejtő legfeljebb egy díjat kaphat). 50 jó megfejtés érkezett be összesen, ezek közül 20 Miskolcról. Mi a valószínűsége, hogy lesz miskolci nyertes?

26. Egy urnában 3 piros golyó van. Legalább hány fehér golyót kell hozzátenni, hogy a fehér golyó húzásának a valószínűsége nagyobb legyen 0.9-nél?

27. Egy dobozban 20 piros és 30 fehér golyó van. 10 golyót választunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy
    (a) mind a 10 piros?
    (b) 4 piros és 6 fehér?
    (c) legfeljebb 1 piros?

28. Előző feladat, de a 10 golyót visszatevéssel húzzuk ki!

29. Egy dobozban 12 alkatrész van, amelyek közül 8 selejtes. 4 elemű mintát veszünk visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a mintában legfeljebb 3 selejtes alkatrész van?

30. Egy dobozban 15 alkatrész van, amelyek közül 10 selejtes. 7 elemű mintát veszünk visszatevéssel. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 5 selejtes alkatrész van?

31. Az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.7. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább nyolcszor következik be tíz kísérletből?

32. Az A és B játékos felváltva dob kosárra (A kezd). Az A játékos 0.8, míg a B játékos 0.6 valószínűséggel talál a kosárba. A játékot addig folytatják, amíg valamelyik játékos beletalál a kosárba. Mi annak a valószínűsége, hogy a negyedik dobás után ér véget a játék?

33. 100 alma közül 10 kukacos. Véletlenül 5 almát kivéve, mennyi a valószínűsége, hogy van közte kukacos?

34. Mennyi a valószínűsége, hogy egy négytagú társaságban van két ember, akiknek azonos napon van a születésnapja? (1 év=365 nap)

35. Egy hallgató 40 tétel közül 20-at megtanult, 20-ról viszont fogalma sincs. A vizsgán 2 tételt kell kihúznia és választhat, hogy melyikből felel. Mennyi a sikeres vizsga valószínűsége?

36. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel fogadva az ötös lottón legalább 3 találatunk lesz?

1.4. Geometriai valószínűség

37. Egységnyi oldalhosszúságú, négyzet alakú céltáblára egy 1/2 egység sugarú kört rajzolunk. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen rálőve a táblára (azt eltalálva) a találat ezen körök kívül éri azt?

38. Egy egy méter hosszú botot egy véletlenszerűen elhelyezett csapással két részre törünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott darabokból, valamint egy fél méter hosszú botból háromszög szerkeszthető?

39. *Egy egy méter hosszú botot két véletlenszerűen elhelyezett csapással három részre törünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott darabokból háromszög szerkeszthető?*

40. Ketten megbeszélik, hogy délután 5 óra és délután 6 között találkoznak. Mekkora valószínűséggel találkoznak, ha egymástól függetlenül érkeznek, és mindketten 10 perc várakozás után elmennek, ha a másik addig nem érkezett meg?

41. Ketten megbeszélik, hogy délután 2 óra és délután 4 között találkoznak. Mekkora valószínűséggel nem találkoznak, ha egymástól függetlenül érkeznek, és mindketten 20 perc várakozás után elmennek, ha a másik addig nem érkezett meg?

42. *Egy kikötőbe a nap 24 órája alatt két hajó, A és B érkezik egymástól függetlenül, véletlen időpontokban. A munkások az A hajót 1, a B hajót 2 óra alatt tudják kirakodni. Az előbb érkező hajó kirakodását azonnal megkezdik. Amennyiben a másik hajó úgy érkezik, hogy a munkások az elsővel még nem végeztek, a később érkező hajó kénytelen várakozni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik hajónak sem kell várnia?*

43. *Egy félköríven két pont mozog. Mennyi a valószínűsége, hogy egy tetszőleges pillanatban a két pontnak az egymástól való távolsága kisebb a félkör sugaránál?*

1.5. Feltételes valószínűség

44. Tudjuk, hogy $P(A) = 0.36; P(A|B) = 0.43$ és $P(B|A) = 0.93$. Mennyi a valószínűsége, hogy az A és B legalább egyike bekövetkezik?

45. Két kockával egyszerre dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy az összeg páratlan?

46. Két kockával egyszerre dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy hatost dobunk, ha a két dobás értéke különböző?

47. Egy szabályos kockával addig dobunk, míg először kapunk hatost. Feltéve, hogy a szükséges dobások száma páros, mennyi a valószínűsége, hogy csak kétszer kell dobnunk?

48. Ha egy kétgyermekes családnál tudjuk, hogy legalább az egyik gyerek lány, akkor mennyi a valószínűsége, hogy van fiú is a családban?

49. *A meteorológusok szerint holnap 0.23 valószínűséggel lesz eső és 0.51 valószínűséggel lesz szél. Ha lesz eső, akkor 0.33 valószínűséggel szél is lesz. Mi a valószínűsége, hogy ha szél lesz, eső is lesz?*

50. Egy országban a lakosság 97%-nak van TV-je és 62%-nak van autója. Az autóval rendelkezők hány százalékának van TV-je is?

51. 50 doboz mindegyikében 60 golyó van, amelyek közül rendre $11, 12, 13, \cdot, 60$ fehér. Találomra választunk egy dobozt, majd abból véletlenül kihúzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk?

52. *Az igazak városában a lakosok 72%-a igazat mond, a hazugok városában a lakosok 87%-a hazudik. Mi nem tudjuk, hogy melyik városban vagyunk, egyforma eséllyel lehetünk mindkettőben. Megkérdezünk egy embert és az azt mondja, hogy ez a hazugok városa. Mi a valószínűsége, hogy ez az ember hazudik?*

53. Egy asztalon hat darab hatlövetű revolver fekszik. Három revolver tárjában 1-1 lőszer van, kettő van 2-2 lőszerrel töltve, a hatodik tárjában pedig 3 lőszer van. Véletlenszerűen kiválasztunk egy revolvert és meghúzzuk a ravaszt. Mennyi a valószínűsége, hogy a fegyver elsül?

54. Tekintsük az előző feladat revolvereit. Feltéve, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott revolver elsül, mennyi a valószínűsége, hogy nincs több lőszer a tárban?

55. Egy terméket három üzemben készítenek. A három üzemben a selejtszázalék rendre 0.13, 0.24 és 0.36, míga három üzemben az összterméknek rendre 26, 29 és 45 százalékát állítják elő. Az össztermékből kivesznek egy darabot, és az hibás. Mekkora a valószínűsége, hogy azt az első üzemben gyártották?

56. A CHIPCAD microchip gyártó cég teljes termelése két gépsorról származik. Az I. gépsor adja a termelés 69%-át 0.048% selejttel, míg a II. gépsor adja a termelés 31%-át 0.022% selejttel. Ha egy véletlenül kiválasztott chip selejtes, akkor mi a valószínűsége, hogy azt a II. gépsor gyártotta?

57. *Egy törzs minden tagja az év egy adott napján leopárdvadászatra megy. A vadászaton egy vadászt 0.14 valószínűséggel támad meg egy leopárd és ekkor 0.35 valószínűséggel öli meg a leopárd a vadászt. Egyéb veszélyek miatt 0.07 valószínűséggel halhat meg a vadász a vadászaton. Ha egy vadász meghalt a vadászaton, akkor mi a valószínűsége, hogy egy leopárd ölte meg?*

58. *Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ről 53%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?*

1.6. Független események valószínűsége

59. Az A és B események függetlenek, P(A)=0.31 és P(B)=0.34. Határozzuk meg a P(A|A+B) értéket!

60. Legyen $P(A) = 0.17; P(A|B) = 0.17$ és $P(B|A) = 0.69$. Határozza meg $P(\bar{A}|\bar{B})$ értékét!

61. Egy dobozban 1-től 8-ig számozott, 8 db papírlap van. Véletlenszerűen kiveszünk egy lapot. Az A, B és C események jelentése legyen:

    A: a kivett lapon páros szám áll;

    B: 4-nél nem nagyobb szám áll;

    C: a kihúzott szám 2, vagy 5-nél nagyobb.

    Mutassuk meg hogy $P(A \cdot B \cdot C) = P(A)P(B)P(C)$ és a három esemény mégsem független!

62. Egy dobozban 4 egyforma papírlap van. Mindegyikre három számjegy van írva egymás mellé, mégpedig az elsőre 0,0,0, a másodikra 0,1,1, a harmadikra 1,0,1, és a negyedikre 1,1,0. Húzzunk ki egy lapot véletlenszerűen. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy egy olyan lapot húztunk, amelynek i-edik jegye 1-es, $i = 1, 2, 3$. Mutassuk meg, hogy az $A_i, i = 1, 2, 3$ események páronként függetlenek, együttesen azonban nem!

63. Az A, B és C független események, amelyekre P(A)=0.09, P(B)=0.49 és P(C)=0.795. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy

    (a) pontosan kettő következik be közülük!

    (b) legalább kettő következik be közülük!

    (c) legfeljebb egy következik be közülük!

64. *Egy kisegér 3 folyosó bármelyikén eljuthat a sajtdarabhoz. Akármelyik folyosón 3 ajtón kell áthaladni. Mi a valószínűsége, hogy a kisegér el tud jutni a sajthoz, ha az ajtók egymástól függetlenül 0.9 valószínűséggel nyílnak ki, és kinyitásuk után nyitva is maradnak (ha van nyitott folyosó, akkor a kisegér megtalálja a sajtot)?*

65. *Két úr vezet az A városból a B városba és szintén két út B-ből C városba. (Az A városból a C városba csak a B városon át lehet eljutni.) Mind a négy út egymástól függetlenül, 0.66 valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A-ból C-be nincs végig járható útvonal, mi a valószínűsége, hogy A-ból B-be van járható út?*

2. fejezet

2.1. Valószínűségi változók

2.1.1. Diszkrét

66. Két kockával dobunk egyszerre. Írjuk fel a dobott számok maximumának eloszlását!

67. Két kockával dobunk egyszerre. Írjuk fel a dobott számok különbsége abszolút értékének az eloszlását! Írjuk fel az eloszlásfüggvényt és ábrázoljuk is azt!

68. Egy terráriumban két lajhár él, melyek egymástól függetlenül az időnek 1/2-ed, illetve 1/3-ad részében alszanak. Jelölje ξ az ébren lévő lajhárok számát látogatásunk időpontjában. Írja fel ξ eloszlásfüggvényét!

69. Legyen a ξ valószínűségi változó egy kockával dobott érték. Adjuk meg a várható értékét és szórását!

70. Egy érmével dobunk. Ha a dobás eredménye fej még egyszer; ha írás még kétszer. Mennyi a fej dobások számának várható értéke és szórása? Írja fel az eloszlásfüggvényt és ábrázolja is azt!

71. Péter feldob egy kockát. Ha páratlant dob veszít 100 Ft-ot, ha hatost dob nyer 400 Ft-ot, egyébként újra dobhat. A második dobásnál 200 Ft-ot nyer, ha párost dob és 300 Ft-ot veszít, ha páratlant. Péter számára előnyös, méltányos vagy hátrányos a játék? Mennyi a várható nyereményének a szórása? Írja fel az eloszlásfüggvényt és ábrázolja is azt!

72. Egy részvény kiinduló ára 100 Euró. Egy év múlva vagy kétszeresére növekszik az ára, vagy felére csökken, vagy változatlan marad, mindet egyforma eséllyel teheti. A következő évben ugyanez történik, az előző évi változástól függetlenül. Mi lesz két év múlva a részvényár eloszlása, mennyi a várható értéke, szórása? Írja fel az eloszlásfüggvényt és ábrázolja is azt!

73. Egy dobozban 5 piros és 3 kék golyó van. A dobozból visszatevéssel addig húzunk egy-egy golyót, amíg pirosat nem kapunk vagy a húzások száma eléri a négyet (azaz maximum négyszer húzhatunk). Várhatóan hány golyót húzunk ki? Mennyi a kihúzott golyók szórása? Írja fel az eloszlásfüggvényt és ábrázolja is azt!

74. Egy kockával háromszor dobunk egymás után. A ξ valószínűségi változó értéke egyen a hatos dobások száma. Határozza meg ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

75. Egy lezser hallgató maximum négyszer jöhet el vizsgázni és minden vizsgán 0.3 valószínűséggel megy át. Hányszor vizsgázik általában egy lezser hallgató? Írja fel az eloszlásfüggvényt és ábrázolja is azt!

76. Négy szabályos kockával mennyi a dobott számok összegének várható értéke és szórása?

77. *Egy játékban a játékos és a bankár is megpörgeti a rulettet. (A ruletten az $1, 2, \ldots 8$ számok vannak.) A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget, mint a bankár. A játékos nyerése esetén 3900 Ft nyereményt kap. Mennyit kellene a játékosnak minden pörgetés előtt befizetnie, hogy játékonként átlagosan 200 Ft haszna legyen a banknak?*

2.1.2. Folytonos

78. Legyen adott a $[0, 1]$ intervallum. Határozza meg

    (a) annak a valószínűségét, hogy két véletlenül választott pont távolsága kisebb, mint 0.2!

    (b) annak a valószínűségét, hogy két véletlenül választott pont távolsága kisebb, mint 0.9!

    (c) két véletlenül választott pont távolságának eloszlásfüggvényét!

    (d) annak a valószínűségét, hogy ez a távolság az $[1/2, 3/4]$ intervallumba esik!

79. Egy két méter hosszú botot egy véletlen csapással kettétörünk. Határozza meg a rövidebb darab hosszának eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

80. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^3}, & \text{ha } 2 < x, \\ 0, & \text{ha } x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Mekkora az A értéke?

(b) Mekkora a $P(1 \leq \xi \leq 3)$ valószínűség?

(c) Mekkora a $P(\xi \geq 4)$ valószínűség?

(d) Írja fel ξ eloszlásfüggvényét!

81. Számítsa ki a következő sűrűségfüggvénnyel adott eloszlás várható értékét és szórását!

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

82. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye egy megfelelő a konstanssal

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3}, & \text{ha } x > 6, \\ 0, & \text{ha } x \leq 6. \end{cases}$$

Számítsa ki ξ várható értékét és mediánját!

83. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} A\sin(x), & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a ξ eloszlásfüggvényét és $E(\xi)$ értékét!

84. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x^2+x}{2}, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$$

Határozza meg az $E(\xi^2 + 2\xi + 2)$ értékét!

85. *A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} 5x^3, & \text{ha } 0 < x \leq B, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a $P(\xi > E(\xi))$ valószínűséget!

2.2. Nevezetes eloszlások

2.2.1. Diszkrét

86. Egy dobozban 20 piros és 30 fehér golyó van. 5 golyót kihúzunk visszatevéssel.

    (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott piros golyók száma pontosan 3?

    (b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott piros golyók száma legfeljebb 3?

    (c) Mennyi a piros golyó kihúzásának várható értéke?

87. Egy szelet kalácsban a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ, és egy szeletben átlagosan 9 szem mazsola van. Mennyi a valószínűsége, hogy

    (a) egy szeletbe pontosan 4 mazsola kerül?

    (b) egy szeletbe pontosan 10 mazsola kerül?

    (c) egy szeletbe 7-nél több, de 11-nél kevesebb mazsola kerül?

88. Egy üzletbe átlag 78 vevő érkezik óránként és számuk Poisson-eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy két egymás után érkező vevő érkezése között eltelik legalább 4.3 perc?

89. *Egy kilogramm kalácsban átlag 52 szem mazsola van. Az 5 dekás szeletekben a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ. Legalább hány szeletet kell vennünk, hogy már legalább 0.92 legyen annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük mazsola nélküli szelet?*

2.2.2. Folytonos

90. A ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó, továbbá

    $$E(\xi) = D^2(\xi) = 4.$$

    Írja fel a ξ eloszlásfüggvényét!

91. Legyen a ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-1, 1]$ intervallumon. Számítsa ki a $P(2\xi + 1 < 0.3)$ valószínűséget!

92. *Válasszunk a $[0, 4]$ intervallumon egy pontot véletlenszerűen. Jelölje η az így keletkezett két szakasz hosszának a szorzatát. Határozza meg az $E(\eta)$ értékét!*

93. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolása 6 percnél többet kell várni a tapasztalatok szerint 0.1. Feltéve, hogy a várakozási idő hossza exponenciális eloszlású, mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkezve 3 percen belül sorra kerülünk?

94. Egy csiga életének hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó 1.67 év várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy egy csiga életének 3. évében pusztul el?

95. Egy TV élettartama ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó 18 000 óra átlagos élettartammal. Mennyi a valószínűsége, hogy egy TV 20 000 óránál tovább lesz jó?

96. *A ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 2. Számítsa ki azt az a értéket, amelytől jobbra és balra megegyezik az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye alatti terület! (Megjegyzés: általában $F(-x) \neq 1 - F(x)$, csak $F = \Phi$ esetén igaz!)*

97. *Egy gép élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 9 év várható élettartammal. Adja meg azt a legnagyobb K számot, amelyre még igaz, hogy egy gép legalább 0.85 valószínűséggel működőképes lesz K évig!*

98. *Egy céllövő találati pontossága 2.4 cm várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Legfeljebb hányszor lőhet, ha azt akarjuk, hogy még legalább 83%-os biztonsággal találata a 8.7 cm sugarú körbe essen?*

99. Egy fafeldolgozó üzemben deszkákat készítenek. A deszkák hossza normális eloszlású 400 cm várható értékkel és 3 cm szórással.

    (a) A deszkák hányad része lesz 398 cm-nél hosszabb és 401 cm-nél rövidebb?

    (b) Mennyi a valószínűsége, hogy a deszkák hossza a várható értéktől legfeljebb 2.5 cm.rel tér el?

100. Egy munkadarab hossza közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 53 mm. Határozza meg a munkadarab hosszának szórását, ha 0.94 annak a valószínűsége, hogy a munkadarab hossza kisebb, mint 53.1 mm!

101. Legyen ξ olyan nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó, amelyik 0.79 valószínűséggel veszi fel értékeit a $[-8.4, 8.4]$ intervallumon. Számítsa ki a $P(1.8 \leq 2\xi + 1 < 2.1)$ valószínűséget!

102. Egy csomagológép 1 kilogrammos zacskókat tölt. A zacskókba töltött cukor mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó 1 kg várható értékkel és 0.049 kg szórással. A zaccskó súlyra nézve első osztályú, ha a súlya 0.95 kg és 1.05 kg közé esik. Mi a valószínűsége, hogy két véletlenül kiválasztott zacskó közül legalább az egyik első osztályú?

103. *Hengeres alkatrészeket gyártunk. Az átmérő 23 mm várható értékű és 0.012 mm szórású normális eloszlású valószínűségi változó, míg a hossz 75 mm várható értékű és 0.05 mm szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Egy*

alkatrész átmérője jó, ha az átmérő a $[22.976, 23.036]$ *intervallumba esik. Egy alkatrész hossza jó, ha az átmérő a* $[74.95, 75.1]$ *intervallumba esik. Egy alkatrész jó, ha átmérőre és hosszra is jó. Átlagosan az alkatrészek hány százaléka lesz selejtes, ha egy alkatrész átmérője és hossza független egymástól?*

2.3. Véletlen vektorok

2.3.1. Diszkrét

104. Egy dobozban 1-től 22-ig számozott, 22 db cédula van. Véletlenül kihúzunk egy cédulát. A ξ valószínűségi változó legyen a 2-vel való osztás után kapott maradék, az η pedig a 3-mal való osztás utáni maradék. Írja fel (ξ, η) együttes eloszlását és határozza meg a peremeloszlásokat!

105. A (ξ, η) együttes eloszlását az alábbi táblázat adja:

$\xi \vert \eta$	-1	0	1
-1	p	3p	6p
1	5p	15p	30p

   (a) Mekkora a p értéke?

   (b) Független-e ξ és η?

   (c) Írja fel $\xi + \eta$ és $\xi\eta$ eloszlását!

106. Két szabályos pénzérme mindegyikének egyik oldalára nullát, másikra pedig egyest írunk. A két érmét feldobjuk. Jelöle ξ a dobott számok összegét, η pedig a dobott számok szorzatát.

   (a) Független-e ξ és η?

   (b) Számítsa ki ξ és η kovarianciáját!

   (c) Számítsa ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

107. *Feldobunk két olyan érmét, amelynek egyik oldalán 1-es, a másik oldalán egy 2-es szám áll. A dobás után legyen ξ a két dobott szám összege és η a két dobott szám maximuma. Határozza meg ξ és η korrelációs együtthatóját!*

108. *Két szabályos kockával játszunk. Jelöle ξ az első kockával dobott számot és η a két kockával dobott számok kisebbikét. határozza meg ξ és η együttes eloszlását és kovarianciáját!*

109. *A (ξ, η) valószínűségi változóról tudjuk, hogy*

$$P(\xi = 21, \eta = 20) = 0.14,\ P(\xi = 21, \eta = 45) = 0.11,\ P(\xi = 281, \eta = 20) = 0.13,$$

Ismert, hogy ξ csak a 21 és 28, meg η csak a 20 és 45 értékeket veheti fel. Számítsa ki $D(\xi + \eta)$ értékét!

2.3.2. Folytonos

110. A (ξ, η) együttes eloszlásfüggvénye

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y}, & \text{ha x>0, y>0,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) Határozza meg a ξ és η peremeloszlásfüggvényeit!

(b) Független-e ξ és η?

(c) Számítsa ki a $P(\xi < 1, \eta < 1)$ valószínűséget!

111. A (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y), & \text{ha 0<x<1, 0<y<1,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) Határozza meg a ξ és η peremsűrűségfüggvényeit!

(b) Független-e ξ és η?

(c) Számítsa ki a $P(\xi < 1/2, \eta < 1/2)$ és a $P(\xi < 1/2, \eta \geq 1/4)$ valószínűségeket!

112. *A (ξ, η) véletlen vektor együttes sűrűségfüggvénye*

$$f(x,y) = \begin{cases} ye^{-y(x+1)}, & \text{ha 0<x, 0<y,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a perem sűrűségfüggvényeket!

113. A (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} A(x + \frac{y}{2}), & \text{ha 0<x<1, 0<y<2,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) Mekkora az A értéke?

(b) Számítsa ki ξ és η kovarianciáját!

(c) Számítsa ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

114. A (ξ, η) véletlen vektor együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} Axy, & \text{ha 0<x<1, 0<y<1-x,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) Mekkora az A értéke?

(b) Határozza meg η sűrűségfüggvényét és az $E(\eta)$ értéket!

115. *A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} A\cos(2x), & \text{ha } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) *Mekkora az A értéke?*

(b) Adja meg a (ξ, η) együttes sűrűségfüggvényét, ha ξ és η eloszlása megegyezik és függetlenek!

116. *A (ξ, η) véletlen vektor együttes sűrűségfüggvénye*

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & \text{ha 0<x<9.9, 9.9-x<y<12.8-x,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg ξ és η korrelációs együtthatóját!

117. *A (ξ, η) véletlen vektor együttes sűrűségfüggvénye*

$$f(x, y) = \begin{cases} x + Cy, & \text{ha 0<x<1, 0<y<x,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a C konstans és az $E(\xi + \eta)$ értékét!

2.4. Határérték-tételek

118. Legyen $E(\xi) = 1.6, D(\xi) = 0.1$. Adjon alsó becslést a $P(1.220 < \xi < 1.980)$ valószínűségre!

119. Egy forgalmas pályaudvaron, meghatározott időben, egy újságárus által egy óra alatt eladott újságok száma Poisson eloszlású valószínűségi változó. Tapasztalatok azt mutatják, hogy átlagosan egy óra alatt 64 darab újságot ad el. Adjon becslést annak a valószínűségére, hogy 48-nál több, de 80-nál kevesebb újságot ad el egy óra alatt!

120. Legalább hányszor kell egy szabályos pénzérmét feldobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 0.84 valószínűséggel 0.44 és 0.56 közé essen?

121. Legalább hány elemű mintát kell vennünk, ha visszatevéses mintavétellel a selejtarányt 0.13 pontossággal (legfeljebb ennyi eltéréssel) és 0.91 megbízhatósággal akarjuk becsülni?

122. *Egy párt népszerűségét kívánjuk közvélemény kutatással meghatározni. (Igen - nem választ kell adni a megkérdezetteknek.) Legalább hány embert kell megkérdezni, ha a százalékban mért népszerűséget* $\pm 7\%$ *pontossággal és 0.87 megbízhatósággal akarjuk becsülni? (A könnyebb számolás végett visszatevéses mintavételezést tételezünk fel!)*

123. Egy urna 109 fehér és 16 fekete golyót tartalmaz. Visszatevéssel kihúzunk 350 golyót. Adjon közelítést annak a valószínűségére, hogy a fehérek száma a [285, 324] intervallumban lesz!

124. Egy szabályos pénzérmét 200-szor feldobva mennyi a valószínűsége, hogy a fejdobások száma 95 és 105 közé esik?

125. Egy szabályos kockát 300 alkalommal feldobva milyen határok közé fog esni 95%-os biztonsággal a hatos dobások száma?

126. *Egy alkatrész hossza normális eloszlású valószínűségi változó 34 mm várható értékkel és 0.027 mm szórással. Az alkatrészt jónak minősítjük, ha a hossza 33.9703 mm és 34.0297 mm közé esik. Mi a valószínűsége, hogy 100 alkatrészt megvizsgálva legalább 68 jót találunk?*

2.5. Statisztika

127. Az Ezt idd tea!-t 200 g-os kiszerelésben árulják. Véletlenül lemérünk 6 teás dobozt

196 202 198 197 190 205

Határozza meg a tanult mutatókat és értelmezze is azokat!

128. *Adott az alábbi minta:*

0.8 1 2 3 3.2 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9

Határozza meg az átlagot és a medián abszolút eltérést! Rajzolja fel a doboz ábrát!

129. *Adott az alábbi minta:*

0.8 1 2 3 3.2 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9

Határozza meg a mediánt és a korrigált tapasztalati szórásnégyzetet! Rajzolja fel a doboz ábrát!

130. Egy dobókocka dobálása során a következő gyakoriságokat kaptuk:

1: 7 db; 2: 6 db; 3: 10 db; 4: 6 db; 5: 8 db; 6: 3 db

95%-os szinten döntsön arról, hogy szabályos-e a dobókocka?

131. Egy újonnan kifejlesztett müzli ötféle magot (A, B, C, D, E) tartalmaz, melyek százalékos megoszlása a terméken lévő tájékoztató szerint rendre 35%, 25%, 20%, 10% illetve 10%. Egy véletlenszerűen kiválasztott zacskóban az alábbi mennyiségi megoszlást találtak.

132. Adott az alábbi minta:

0.8; 1; 2; 3; 3.2; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9; 0.5; 5.1;

5.2; 5.3; 4.4; 3.4; 3.6; 3.7; 4.8; 4.9; 5.2; 5.4; 5.6; 5.9

Egyenletes eloszlású-e a minta a [0,6] intervallumon?

133. Adott az alábbi minta:

0.8; 1; 2; 3; 3.2; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9; 0.5; 5.1;

5.2; 5.3; 4.4; 3.4; 3.6; 3.7; 4.8; 4.9; 5.2; 5.4; 5.6; 5.9

Exponenciális eloszlású-e a minta?

134. Egy konzervgyárban az egyik adagoló automatának 500g súlyú anyagot kell dobozokba töltenie. A gép által töltött dobozokból vett minta:

$$483;\ 502;\ 498;\ 496;\ 502;\ 494;\ 491;\ 505;\ 486;$$

A gép által töltött súly normális eloszlású 8g szórással. Határozza meg a gép által töltött dobozok súlyának konfidencia intervallumát 95%-os megbízhatósági szint mellett!

135. Azonnal oldódó kávét egy automata gép tölt üvegekbe. A gép pontosságának megállapítása miatt 16 elemű FAE mintát vettek:

$$55;\ 54;\ 54;\ 56;\ 57;\ 56;\ 55;\ 57;\ 54;\ 56;\ 55;\ 54;\ 57;\ 54;\ 56;\ 50;$$

Előző adatfelvételekből ismert, hogy a gép által töltött súly normális eloszlású valószínűségi változó. Készítsen 95%-os megbízhatósággal intervallum, becslést a várható átlagos töltősúlyra!

136. Magnetofonok szalagsebességét vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy a szalagsebesség normális eloszlást követ 4.76 cm/sec várható értékkel. Egy tesztkészüléken az alábbi 10 egymástól független szalagsebességet mértek:

$$4.755;\ 4.766;\ 4.761;\ 4.762;\ 4.759;\ 4.766;\ 4.76;\ 4.758;\ 4.762;\ 4.76;$$

Adjunk 90%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot az ingadozást mérő szórásra!

137. Készítsen 0.95 valószínűségi kétoldali konfidencia intervallumot annak a normális eloszlású valószínűségi változónak a várható értékére, amelyre adott a következő minta:

$$-4.27,\ 4.10,\ 2.69,\ 8.49,\ -5.29,\ 1.94,\ -3.25,\ 8.15,\ 0.75,\ 6.69,\ 3.54,\ 3.51$$

138. Egy szerves vegyület oxigéntartalmának vizsgálatához 10 mérést végeztek 20.95 átlagot és 0.06 tapasztalati szórást kaptak. Határozza meg a 95%-os konfidencia intervallumot a várható értékre, ha a normalitás biztosított!

3. fejezet

Megoldások

3.1. Kombinatorika

1. 8!; 8!·8!
2. (a) 10!
   (b) 3!·10!
3. 720
4. 2520
5. 560
6. 245
7. $\binom{90}{5}$, 35700
8. $\binom{12}{4} \cdot \binom{15}{4} \cdot 4!$
9. 6435
10. 3003
11. 28
12. 455
13. 720
14. 60
15. 125
16. 4782969

17. (a) 720
    (b) 2058

3.2. Műveletek eseményekkel

18. $\Omega = \{FI, FF, III, IIF, IFI, IFF\}$

19. (a) 1. vagy 2. hatos
    (b) 1. és 2. hatos
    (c) van hatos
    (d) mind hatos
    (e) 1. hatos, 2. nem
    (f) 1. hatos, 2. nem

20. (a) $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$
    (b) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$
    (c) $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$
    (d) $A_1 \cdot A_2$
    (e) $A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$
    (f) $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$
    (g) $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$
    (h) $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3}$
    (i) $\overline{\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3}$

3.3. Klasszikus valószínűségi mező

21. 0.1389

22. 0.4167

23. 0.4167

24. 0.4081

25. 0.7929

26. 28

27. (a) $\frac{\binom{20}{10}}{\binom{50}{10}}$

    (b) $\frac{\binom{20}{4}\cdot\binom{30}{6}}{\binom{50}{10}}$

    (c) $\frac{\binom{30}{10}}{\binom{50}{10}} + \frac{20\cdot\binom{30}{9}}{\binom{50}{10}}$

28. (a) $(\frac{2}{5})^{10}$

    (b) $\binom{10}{4} \cdot (\frac{2}{5})^4 \cdot (\frac{3}{5})^6$

    (c) $(\frac{3}{5})^{10} + 10 \cdot \frac{2}{5} \cdot (\frac{3}{5})^9$

29. 0.8586

30. 0.3073

31. 0.3828

32. 0.0096

33. 0.4162

34. 0.164

35. 0.7564

36. 0.00082

3.4. Geometriai valószínűség

37. 0.2146

38. 0.5

39. 0.25

40. 0.3055

41. 0.6944

42. 0.8793

43. 5/9

3.5. Feltételes valószínűség

44. 0.8038
45. 0.3333
46. 0.3333
47. 0.2778
48. 0.6667
49. 0.1488
50. 0.9516
51. 0.5916
52. 0.6829
53. 0.2778
54. 0.3333
55. 0.1274
56. 0.1708
57. 0.4117
58. 0.511

3.6. Független események valószínűsége

59. 0.5692
60. 0.83
61. P(ABC)=P(A)P(B)P(C); például: P(AC)≠P(A)P(C)
62. P(AB)=P(A)P(B); P(AC)=P(A)P(C); P(BC)=P(B)P(C); P(ABC)≠P(A)P(B)P(C)
63. (a) 0.4
    (b) 0.435
    (c) 0.565
64. 0.9801
65. 0.3607

3.7. Valószínűségi változók

66. $P(\xi=1)=1/36$; $P(\xi=2)=3/36$; $P(\xi=3)=5/36$;
$P(\xi=4)=7/36$; $P(\xi=5)=9/36$; $P(\xi=6)=11/36$

67.
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} x\le 0,\\ 6/36, & \text{ha } 0<x\le 1,\\ 16/36, & \text{ha } 1<x\le 2,\\ 24/36, & \text{ha } 2<x\le 3,\\ 30/36, & \text{ha } 3<x\le 4,\\ 34/36, & \text{ha } 4<x\le 5,\\ 1, & \text{ha } 5<x. \end{cases}$$

68.
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} x\le 0,\\ 1/6, & \text{ha } 0<x\le 1,\\ 4/6, & \text{ha } 1<x\le 2,\\ 1, & \text{ha } 2<x. \end{cases}$$

69. 3.5

70. 1.25 és 0.6614

71. 0, azaz méltányos; 230.94

72. 136.11; 109.99

73. 1.5683

74. 0.5; 0.6454

75. 2.533

76. 14; 3.4156

77. 1906.25

78. (a) 0.36
(b) 0.99
(c)
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\le 0\ ,\\ 2x-x^2, & \text{ha } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{ha } 1>x. \end{cases}$$
(d) 0.1875

79.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \text{ ,} \\ x, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } 1 > x. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ ,} \\ 0, & \text{ha különben.} \end{cases}$$

80. (a) 8
    (b) 0.5556
    (c) 0.03125
    (d)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x^2}, & \text{ha } x \geq 2 \text{ ,} \\ 0, & \text{ha x<2.} \end{cases}$$

81. 0; 0.7071

82. 12; 8.4853

83.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \text{ ,} \\ -0.5 \cdot \cos x + 0.5, & \text{ha } 0 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{ha } \pi < x. \end{cases}$$

1.5708

84. 3.5833

85. 0.5902

3.8. Nevezetes eloszlások

86. (a) 0.2304
    (b) 0.913
    (c) 2

87. (a) 0.3373
    (b) 0 072
    (c) 0.382

88. $0.2725^{4.3} = 0.0037$

89. 33

90.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0.536 \text{ ,} \\ \frac{x-0.536}{6.928}, & \text{ha } 0.536 < x \leq 7.464, \\ 1, & \text{ha } 7.464 < x. \end{cases}$$

91. 0.325

92. 2.667

93. 0.684

94. 0.136

95. 0.329

96. 1.9218

97. 1.46

98. ?

99. (a) 0.3779
    (b) 0.5934

100. 0.064

101. 0.008

102. 0.9053

103. 0.2012

3.9. Véletlen vektorok

104. Együttes:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = 3/22; P(\xi = 0, \eta = 1) = 4/22; P(\xi = 0, \eta = 2) = 4/22;$$

$$P(\xi = 1, \eta = 0) = 4/22; P(\xi = 1, \eta = 1) = 4/22; P(\xi = 1, \eta = 2) = 3/22;$$

Perem:
$$P(\xi = 0) = 11/22; P(\xi = 1) = 11/22;$$

$$P(\eta = 0) = 7/22; P(\eta = 1) = 8/22; P(\eta = 2) = 7/22;$$

105. (a) $1/60$

(b) igen

(c) $\xi + \eta$ eloszlása:

$$P(\xi + \eta = -2) = 1/60; P(\xi + \eta = -1) = 1/20; P(\xi + \eta = 0) = 11/60;$$

$$P(\xi + \eta = 1) = 1/4; P(\xi + \eta = 2) = 1/2;$$

$\xi\eta$ eloszlása:

$$P(\xi\eta = -1) = 11/60; P(\xi\eta = 0) = 3/10; P(\xi\eta = 1) = 31/60;$$

106. (a) nem

(b) 1/4

(c) 0.8160

107. 0.8165

108. 0.6249

109. ?

110. (a)

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{ha x>0,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & \text{ha y>0,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b) igen

(c) 0.3995

111. (a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}), & \text{ha 0<x<1,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(y + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}), & \text{ha 0<y<1,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b) nem

(c) 0.1125; 0.3094

112.

113. (a) 1/2

(b) -0.0139

(c) -0.091

114. (a) 24

(b)

$$f(y) = \begin{cases} 12y, & \text{ha } 0<y<1\text{-x}, \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

0.4

115. (a) 1

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cos(2x) \cdot \cos(2y), & \text{ha} -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

116. -0.9597

117.

3.10. Határérték-tételek

118. 0.9307

119. 0.75

120. 435

121. 165

122. 393

123. 0.9895

124. 0.5646

125. $[41.77, 58.23] \approx [42, 58]$

126. 0.8869

3.11. Statisztika

127. $\bar{x} = 198; med = 197.5; MAD = 3; x_{0.25} = 194.5; x_{0.75} = 202.75; terj = 15; s = 5.176$

128. $med = 1.75; MAD = 0.25$

129. $med = 1.75; s = 0.7605$

130. igen
131.
132. igen
133. igen
134. $[489.9956; 500.4489]$
135. $[54.0675; 55.9324]$
136. $[0.0014; 0.0205]$
137.
138.