

Grafika Feladatok Általános Megoldóképletei

Tartalomjegyzék

1. Simple Homogeneous	2
2. Scaling Transform	3
3. Line By Points	4
4. Point By Lines	5
5. Rotation Transform	6
6. Rotation Inverse Transform	7
7. Mirror Transform	8
8. Projection Transform	9
9. Rgb To Cmy	10
10.Cmy To Rgb	11
11.Rgb To Hsv / Hsl / Hsi	12
12.View Mapping	13
13.Circle Line Area	14
14.Orthogonal Projection	15
15.Projective To Origin	16
16.Depth Buffer	17
17.Gourand / Phong Shading	18
18.Ambient / Diffuse Lighting	19
19.Attenuation	20
20.Cylinder / Sphere Mapping	21
21.Texture Sampling	22
22.Animate Position / Angle	23

1. Simple Homogeneous

Feladat

Adjuk meg a(z) (x, y, z) Descartes-koordinátarendszerbeli pontnak olyan homogén koordinátarendszerbeli felírását, melyben a koordináták összege pontosan S értékre adódik!

Általános megoldás

Egy (x, y, z) Descartes-koordinátájú pont homogén koordinátás alakja (x', y', z', w') , ahol a kapcsolat a következő:

$$x = \frac{x'}{w'}, \quad y = \frac{y'}{w'}, \quad z = \frac{z'}{w'}$$

Ebből következik, hogy $x' = w \cdot x$, $y' = w \cdot y$, és $z' = w \cdot z$. A keresett homogén koordináták tehát $(w \cdot x, w \cdot y, w \cdot z, w)$.

A feladat feltétele, hogy a homogén koordináták összege S :

$$x' + y' + z' + w' = S$$

Behelyettesítve:

$$(w \cdot x) + (w \cdot y) + (w \cdot z) + w = S$$

Megoldás menete

1. Írjuk fel az egyenletet a w súlyra:

$$w \cdot (x + y + z + 1) = S$$

2. Fejezzük ki w -t az egyenletből:

$$w = \frac{S}{x + y + z + 1}$$

3. Számítsuk ki a w értékét a megadott x, y, z és S alapján.

4. Számítsuk ki a homogén koordinátákat:

- $x' = w \cdot x$
- $y' = w \cdot y$
- $z' = w \cdot z$
- $w' = w$

5. A végeredmény a (x', y', z', w') vektor.

2. Scaling Transform

Feladat

Írja fel annak a síkbeli transzformációnak a transzformációs mátrixát, amelyik a sík pontjait a(z) $C = (c_x, c_y)$ középponttal S -szeresére skálázza!

Általános megoldás

A középpont körüli skálázás három lépésből álló kompozit transzformáció, melyet mátrixokkal reprezentálunk. A síkbeli transzformációkhoz 3×3 -as homogén mátrixokat használunk. A lépések:

1. Eltolás, ami a C pontot az origóba viszi: $T(-c_x, -c_y)$.
2. Skálázás az origó körül S faktorral: $Scale(S, S)$.
3. Visszatolás az eredeti helyre: $T(c_x, c_y)$.

A transzformációk sorrendje jobbról balra olvasandó, tehát a végső transzformációs mátrix (M):

$$M = T(c_x, c_y) \cdot Scale(S, S) \cdot T(-c_x, -c_y)$$

Megoldás menete

1. Írjuk fel a három szükséges transzformációs mátrixot:

$$T(c_x, c_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Scale(S, S) = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(-c_x, -c_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_x \\ 0 & 1 & -c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Szorozzuk össze a mátrixokat a helyes sorrendben: $M = T \cdot Scale \cdot T^{-1}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_x \\ 0 & 1 & -c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. A szorzás elvégzése után a végeredmény mátrix:

$$M = \begin{pmatrix} S & 0 & c_x(1 - S) \\ 0 & S & c_y(1 - S) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ebbe a képletbe behelyettesítve a c_x, c_y és S értékeket megkapjuk a keresett mátrixot.

3. Line By Points

Feladat

Írja fel homogén koordinátákkal a(z) $P_1 = (x_1, y_1)$ és a(z) $P_2 = (x_2, y_2)$ pontokon áthaladó egyenest!

Általános megoldás

A projektív síkon két ponton áthaladó egyenes homogén koordinátáit a két pont homogén koordinátás vektorának vektoriális szorzata adja meg.

Megoldás menete

1. Alakítsuk át a Descartes-koordinátájú pontokat homogén koordinátás vektorokká a $w = 1$ választással:

$$\vec{p}_1 = (x_1, y_1, 1)$$

$$\vec{p}_2 = (x_2, y_2, 1)$$

2. Számítsuk ki a két vektor vektoriális szorzatát, ami megadja az egyenes $\vec{l} = (a, b, c)$ homogén koordinátáit:

$$\vec{l} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

3. A vektoriális szorzat komponensei:

- $a = y_1 \cdot 1 - 1 \cdot y_2 = y_1 - y_2$

- $b = 1 \cdot x_2 - x_1 \cdot 1 = x_2 - x_1$

- $c = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2$

4. A keresett egyenes homogén koordinátás vektora: $\vec{l} = (y_1 - y_2, x_2 - x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2)$.

4. Point By Lines

Feladat

Számítsa ki a(z) $\vec{l}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ és a(z) $\vec{l}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ vektorokkal megadott homogén koordinátarendszerbeli egyenesek metszéspontját!

Általános megoldás

A projektív sík dualitási elve alapján két egyenes metszéspontjának homogén koordinátáit az egyenesek homogén koordinátás vektorainak vektoriális szorzata adja meg.

Megoldás menete

1. Adottak az egyenesek homogén vektorai:

$$\vec{l}_1 = (a_1, b_1, c_1)$$

$$\vec{l}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

2. Számítsuk ki a két vektor vektoriális szorzatát, ami megadja a metszéspont $\vec{p} = (x', y', w')$ homogén koordinátáit:

$$\vec{p} = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3. A vektoriális szorzat komponensei:

- $x' = b_1c_2 - c_1b_2$
- $y' = c_1a_2 - a_1c_2$
- $w' = a_1b_2 - b_1a_2$

4. A metszéspont homogén koordinátás vektora: $\vec{p} = (x', y', w')$.

5. Ha a Descartes-koordinátákra van szükség, akkor a homogén koordinátákat elosztjuk a w' komponenssel (ha $w' \neq 0$):

$$(x, y) = \left(\frac{x'}{w'}, \frac{y'}{w'} \right)$$

5. Rotation Transform

Feladat

Tegyük fel, hogy a sík pontait a(z) $\vec{v} = (t_x, t_y)$ vektorral eltoljuk, majd az origó körül θ fokkal elforgatjuk. Írja fel az ehhez tartozó transzformáció mátrixát!

Általános megoldás

Ez egy kompozit transzformáció, amely egy eltolásból és egy forgatásból áll. A transzformációkat a végrehajtás sorrendjében, jobbról balra szorozzuk össze.

1. Eltolás $T(t_x, t_y)$ vektorral.
2. Forgatás $R(\theta)$ szöggel.

A végső transzformációs mátrix (M):

$$M = R(\theta) \cdot T(t_x, t_y)$$

Megoldás menete

1. Írjuk fel a két szükséges transzformációs mátrixot (a szöveget radiánban kell használni: $\theta_{rad} = \theta_{deg} \cdot \frac{\pi}{180}$):

$$T(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Szorozzuk össze a mátrixokat a helyes sorrendben: $M = R(\theta) \cdot T(t_x, t_y)$.

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. A szorzás elvégzése után a végeredmény mátrix:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & t_x \cos \theta - t_y \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & t_x \sin \theta + t_y \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ebbe a képletbe helyettesítsük be a megadott értékeket.

6. Rotation Inverse Transform

Feladat

Tegyük fel, hogy a sík pontait a(z) $\vec{v} = (t_x, t_y)$ vektorral eltoljuk, majd az origó körül θ fokkal elforgatjuk. Határozza meg a transzformációhoz tartozó transzformációs mátrix inverzét!

Általános megoldás

Egy kompozit transzformáció $M = A \cdot B$ inverze a tényezők inverzének fordított sorrendű szorzata: $M^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Az eredeti transzformáció: $M = R(\theta) \cdot T(t_x, t_y)$. Az inverz transzformáció: $M^{-1} = (T(t_x, t_y))^{-1} \cdot (R(\theta))^{-1}$.

Az egyes transzformációk inverzei:

- Az eltolás inverze egy ellentétes irányú eltolás: $(T(t_x, t_y))^{-1} = T(-t_x, -t_y)$.
- A forgatás inverze egy ellentétes szögű forgatás: $(R(\theta))^{-1} = R(-\theta)$.

Tehát a keresett inverz mátrix:

$$M^{-1} = T(-t_x, -t_y) \cdot R(-\theta)$$

Megoldás menete

1. Írjuk fel az inverz transzformációk mátrixait (figyelembe véve, hogy $\cos(-\theta) = \cos \theta$ és $\sin(-\theta) = -\sin \theta$):

$$T(-t_x, -t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Szorozzuk össze a mátrixokat a helyes sorrendben: $M^{-1} = T(-t_x, -t_y) \cdot R(-\theta)$.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. A szorzás elvégzése után a végeredmény mátrix:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -t_x \\ -\sin \theta & \cos \theta & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ebbe a képletbe helyettesítsük be a megadott értékeket.

7. Mirror Transform

Feladat

Írja fel azt a térbeli transzformációs mátrixot, amelyik a tér pontjait egy adott síkra tükrözi!

Általános megoldás

A tükrözés mátrixát az adott sík egyenletétől függően kell felírni. A térbeli transzformációkhoz 4x4-es homogén mátrixokat használunk.

Eset 1: Koordinátasíkra vagy azzal párhuzamos síkra való tükrözés (pl. $z = c$)

1. Eltolás, hogy a tükrözési sík a megfelelő koordinátasík legyen: $T(0, 0, -c)$.
2. Tükrözés a koordinátasíkra (pl. $z = 0$ síkra, ami a z-koordináta előjelének megfordítását jelenti): $Mirror_z$.
3. Visszatolás: $T(0, 0, c)$.

$$M = T(0, 0, c) \cdot Mirror_z \cdot T(0, 0, -c)$$

A $z = c$ síkra való tükrözés mátrixa:

$$M_{z=c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasonlóan, az $x = c$ síkra: a mátrixban az (1,1) elem -1, a (1,4) elem $2c$. Az $y = c$ síkra: a (2,2) elem -1, a (2,4) elem $2c$.

Eset 2: Origón átmenő, speciális helyzetű síkra való tükrözés (pl. $x = y$, azaz $x - y = 0$) Ilyenkor a megfelelő koordinátákat kell felcserélni vagy előjelet váltani.

- $x = y$ síkra tükrözés: $x \leftrightarrow y$. A mátrix az x és y koordinátákat cseréli fel.

$$M_{x=y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $x = -y$ síkra tükrözés: $x \rightarrow -y, y \rightarrow -x$.

$$M_{x=-y} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasonlóan felírhatók a mátrixok a többi, $y = z$, $x = -z$ stb. síkra is.

8. Projection Transform

Feladat

Írja fel azt a térbeli transzformációs mátrixot, amelyik a tér pontjait egy adott síkra (ortogónálisan) vetíti!

Általános megoldás

A vetítés mátrixa az adott sík egyenletétől függ. A feladatok általában ortogonális (merőleges) vetítést kérnek koordinátasíkokra, vagy azokkal párhuzamos síkokra.

Eset 1: Koordinátasíkra való vetítés (pl. $z = 0$) A vetítés során az a koordináta, amelyik a sík egyenletében nem szerepel, nullává válik. Pl. a $z = 0$ síkra (azaz az xy -síkra) vetítéskor a pontok z koordinátája 0 lesz.

$$M_{z=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eset 2: Koordinátasíkkal párhuzamos síkra való vetítés (pl. $z = c$) A vetítés során a pontok megfelelő koordinátája a sík konstans értékét veszi fel. Pl. a $z = c$ síkra vetítéskor minden pont z koordinátája c lesz.

$$M_{z=c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eset 3: Origón átmenő, speciális helyzetű síkra való vetítés (pl. $x = y$) A vetítés egy pontot a sík legközelebbi pontjába képez. Az $x = y$ sík normálvektora $\vec{n} = (1, -1, 0)$. A vetítés során a pont koordinátái az $x = y$ feltételt kielégítő értékekre módosulnak. Egy (x, y, z) pont vetülete $((x + y)/2, (x + y)/2, z)$.

$$M_{x=y} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasonlóan a többi síkra, pl. $x = -y$ (normálvektor $(1, 1, 0)$): vetület $((x - y)/2, (-x + y)/2, z)$.

$$M_{x=-y} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Rgb To Cmy

Feladat

Egy színt az RGB színtérben a (R, G, B) komponensekkel adtuk meg. Milyen értékekkel adható meg CMY színtér esetében?

Általános megoldás

Az RGB (additív, fénykeverés) és a CMY (szubtraktív, festékkeverés) színterek között az átváltás a legegyszerűbb modellben komponensenként történik. A komponensek értékei $[0, 1]$ tartományban értendők.

$$C = 1 - R$$

$$M = 1 - G$$

$$Y = 1 - B$$

Megoldás menete

1. Vegyük az adott (R, G, B) színkomponenseket.
2. Számítsuk ki a CMY komponenseket a fenti képletekkel:
 - Cián (Cyan): $C = 1 - R$
 - Magenta (Magenta): $M = 1 - G$
 - Sárga (Yellow): $Y = 1 - B$
3. A végeredmény a (C, M, Y) hármas.

10. Cmy To Rgb

Feladat

Egy színt a CMY színtérben a (C, M, Y) komponensekkel adtuk meg. Milyen értékekkel adható meg RGB színtér esetében?

Általános megoldás

Az átváltás a CMY-ből RGB-be az RGB-ből CMY-ba történő konverzió inverze. A komponensek értékei $[0, 1]$ tartományban értendők.

$$R = 1 - C$$

$$G = 1 - M$$

$$B = 1 - Y$$

Megoldás menete

1. Vegyük az adott (C, M, Y) színkomponenseket.
2. Számítsuk ki az RGB komponenseket a fenti képletekkel:
 - Vörös (Red): $R = 1 - C$
 - Zöld (Green): $G = 1 - M$
 - Kék (Blue): $B = 1 - Y$
3. A végeredmény az (R, G, B) hármas.

11. Rgb To Hsv / Hsl / Hsi

Feladat

Egy színt az RGB színtérben a (R, G, B) komponensekkel adtuk meg. Határozza meg a telítettség (Saturation) és a világosság (Value/Lightness/Intensity) értékeket a megadott (HSV/HSL/HSI) színtér esetében!

Általános megoldás

A konverzióhoz először szükségünk van az RGB komponensek maximumára és minimumára.

$$M = \max(R, G, B)$$

$$m = \min(R, G, B)$$

$$\Delta = M - m$$

HSV (Hue, Saturation, Value)

- **Value (V):** $V = M$
- **Saturation (S):**

$$S_{HSV} = \begin{cases} 0 & \text{ha } M = 0 \\ \frac{\Delta}{M} & \text{egyébként} \end{cases}$$

HSL (Hue, Saturation, Lightness)

- **Lightness (L):** $L = \frac{M+m}{2}$
- **Saturation (S):**

$$S_{HSL} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \Delta = 0 \\ \frac{\Delta}{1-|2L-1|} & \text{egyébként} \end{cases}$$

HSI (Hue, Saturation, Intensity)

- **Intensity (I):** $I = \frac{R+G+B}{3}$
- **Saturation (S):**

$$S_{HSI} = \begin{cases} 0 & \text{ha } I = 0 \\ 1 - \frac{m}{I} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megoldás menete

1. Azonosítsuk a cél színteret (HSV, HSL vagy HSI).
2. Számítsuk ki $M = \max(R, G, B)$ és $m = \min(R, G, B)$ értékeket.
3. A cél színtérnek megfelelő képletekkel számítsuk ki a kért világosság- és telítettség-komponenseket.

12. View Mapping

Feladat

Tegyük fel, hogy az $(x, y) \in [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ világtartomány pontjait szeretnénk megjeleníteni a képernyőn. A képernyő felbontása $U_{res} \times V_{res}$ képpont. Írja fel azt a függvényt, amelyik a képernyő (u_k, v_k) képpontjaihoz a sík (x, y) pontjait rendeli!

Általános megoldás

A feladat a képernyő-koordináták (diszkrét) visszaleképezését kéri a világ-koordinátákra (folytonos). A leképezés lineáris. A képernyő-koordináták általában $(0, 0)$ -tól $(U_{res} - 1, V_{res} - 1)$ -ig terjednek. A leképezés a képpontok közepét veszi alapul, de a feladatok egyszerűsége miatt gyakran a bal alsó sarkot. Itt az egyszerűbb, sarokponthoz rendelést használjuk.

A (u_k, v_k) képpont arányos helyzete a képernyőn:

$$\text{relatív}_u = \frac{u_k}{U_{res}}, \quad \text{relatív}_v = \frac{v_k}{V_{res}}$$

Ezt az arányt alkalmazzuk a világtartományra.

Megoldás menete

1. Határozzuk meg a világtartomány méreteit:

$$W_x = x_{max} - x_{min}$$

$$W_y = y_{max} - y_{min}$$

2. A képernyő (u_k, v_k) pontjának a megfelelő (x, y) világkoordináta a következő képletekkel számolható:

$$x(u_k) = x_{min} + \frac{u_k}{U_{res}} \cdot W_x$$

$$y(v_k) = y_{min} + \frac{v_k}{V_{res}} \cdot W_y$$

3. A feladat általában egy konkrét (u_k, v_k) ponthoz kéri a világkoordinátát, vagy a teljes leképező függvényt, ami a fenti két egyenlet. A feladat szövege néha a fordított leképezést kéri (világból képernyőre), ami szintén lineáris:

$$u_k(x) = \text{floor} \left(U_{res} \cdot \frac{x - x_{min}}{W_x} \right)$$

$$v_k(y) = \text{floor} \left(V_{res} \cdot \frac{y - y_{min}}{W_y} \right)$$

Olvassuk el figyelmesen a kérdést, hogy melyik irányú leképezést kéri. A "képpontjaihoz a sík pontjait rendeli" az $(u_k, v_k) \rightarrow (x, y)$ leképezést jelenti.

13. Circle Line Area

Feladat

A síkban egy R egység sugarú körvonalat W egység szélességű vonallal jelenítünk meg. Mennyi az így kapott alakzat területe?

Általános megoldás

Az így kapott alakzat egy gyűrű (annulus), amelynek középvonala egy R sugarú kör. A vonal szélessége W . Ez azt jelenti, hogy a gyűrű a középvonaltól $W/2$ távolságra terjed ki mindkét irányba.

- A külső kör sugara: $R_k = R + \frac{W}{2}$
- A belső kör sugara: $R_b = R - \frac{W}{2}$

A gyűrű területe a külső kör területének és a belső kör területének a különbsége.

$$A = A_{kls} - A_{bels} = \pi R_k^2 - \pi R_b^2$$

Megoldás menete

1. Írjuk fel a terület képletét a sugarakkal:

$$A = \pi \left(\left(R + \frac{W}{2} \right)^2 - \left(R - \frac{W}{2} \right)^2 \right)$$

2. Használjuk az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosságot az egyszerűsítéshez:

- $a - b = \left(R + \frac{W}{2} \right) - \left(R - \frac{W}{2} \right) = W$
- $a + b = \left(R + \frac{W}{2} \right) + \left(R - \frac{W}{2} \right) = 2R$

3. A végső, egyszerűsített képlet:

$$A = \pi \cdot W \cdot 2R = 2\pi RW$$

4. Helyettesítsük be a megadott R és W értékeket ebbe a képletbe a végeredményért.

14. Orthogonal Projection

Feladat

Tegyük fel, hogy ortogonálisan szeretnénk vetíteni az (x, y) síkra. A szempozíciónk a (z) (e_x, e_y, e_z) pontban van. Írja fel a vetítéshez tartozó mátrixot!

Általános megoldás

Az ortogonális (merőleges) vetítésnél a vetítési sugarak párhuzamosak egymással és merőlegesek a vetítési síkra. Ebből következően a szempozíció (nézőpont) helye irreleváns, csak a vetítés iránya számít, ami a sík normálvektorával párhuzamos.

- Vetítés az (x, y) síkra (azaz a $z = 0$ síkra): A vetítés iránya a z -tengellyel párhuzamos. Egy tetszőleges (p_x, p_y, p_z) pont vetülete $(p_x, p_y, 0)$ lesz.
- Vetítés az (y, z) síkra (azaz az $x = 0$ síkra): A vetület $(0, p_y, p_z)$.
- Vetítés az (x, z) síkra (azaz az $y = 0$ síkra): A vetület $(p_x, 0, p_z)$.

Megoldás menete

1. Azonosítsuk a vetítési síkot (pl. (x, y) sík).
2. Írjuk fel a 4x4-es homogén transzformációs mátrixot, amely a síkra merőleges koordinátát kinullázza.
3. **Vetítés az (x, y) síkra:**

$$M_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Vetítés az (y, z) síkra:**

$$M_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Vetítés az (x, z) síkra:**

$$M_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A szempozíció koordinátáit figyelmen kívül hagyjuk.

15. Projective To Origin

Feladat

Adott a(z) $P = (p_x, p_y, p_z)$ pont a térben. Perspektivikus leképezést feltételezve hova kerül a síkon, hogy ha a szempozíciónk az origó, és az (x, y) síkkal párhuzamos képernyősík attól d egység távolságra van?

Általános megoldás

Ez egy centrális vetítés, ahol a vetítési centrum (szempozíció) az origó $E = (0, 0, 0)$. A képsík párhuzamos az (x, y) síkkal, tehát az egyenlete $z = k$ vagy $z = -k$. A feladat szövege szerint a távolsága d , tehát a képsík lehet a $z = d$ vagy $z = -d$ sík. A számítógépes grafikában elterjedt konvenció szerint a kamera a negatív z-tengely irányába néz, így a képsík a $z = -d$ sík.

Egy $P = (p_x, p_y, p_z)$ pontot az origóból a képsíkra vetítünk. A vetítésugár egyenes, amely áthalad az origón és a P ponton. Ennek az egyenesnek a metszéspontját keressük a $z = -d$ síkkal. A hasonló háromszögek tétele alapján a vetített pont $P' = (p'_x, p'_y, p'_z)$ koordinátái a következők.

Megoldás menete

1. A vetített pont a $z = -d$ síkon van, tehát $p'_z = -d$.
2. A hasonló háromszögek arányossági tétele alapján:

$$\frac{p'_x}{p_x} = \frac{p'_y}{p_y} = \frac{p'_z}{p_z}$$

3. Fejezzük ki p'_x -et és p'_y -t:

$$p'_x = p_x \cdot \frac{p'_z}{p_z} = p_x \cdot \frac{-d}{p_z} = -d \frac{p_x}{p_z}$$

$$p'_y = p_y \cdot \frac{p'_z}{p_z} = p_y \cdot \frac{-d}{p_z} = -d \frac{p_y}{p_z}$$

4. A keresett pont a képsíkon: $\left(-d \frac{p_x}{p_z}, -d \frac{p_y}{p_z}\right)$.
5. Helyettesítsük be a megadott $P = (p_x, p_y, p_z)$ pont és a d távolság értékeit.

16. Depth Buffer

Feladat

Tegyük fel, hogy egy $W \times H$ felbontású képet szeretnénk megjeleníteni! A mélységbufferünkben a távolságok számításához használjunk N bájtos lebegőpontos számokat. Mennyi helyet foglal így a mélységbuffer?

Általános megoldás

A mélységbuffer (z-buffer) egy kétdimenziós tömb, amelynek mérete megegyezik a képernyő felbontásával. Minden pixelhez tárol egy mélységértéket. A teljes méret a pixelek számának és az egy pixelhez tartozó mélységadat méretének szorzata.

A feladatban a pontosság lehet:

- **Egyszeres pontosságú** (single precision float): 4 bájt.
- **Dupla pontosságú** (double precision float): 8 bájt.

Megoldás menete

1. Határozzuk meg a pixelek teljes számát:

$$\text{Pixelek száma} = W \cdot H$$

2. Határozzuk meg az egy pixelhez tartozó adatméretet bájtban (B_{pixel}):

- Ha egyszeres pontosságú: $B_{pixel} = 4$ bájt.
- Ha dupla pontosságú: $B_{pixel} = 8$ bájt.

3. Számítsuk ki a teljes méretet bájtban:

$$\text{Teljes méret (Bájt)} = W \cdot H \cdot B_{pixel}$$

4. Az eredményt átválthatjuk nagyobb mértékegységekre:

- Kilobájt (KB): Méret/1024
- Megabájt (MB): Méret/(1024²)

17. Gourand / Phong Shading

Feladat

Adott egy háromszög, mely 3 csúcspontjának a színe (Gourand) / normálvektora (Phong) c_1, c_2, c_3 / n_1, n_2, n_3 . Számítsuk ki a háromszögön belüli, s és t paraméterekkel adott ponthoz tartozó színt / normálvektort!

Általános megoldás

Mindkét árnyalási modell lineáris interpolációt használ a háromszögön belül. A feladatban az s és t paraméterek egy pontot határoznak meg a háromszögben. A leggyakoribb értelmezés szerint a pont a P_1 csúcsból induló két élvektor lineáris kombinációjaként adódik: $P(s, t) = P_1 + s(P_2 - P_1) + t(P_3 - P_1)$. Az attribútum (szín vagy normálvektor) interpolációja ugyanezekkel az s, t paraméterekkel történik.

Legyen az attribútum (szín vagy normálvektor) A . Az interpolált attribútum A_p :

$$A_p(s, t) = A_1 + s(A_2 - A_1) + t(A_3 - A_1)$$

Átrendezve:

$$A_p(s, t) = (1 - s - t)A_1 + sA_2 + tA_3$$

Itt $(1 - s - t)$, s , és t a pont baricentrikus koordinátái a P_1, P_2, P_3 csúcsokra vonatkozóan.

Megoldás menete

1. Azonosítsuk a csúcspontokhoz tartozó attribútumokat:

- **Gourand-árnyalásnál:** a színeket (c_1, c_2, c_3) . A számítást komponensenként (R, G, B) kell elvégezni.
- **Phong-árnyalásnál:** a normálvektorokat (n_1, n_2, n_3) . A számítást komponensenként (x, y, z) kell elvégezni.

2. Használjuk az interpolációs képletet az adott attribútumra:

$$A_p = (1 - s - t)A_1 + sA_2 + tA_3$$

3. Helyettesítsük be a megadott A_1, A_2, A_3 és s, t értékeket.

4. **Phong-árnyalás esetén egy extra lépés van:** Az interpolált normálvektort normalizálni kell (egységvektorra kell tenni), mivel a lineáris interpoláció nem őrzi meg a hosszt.

$$n_{p,\text{norm}} = \frac{n_p}{\|n_p\|} = \frac{n_p}{\sqrt{n_{px}^2 + n_{py}^2 + n_{pz}^2}}$$

A feladat általában csak az interpolált, nem normalizált vektort kéri.

18. Ambient / Diffuse Lighting

Feladat

Egy adott színű fényel világítunk meg egy felületi pontot, melynél ismertek a fényvisszaverődési állandók. Milyen lesz a visszaverődő fény színe?

Általános megoldás

A megvilágítási modellekben a kimeneti színt komponensenként számoljuk (R, G, B).

Ambient (környezeti) fény: A visszaverődő környezeti fény a bejövő környezeti fény színének és a felület környezeti visszaverődési együtthatójának szorzata.

$$I_{a,out} = I_{a,in} \otimes k_a$$

ahol \otimes a komponensenkénti szorzást jelöli. Tehát: $R_{out} = R_{in} \cdot k_{a,R}$, $G_{out} = G_{in} \cdot k_{a,G}$, $B_{out} = B_{in} \cdot k_{a,B}$. A "teljesen kék" fény pl. $I_{a,in} = (0, 0, 1)$.

Diffuse (szórt) fény: A visszaverődő szórt fény (Lambert-modell) függ a bejövő fény színétől, a felület diffúz együtthatójától, és a felületi normálvektor (\vec{n}) és a fényforrás irányába mutató vektor (\vec{l}) által bezárt szögtől.

$$I_{d,out} = I_{d,in} \otimes k_d \cdot \max(0, \vec{n} \cdot \vec{l})$$

A $\vec{n} \cdot \vec{l}$ skalárszorzat $\cos \theta$, ahol θ a két (egységnyi) vektor által bezárt szög. A feladatok gyakran ezt a szöget adják meg.

Megoldás menete

1. Azonosítsuk a fény típusát (ambient vagy diffuse).

2. **Ambient esetén:**

- Adott a bejövő fény színe, $I_{a,in}$, és a felület anyaga, k_a .
- Szorozzuk össze őket komponensenként.

3. **Diffuse esetén:**

- Adott a bejövő fény színe, $I_{d,in}$, a felület anyaga, k_d , és a normálvektor és a fény iránya közti θ szög.
- Számítsuk ki a $\cos \theta$ értéket.
- A végső szín: $I_{d,out} = I_{d,in} \otimes k_d \cdot \cos \theta$. A számítást komponensenként végezzük. Ha $\cos \theta < 0$, akkor az eredmény 0 (a felület a fénytől elfordul).

19. Attenuation

Feladat

Egy felületi pont fényforrástól való távolsága d egység. A fény tompítását a c_0, c_1, c_2 paraméterekkel írjuk le. Mennyi lesz a fény tompítása?

Általános megoldás

A fényintenzitás a távolsággal csökken. Ezt a csökkenést egy tompítási (attenuation) faktorial modellezzük, ami a távolság függvénye. A standard modell a következő:

$$f_{att}(d) = \frac{1}{c_0 + c_1 \cdot d + c_2 \cdot d^2}$$

ahol:

- d : a pont távolsága a fényforrástól.
- c_0 : konstans tompítási tényező.
- c_1 : lineáris tompítási tényező.
- c_2 : kvadratikus tompítási tényező.

Megoldás menete

1. Azonosítsuk a megadott paramétereket: d, c_0, c_1, c_2 .
2. Helyettesítsük be az értékeket a fenti képletbe.
3. Számítsuk ki a tompítási faktor értékét. Ez egy $[0, 1]$ közötti szám lesz.

20. Cylinder / Sphere Mapping

Feladat

Egy egységnyi méretű henger/gömb felületén adott egy pont (hengeren: θ szög és h magasság; gömbön: ϕ azimut és ϑ polárszög). Határozzuk meg a ponthoz tartozó (u, v) textúrákoordinátákat!

Általános megoldás

A textúraleképezés egy 3D felületi pontot egy 2D sík (a textúra) pontjára képez le. A textúrákoordináták, (u, v) , tipikusan a $[0, 1] \times [0, 1]$ tartományba esnek.

Cylinder Mapping (Henger leképezés) A henger palástját egy téglalagra képezzük le.

- Az u koordináta a henger kerülete mentén fut körbe, tehát a θ szögtől függ.
- A v koordináta a henger magassága mentén fut, tehát a h magasságtól függ.

A leképezés:

$$u = \frac{\theta}{360^\circ} \quad (\text{vagy } \frac{\theta}{2\pi} \text{ radiánban})$$
$$v = \frac{h}{H}$$

A feladatban "egység magas" henger szerepel, tehát a teljes magasság $H = 1$, így $v = h$.

Sphere Mapping (Gömb leképezés) A gömbfelületet szintén egy téglalagra képezzük le (equirectangular projection).

- Az u koordináta a ϕ azimutális szögtől (hosszúság) függ.
- A v koordináta a ϑ polárszögtől (szélesség) függ.

A konvenciók eltérhetnek, de a leggyakoribb leképezés:

$$u = \frac{\phi}{360^\circ} \quad (\phi \in [0, 360^\circ))$$
$$v = \frac{\vartheta}{180^\circ} \quad (\vartheta \in [0, 180^\circ))$$

Megoldás menete

1. Azonosítsuk a geometriai testet (henger vagy gömb).
2. Azonosítsuk a megadott paramétereket (θ, h vagy ϕ, ϑ).
3. Alkalmazzuk a megfelelő leképezési képletet az u és v koordináták kiszámításához.

21. Texture Sampling

Feladat

Bilineáris interpolációval mintavételezni szeretnénk egy textúrázott sík felület egy $P = (p_x, p_y)$ pontjának a színét. A legközelebbi textúra pontok (texelek) színei adottak: C_{00} a (x_0, y_0) pontban, C_{10} a (x_1, y_0) pontban, C_{01} a (x_0, y_1) pontban és C_{11} a (x_1, y_1) pontban. Milyen lesz a P pont színe?

Általános megoldás

A bilineáris interpoláció lényegében két irányban végrehajtott lineáris interpoláció. Először interpolálunk az x-tengely mentén a két y-szinten, majd az így kapott két színt interpoláljuk az y-tengely mentén.

Megoldás menete

1. Számítsuk ki a relatív távolságokat (interpolációs súlyokat) az x és y irányokban. A textúra rácspontjai általában egységnyi távolságra vannak, így $x_1 = x_0 + 1$ és $y_1 = y_0 + 1$.

$$s = \frac{p_x - x_0}{x_1 - x_0} = p_x - x_0$$

$$t = \frac{p_y - y_0}{y_1 - y_0} = p_y - y_0$$

2. Végezzük el a két lineáris interpolációt az x-irányban (lerp):

- Alsó sor: $C_{als} = (1 - s) \cdot C_{00} + s \cdot C_{10}$

- Felső sor: $C_{fels} = (1 - s) \cdot C_{01} + s \cdot C_{11}$

A színvektorokkal való számítást komponensenként (R,G,B) kell elvégezni.

3. Végezzük el a lineáris interpolációt y-irányban a kapott két színnel:

$$C_P = (1 - t) \cdot C_{als} + t \cdot C_{fels}$$

Ez adja meg a P pont végső, interpolált színét.

22. Animate Position / Angle

Feladat

Egy pont pozícióját/szögét szeretnénk animálni, és ismerjük az x_1, x_2, \dots, x_n értékeket, amelyek rendre a t_1, t_2, \dots, t_n időpontokhoz tartoznak. Mennyi lesz az érték egy adott $t_{keresett}$ időpontban (lineáris interpolációt használva)?

Általános megoldás

A lineáris interpolációhoz két kulcskocka (keyframe) közötti értéket számolunk. Először meg kell találni, hogy a keresett időpont melyik két kulcskocka közé esik.

Megoldás menete

1. Keressük meg azt az i indexet, amelyre $t_i \leq t_{keresett} < t_{i+1}$. Ez meghatározza a két kulcskockát, amelyek között interpolálni fogunk: (t_i, x_i) és (t_{i+1}, x_{i+1}) .
2. Számítsuk ki az interpolációs faktort (α), ami megadja, hogy a keresett időpont milyen arányban van a két kulcsidőpont között:

$$\alpha = \frac{t_{keresett} - t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Az α értéke $[0, 1]$ közötti szám lesz.

3. Végezzük el a lineáris interpolációt (lerp) a két kulcsérték között az α faktoral:

$$x_{keresett} = (1 - \alpha) \cdot x_i + \alpha \cdot x_{i+1}$$

4. Az eredmény a keresett érték a $t_{keresett}$ időpillanatban.

Megjegyzés szöganimációhoz: A szögek lineáris interpolációja nem mindig adja a "legrövidebb utat" (pl. 350° és 10° között a legrövidebb út 20° , de a lineáris interpoláció a 340° -os "hosszú utat" járja be). A feladatok azonban általában ezt az egyszerűsített lineáris interpolációt kérik.